Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ННІ «Інститут геології»

Дмитро Безродний

Конспект лекцій

з дисципліни

Теорія поля

для здобувачів за спеціальностями

103 та Е4 «Науки про Землю»

Київ - 2025

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ННІ «Інститут геології»

Дмитро Безродний

Конспект лекцій

з дисципліни

Теорія поля

для здобувачів за спеціальностями

103 та Е4 «Науки про Землю»

Затверджено вченою радою

ННІ «Інститут геології»

« 15 » _жовтня__ 2025 року

Київ - 2025

Конспект лекцій «Теорія поля» для здобувачів спеціальностей 103 та Е4 – «Науки про Землю» / Упорядник – доц. Безродний Дмитро – електронний ресурс, 2025 – 114 с.

Рецензент - канд. геол. н. Віктор Онищук

ЗМІСТ

ВСТУП 7
1.ВЕКТОР-ФУНКЦІЯ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТУ 9
1.1.Похідна вектор-функції по скалярному аргументу 10
1.1.1. Похідні вищих порядків 12
1.1.2. Основні властивості похідної 12
1.2.Інтегрування вектору-функції по скалярному аргументу 13
1.2.1. Вектор як елемент лінії 14
1.2.2.Вектор як елемент поверхні 16
2. СКАЛЯРНЕ ПОЛЕ 17
2.1. Похідна скалярної функції за даним напрямком. Градієнт. 18
2.2.Оператор Гамільтона-Набла.Вираз для градієнту в символічній формі 20
3. ВЕКТОРНЕ ПОЛЕ 21
3.1 Потік вектору через поверхню 23
3.2 Дивергенція поля 27
3.3. Теорема Остроградського-Гауса 28
3.4. Лінійний інтеграл вектору-функції 31
3.5. Циркуляція вектору по контуру нескінченно малої площадки 35
3.6. Ротор вектору 39
3.7 Теорема Стокса 41
4. СИМВОЛІЧНІ МЕТОДИ 43
4.1 Оператор Гамільтона. Векторні диференціальні операції другого порядку. Просторові похідні від добутку. 43
4.2. Векторні диференціальні операції другого роду 44
4.3 Просторові похідні від добутку скалярних і векторних функцій. 46
5.ФОРМУЛИ ГРІНА 48
5.1. Інтегральні співвідношення в векторному полі 48
5.2 Об’ємний інтеграл від градієнту 50
5.3 Об’ємний інтеграл від ротора 50
5.4 Інтеграл по замкненому контуру від скаляру 51

6. ПРЯМА І ОБЕРНЕНА ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПОЛЯ 53
6.1 Постановки задачі. Згортки векторних функцій. 57
6.2 Потенціальні поля 58
6.3 Соленоїдальні поля 61
6.4 Поле в обмеженій області простору вільне від джерел та вихорів 62
6.5 Визначення векторного поля за його джерелами (витоками) та вихорами 64
7. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ПОЛЯ ТА ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ 66
7.1 Фізичні характеристики електромагнітних полів і електромагнітні властивості середовищ. Вектори електромагнітного поля. 66
7.2. Діелектрична та магнітна проникність 68
7.3. Поляризація та намагніченість 70
8. ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ В ПРОВІДНОМУ СЕРЕДОВИЩІ 73
8.1 Закон збереження заряду 74
8.2 Закони Кірхгофа 75
8.3 Закон Ома 77
8.4 Матеріальні рівняння для анізотропних середовищ 79
9. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ЗМІННОГО ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ 84
9.1. Струм зміщення 84
9.2. Перше рівняння Максвелла 86
9.3. Друге рівняння Максвелла 87
9.4. Дивергенція векторів поля 89
9.5. Повна система рівнянь Максвелла 91
9.6. Рівняння Максвелла та класи електромагнітних явищ 92
9.7. Електромагнітні поля в однорідних середовищах 93
9.8. Моделі електромагнітних полів 95
9.8. Граничні умови для векторів поля 96
9.9. Електродинамічні потенціали 102
9.10 Вектор Герца 104
9.11 Граничні умови для електродинамічних потенціалів 106

9.12 Гармонійні коливання та рівняння електродинаміки в комплексній формі 107
9.11. Хвильове число 110
9.12 Міжнародна система електромагнітних одиниць 112
СПИСОК ДЖЕРЕЛ 114

ВСТУП

Поле – це удосконалене умовне поняття, що являє собою сукупність точок простору співставлена з якою-небудь величиною. Про це свідчить математична фізика поля, і воно є суто умовною величиною.

З іншого боку поле – співвідповідність кожній точці середовища визначених фізичних властивостей. Фізичне поле в такому випадку – єдине.

Фізичне поле – це поле існування матерії, її визначеного виду. Типи фізичних полів – гравітаційне, магнітне, електромагнітне.

В 1783 році закон Шарля – Кулона дав початок вченню про магнетизм. Теорія електромагнетизму пройшла свій шлях, на відміну від механіки, за 70-80 років, а не за тисячоліття.

Найбільш видатну роль в розвиток теорії електромагнітного поля відіграли закони Біо-Савара-Лапласа та закон індукції Фарадея.

Перший з них свідчить, що будь-який електричний струм створює магнітне поле, інтенсивність якого в даній точці простору характеризується вектором магнітної індукції $\vec{B}$. Величина та напрямок цього вектору визначаються саме за цим законом

$$\Delta\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi r^2}\vec{I}\Delta l \sin\alpha,$$

де $\Delta\vec{B}$ – магнітна індукція в точці A, що створюється струмом I, який протікає через елемент дроту довжиною Δl; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$Гн $\cdot$ м$^{-1}$ – магнітна стала, а саме, магнітна проникність вакууму; μ – магнітна проникність; $\vec{r}$ – радіус вектор, що з'єднує елемент Δl з точкою A, в якій обчислюється індукція; α – кут між напрямком струму в елементі і радіус-вектором $\vec{r}$.

Закон Фарадея полягає в тому, що при будь-якій зміні магнітного потоку, який пронизує контур, в останньому виникає е.р.с. індукції ε, який виражається таким чином

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta l}.$$

Значення е.р.с., що виникає на кінцях провідника довжиною l, що рухається в електричному полі з індукцією $\vec{B}$ та швидкістю $\vec{v}$, дорівнює

$$\varepsilon = \vec{B} \cdot l \cdot \vec{v} \cdot \sin\alpha,$$

де α – кут між напрямками векторів $\vec{B}$ і $\vec{v}$. Ця величина досягає свого екстремуму, коли $\vec{v}$ перпендикулярний до $\vec{B}$.

Вершиною теорії електромагнітного поля в подальшому стали електромагнітні рівняння Максвелла та його праця по теорії поля.

Максвелл узагальнив всі експериментальні факти про електромагнетизм та представив всі його закономірності в двох феменологічних рівняннях (I і II рівняння Максвелла). Самі рівняння представляють собою постулати, їх можна вивести лише індукційним методом.

Подальшу розробку теорії Максвелла проводив Генріх Герц. Він зробив ряд нових відкриттів, в тому числі, відкрив електромагнітні хвилі.

Зоммерфельд в першому десятилітті XX сторіччя розробив теорію електромагнітних хвиль. На початку 30-х років минулого століття теорія Максвелла досягає своєї вершини та на її фундаменті розвивається квантова електродинаміка.

1. ВЕКТОР-ФУНКЦІЯ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТУ

Для опису фізичних задач часто застосовують вектори, положення яких залежить від скалярної величини. В цьому випадку записують

$$\vec{a} = f(t) \text{ або } \vec{a} = \vec{a}(t).$$

Нехай точка $M(x, y, z)$ переміщуючись, описує траєкторію LL_1 (рис. 1.1).

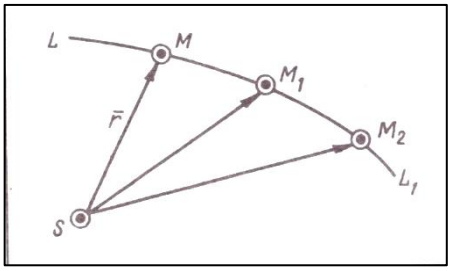

Рис. 1.1 Графічне представлення вектор-функції скалярного аргументу [2]

Положення точки M можна охарактеризувати радіус вектором $\vec{r}$:

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}. \qquad (1.1)$$

Цей випадок відповідає початку координат. Якщо є фіксована точка $A(a, b, c)$ і початок $\vec{r}$ співпадає саме з цією точкою, то

$$\vec{r} = (x-a)\vec{\imath} + (y-b)\vec{\jmath} + (z-c)\vec{k}. \qquad (1.2)$$

Напрямні косинуси радіус-вектору визначаються

$$\cos\alpha = \cos(\widehat{\vec{r}x}) = \frac{x}{|\vec{r}|}; \quad \cos\beta = \cos(\widehat{\vec{r}y}) = \frac{y}{|\vec{r}|}; \quad \gamma = \frac{z}{|\vec{r}|} \text{ або}$$

$$\cos\alpha = \frac{x-a}{|\vec{r}|}; \quad \cos\beta = \frac{y-b}{|\vec{r}|}; \quad \cos\gamma = \frac{z-c}{|\vec{r}|}.$$

Якщо в подальшому положення точки M на LL_1 визначається скалярною величиною (наприклад часом t), то тоді для кожного моменту t можна визначити положення точки, її швидкість руху, прискорення: $r = r(t);\ v = v(t);\ a = a(t)$.

Будь-яка вектор-функція $\vec{a}(t)$ може бути представленою трьома скалярними функціями: $\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{\imath} + a_y(t)\vec{\jmath} + a_z(t)\vec{k}$ [2, 6].

Нехай визначений вектор $\vec{a} = \vec{a}(t)$. При зміні t вектор змінює напрямок і модуль. Зафіксуємо точку A та з цієї точки, як з початку координат, відновимо вектори $\vec{a} = \vec{a}(t)$, якщо t неперервно змінюється на сегменті $[t_1; t_2]$. Геометричне місце кінців векторів $\vec{a}(t)$ утворить у просторі лінію, яка називається годографом заданої вектор-функції, або просто годографом вектору $\vec{a}(t)$.

Для вектор-функції справедливий ряд теорем та визначень, що аналогічні скалярному аналізу.

Вектор $\vec{a}$ є нескінченно малим, якщо нескінченно малий його абсолютна величина (модуль) $|\vec{a}|$. Теореми про властивості нескінченно малих для вектор-функції та скалярної функції співпадають. Для прикладу геометрична сума кінцевого числа нескінченно малих векторів є величина нескінченно мала.

Для вектору-функції вводиться визначення межі. Кажуть, що вектор-функція $\vec{a}(t)$ має межею постійний вектор $\vec{A}$ при прямуванні параметру t до t_0, якщо для будь-якого малого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$, для яких при $|t - t_0| < \delta$ буде справедливе відношення $\left|\vec{a}(t) - \vec{A}\right| < \varepsilon$.

Основні теореми про межу суми, різниці, добутку кінцевого числа векторних величин, такі самі, як і в скалярному аналізі.

1.1. Похідна вектор-функції по скалярному аргументу

Нехай задана неперервна функція $\vec{a} = \vec{a}(t)$ (рис. 1.2). Лінія $LL^{|}$ буде її годографом. Зафіксуємо деяке довільне значення аргументу t, якому на годографі буде відповідати точка M. В цій точці функція буде дорівнювати $\vec{a}(t)$. Дамо аргументу функції t малий приріст Δt. Тоді в новій точці функція буде $\vec{a}(t + \Delta t)$, а точка M переміститься в точку M_1. Тоді приріст функції буде дорівнювати $\Delta\vec{a} = \vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t) = \overrightarrow{MM_1}$. Складемо співвідношення $\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}$. Це буде вектор, що співпадає за напрямком з $\Delta\vec{a}$, але різний за абсолютною

величиною - $|\overline{MA}|$. Точка A тим далі відсунеться від точки M, чим менша величина Δt $(\Delta t < 1)$.

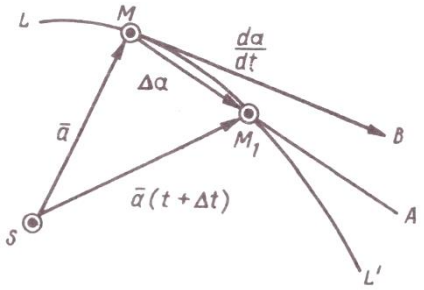

Рис. 1.2 Графічне представлення похідної вектор-функції по скалярному аргументу [2]

Нехай величина $\Delta t \to 0$. Як і в випадку скалярного аналізу, похідною вектор-функції по скалярному аргументу називають межу відношення приросту функції до приросту незалежної змінної, коли остання прямує до нуля. Тоді

$$\frac{d\vec{a}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{a}(t+t_0)-\vec{a}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}. \qquad (1.3)$$

По формі все аналогічно зі скалярним аналізом, але похідна – є вектор. Видно, що при наближенні Δt до нуля точка M_1 на годографі наближається до точки M. Відтинаюча $\overline{MA}$ прямує до положення дотичної на годографі і межею буде деякий вектор $\overrightarrow{MB}$. Отже, похідна $\frac{d\vec{a}(t)}{dt}$ в даній точці М годографа зображується вектором $\overrightarrow{MB}$, що є дотичним до годографу в цій точці. Вектор $\overrightarrow{MB}$ спрямований у сторону переміщення точки М при зростанні t.

Якщо $\vec{a} = \vec{a}(t)$ має визначену та кінцеву похідну в даній точці t, то вектор-функція називається диференційованою в даній точці.

Нехай вектор-функція задана в аналітичному виді:

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k}, \text{ тоді}$$

$$\Delta\vec{a}(t) = \Delta a_x(t)\vec{i} + \Delta a_y(t)\vec{j} + \Delta a_z(t)\vec{k}.$$

Поділивши обидві частини на приріст аргумента Δt та переходячи до межі при $\Delta t \to 0$, отримаємо

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{a_x}{\Delta t}\vec{i}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{a_y}{\Delta t}\vec{j}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{a_z}{\Delta t}\vec{k},$$

або

$$\frac{d\vec{a}}{dt}=\frac{da_x}{dt}\vec{i}+\frac{da_y}{dt}\vec{j}+\frac{da_z}{dt}\vec{k} \qquad (1.4)$$

В цьому записі $\frac{da_x}{dt}, \frac{da_y}{dt}$ та $\frac{da_z}{dt}$ – звичайні похідні скалярних функцій.

1.1.1. Похідні вищих порядків

Похідна заданої вектор-функції п о скалярному напрямку є нова векторна функція. Отже, можна знайти і другу та інші похідні заданої функції

$$\frac{d^2\vec{a}(t)}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left[\frac{d\vec{a}(t)}{dt}\right];\ \frac{d^3\vec{a}(t)}{dt^3}=\frac{d}{dt}\left[\frac{d^2\vec{a}(t)}{dt^2}\right];\ \cdots\frac{d^n\vec{a}(t)}{dt^n}=\frac{d}{dt}\left[\frac{d^{n-1}\vec{a}(t)}{dt^{n-1}}\right].$$

В аналітичній формі похідні вищих порядків мають вид:

$$\frac{d^2\vec{a}(t)}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left[\frac{da_x}{dt}\vec{i}+\frac{da_y}{dt}\vec{j}+\frac{da_z}{dt}\vec{k}\right]=\frac{d^2a_x}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2a_y}{dt^2}\vec{j}+\frac{d^2a_z}{dt^2}\vec{k}$$

$$\frac{d^n\vec{a}(t)}{(dt^n)}=\frac{d^na_x}{dt^n}\vec{i}+\frac{d^na_y}{dt^n}\vec{j}+\frac{d^na_z}{dt^n}\vec{k}. \qquad (1.5)$$

1.1.2. Основні властивості похідної

1. Якщо $\vec{a}(t)=\vec{U}(t)\pm\vec{V}(t)$, то $\frac{d\vec{a}(t)}{dt}=\frac{d\vec{U}(t)}{dt}\pm\frac{d\vec{V}(t)}{dt}$.
2. Нехай $\vec{a}(t)=m\vec{U}$, де $m=m(t)$ – скалярна функція, а $\vec{U}=\vec{U}(t)$ – векторна функція однієї і тієї ж змінної. Тоді

$$\frac{d[m(t)\vec{U}(t)]}{dt}=m(t)\frac{d\vec{U}(t)}{dt}+\frac{dm(t)}{dt}\vec{U}(t).$$

Якщо $m=const$, то $\frac{dm}{dt}=0$ і $\frac{d[m\vec{U}]}{dt}=m\frac{d\vec{U}}{dt}$.

3. $\vec{P}(t)=\left(\vec{U}(t),\vec{V}(t)\right)$, тоді

$$\frac{d\vec{P}(t)}{dt}=\left(\frac{d\vec{U}(t)}{dt},\vec{V}(t)\right)+\left(\vec{U}(t),\frac{d\vec{V}(t)}{dt}\right).$$

4. $\vec{U}(t)=\left[\vec{a}(t)\times\vec{b}(t)\right]$, тоді

$$\frac{d\vec{U}(t)}{dt} = \left[\frac{d\vec{a}(t)}{dt} \times \vec{b}(t)\right] + \left[\vec{a}(t) \times \frac{d\vec{b}(t)}{dt}\right].$$

Відносно останньої формули слід зазначити, що в ній порядок множників в кожному доданку має строго визначене значення і не може переставлятися.

5. Представимо вектор $\vec{a}(t)$ в такому вигляді $\vec{a}(t) = |\vec{a}|\overrightarrow{a^0}(t)$, де $\overrightarrow{a^0}$ – орт вектору , тоді

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d|\vec{a}|}{dt}\overrightarrow{a^0} + \frac{d\overrightarrow{a^0}}{dt}|\vec{a}|. \qquad (1.6)$$

Ця загальна формула враховує зміну як модуля вектору, так і його напрямку.

5.1. У векторі-функції змінюється тільки модуль, а орт залишається сталим. Тоді $\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d|\vec{a}|}{dt}\overrightarrow{a^0}$. Вектор похідної співпадає за напрямком з вихідним вектором.

5.2. Нехай буде навпаки, у вектор-функції змінюється не модуль, а орт $\overrightarrow{a^0}(t)$ при зміні аргумента t:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = |\vec{a}|\frac{d\vec{a}_0}{dt}.$$

Отримуємо, що похідна вектору-функції перпендикулярна вихідному вектору $\vec{a}$. Годограф вихідної функції – коло, а дотична до нього перпендикулярна до радіусу.

6. Похідна складної функції.

Нехай $\vec{a} = \vec{a}(U)$ і $U = f(t)$. Як і в скалярному аналізі

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dU} \cdot \frac{dU}{dt}.$$

1.1.3. Інтегрування вектору-функції по скалярному аргументу

Вважають, що $\vec{A}(t)$ є первісна вектор-функція, або невизначений інтеграл функції $\vec{a}(t)$, якщо $\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{a}$ [2, 6]. Первісну функцію, як і в скалярному аналізі, позначимо $\vec{A}(t) = \int \vec{a}(t)dt$. З властивостей інтегрування слідує, що

інтегрування не має єдиного розв'язку і $\vec{A}(t) = \int \vec{a}(t)dt = \vec{A}(t) + \vec{C}$, де С – довільний постійний вектор.

Легко можна довести, що основні теореми, що характерні для скалярних величин, дійсні і для векторних. Це теореми про винесення постійного множника за знак інтеграла та про інтеграл суми двох функцій. Якщо $\vec{d}$ – постійний вектор, то справедливо

$$\int(\vec{d}, \vec{a})\, dt = (\vec{d}, \int \vec{a}dt) + C;$$

$$\int [\vec{d} \times \vec{a}]\, dt = \left[\vec{d} \times \int \vec{a}dt\right] + C.$$

Якщо підінтегральна функція представлена розкладанням по координатним ортам, то

$$\vec{A}(t) = \int \vec{a}(t)dt = \int a_x(t)dt\vec{i} + \int a_y(t)dt\vec{j} + \int a_z(t)dt\vec{k} + C.$$

Визначений інтеграл:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t)dt = \vec{A}(t)|_{t_1}^{t_2} = \vec{A}(t_2) - \vec{A}(t_1).$$

В аналітичній формі:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} a_x(t)dt \cdot \vec{i} + \int_{t_1}^{t_2} a_y(t)dt \cdot \vec{j} + \int_{t_1}^{t_2} a_z(t)dt \cdot \vec{k}.$$

В загальному випадку визначений інтеграл обчислюється як межа суми нескінченно великого числа нескінченно малих складових виду $\vec{a}(t_i) \cdot \Delta t_i$:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{a}(t_i) \cdot \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t)dt.$$

1.2.1. Вектор як елемент лінії

Не завжди правила скалярного аналізу діють так строго, як це описано в попередніх задачах. На наступних прикладах показано, що у векторному аналізі можуть бути і власні правила. Нехай зафіксовано положення двох точок O і A та проведені деякі криволінійні траєкторії, що з'єднують ці точки (рис.1.3).

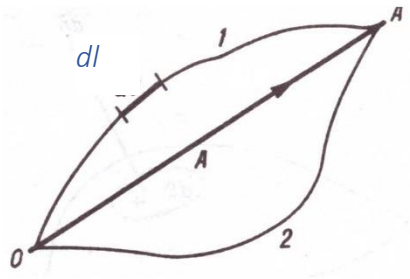

Рис. 1.3. Графічне представлення вектору як елементу лінії [2]

Виберемо одну траєкторію і розділимо її на ряд невеликих ділянок таким чином, щоб довжину i-ої ділянки можна було представити вектором $\Delta\vec{l}$, або його диференціалом $d\vec{l}$. Напрямок цього елементарного вектору оберемо в напрямку руху від точки О до точки А.

Будемо збільшувати число m так, що $m \to \infty$ i $\Delta\vec{l} \to 0$. Яким би чином не розбивати криволінійну траєкторію, сума елементарних векторів $\Delta\vec{l}_i$, буде дорівнювати вектору $\overrightarrow{OA} = \vec{A}$.

Як відомо, межа (границя) суми нескінченно великого числа складових, коли кожне складове нескінченно мало, називається визначним інтегралом. Якщо записати $\lim\limits_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \Delta\vec{l}_i = \int_{OA} d\vec{l} = \vec{A}$, то отримаємо криволінійний інтеграл.

Як відомо форма траєкторії не здійснює впливу на результат інтегрування, а залежить тільки від положення початкової та кінцевої точок. При переході у зворотному напрямку , тобто з точки А в точку О, маємо

$$\int_{\mathrm{AO}} d\vec{l} = -\vec{A}.$$

Тоді можна стверджувати, що

$$\int_{O1A} d\vec{l} + \int_{A2O} d\vec{l} = 0.$$

Таким чином, ***інтеграл вектору по замкненому контуру дорівнює нулю.***

1.2.2.Вектор як елемент поверхні

Нехай задана криволінійна поверхня S (рис. 4). Розіб'ємо її на окремі ділянки, але настільки малі, що кожну з них можна вважати плоскою. Кожна елементарна комірка (ділянка) має свій контур і характеризується нормаллю за правилом правого гвинта [2].

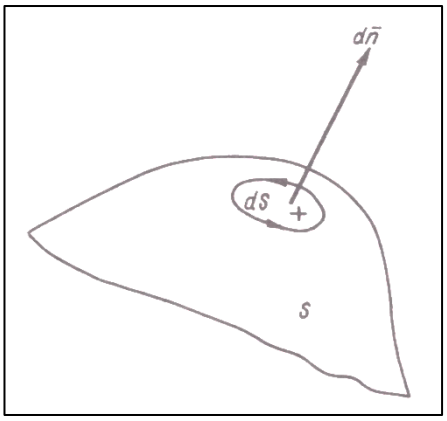

Рис. 1.4 Графічне представлення вектору як елементу поверхні [2]

Кожна поверхня dS_i зображується вектором dn_i. Підсумовуємо всі елементарні комірки. Нехай комірок буде m і кожна комірка ΔS_i характеризується вектором $\overrightarrow{n_i}$. Нехай $m \to \infty$, тоді $\Delta\vec{S} \to 0$. Тоді сума комірок визначається таким чином

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \Delta\overrightarrow{S_i} = \int_S \ d\vec{S} = \int_S \ d\vec{n} = \vec{N}.$$

Під інтегралом по поверхні будемо розуміти геометричну суму всіх комірок ΔS або всіх векторів $d\vec{n}$. Будь-яку замкнену поверхню будемо розглядати як замкнений багатогранник, складений з елементів dS_i або векторів $\overrightarrow{n_i}$. Для замкненої поверхні S сума всіх $\overrightarrow{n_i}$ дорівнює нулю. Таким чином, $\oiint d\vec{S} = \oiint d\vec{n} = 0$. З останнього співвідношення слідує наступне. ***На замкненій поверхні S проведена замкнена лінія L, що поділяє S на дві частини S_1 і S_2. Тоді справедливо, що*** $\oiint_{S_1} \vec{dS} = -\oiint_{S_2} \vec{dS}$.

2. СКАЛЯРНЕ ПОЛЕ

Нехай в деякій області D визначена скалярна функція $U = U(x, y, z)$. Це значить, що в кожній точці M, яка належить області D $M \in D$ функція U приймає визначене значення. Якщо точка M задана декартовими координатами $M(x, y, z)$ або радіус-вектором $M(r)$, то маємо $U = U(M) = U(x, y, z) = U(r)$. Тоді кажуть, що в області D задано скалярне поле U [2]. Якщо область D обмежена, то тоді мають бути задані поверхні, які є границями (межами) області; хоча область D може бути необмеженою. Для площини U залежить від двох змінних $U = U(x, y)$. Тоді це двовимірне, або плоске, скалярне поле.

Найпростіший метод вивчення скалярного поля – побудова поверхонь рівня або еквіпотенціальних поверхонь. Нехай функція U приймає яке-небудь числове значення С, тоді

$$U(x, y, z) = \text{C}. \qquad (2.1)$$

Знайдемо геометричне місце всіх точок, що задовольняють цьому рівнянню. Це, звичайно, буде деяка поверхня, яка називається поверхнею рівня. Змінюючи різні числові значення С ($C_0;\ C_i = C_0 + i\Delta C;\ i = 1, 2, 3 \cdots, n$) отримуємо сімейство поверхонь рівня, або сімейство ізоліній для двовимірного поля [1-3, 6]. Це в значній мірі допомагає з'ясувати структуру поля: видно, в яких місцях поля зростають; в яких зменшуються, а де залишаються незмінними. Можна зробити і кількісні висновки. В тих місцях, де ізолінії відповідного поля особливо зближені, скалярне поле функції U змінюється найбільш швидко. Напрямок найбільшої зміни завжди перпендикулярний ізолініям. У випадку, якщо ізолінії поля розряджені, функція змінюється повільніше.

2.1. Похідна скалярної функції за даним напрямком. Градієнт.

Нехай задане поле $U = U(x, y, z)$ та є деякий напрямок

$$l^0 = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}. \quad (2.2)$$

Це є одиничний вектор-орт, який описується напрямними косинусами. В заданому полі виберемо точку $\mathrm{M}(x, y, z)$, де вона визначена та функція приймає значення $U = U(\mathrm{M})$. З точки M проведемо пряму, яка паралельна орту l^0 та зафіксуємо точку M_1. Нехай відрізок $MM_1 = \Delta l$. Тоді при переході з точки M в точку M_1 функція отримає приріст $\Delta U = U(M_1) - U(M)$. Цей приріст відповідає приросту незалежної змінної на відрізку Δl.

Похідною скалярної функції за заданим напрямком називається межа відношення приросту функції до приросту переміщення точки, коли останній прямує до нуля:

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{U(M_1) - U(M)}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta l}. \quad (2.3)$$

Виразимо приріст функції через її диференціал

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\Delta z + \varepsilon,$$

де ε – нескінченно мала величина порядку вище першого. Тоді

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x}\lim_{\Delta l \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta l} + \frac{\partial U}{\partial y}\lim_{\Delta l \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta l} + \frac{\partial U}{\partial z}\lim_{\Delta l \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta l} + \lim_{\Delta l \to 0}\frac{\varepsilon}{\Delta l}.$$

Легко визначити, що представлені три межі – напрямні косинуси заданого орта l^0, а останній член рівняння перетворюється в нуль. Тоді

$\frac{\Delta x}{\Delta l} = \cos\alpha$; $\frac{\Delta y}{\Delta l} = \cos\beta$; $\frac{\Delta z}{\Delta l} = \cos\gamma$ і, відповідно,

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma. \quad (2.4)$$

Розглянемо такий вектор $\vec{G}$, який створюється скалярним полем $U = U(x, y, z)$ та називається градієнтом цього скалярного поля

$$\vec{G} = gradU = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}. \quad (2.5)$$

Тоді похідну за напрямком представимо як скалярний добуток двох векторів $gradU$ та l^0:

$$\frac{\partial U}{\partial l} = (gradU, l^0) = \text{Пр.}|_{l^0} gradU. \qquad (2.6)$$

Похідна скалярного поля за заданим напрямком визначається скалярним добутком градієнта поля на одиничний орт цього напрямку. Тобто, похідна чисельно дорівнює проекції вектору-градієнту поля на заданий напрямок. Цілком очевидно, що модуль градієнту та його напрямні косинуси можна обчислити наступним чином [1, 2, 6]:

$$\left|\vec{G}\right| = |gradU| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}. \qquad (2.7)$$

$$\frac{G_x}{|\vec{G}|} = \cos\alpha = \cos\left(\widehat{G, x}\right);\ \frac{G_y}{|\vec{G}|} = \cos\beta = \cos\left(\widehat{G, y}\right);\ \frac{G_z}{|\vec{G}|} = \cos\gamma = \cos\left(\widehat{G, z}\right).$$

Розглянемо ще одну обставину. Виходячи з вище зазначених формул та поведінки похідних, можна зробити висновок, що градієнт поля не визначається системою координат.

Тобто, в якій би системі координат не була б записана скалярна функція $U = U(x, y, z)$, вектор $gradU$ завжди приймає такий напрямок, вздовж якого похідна заданої функції є найбільшою. Таким чином, $gradU$ є інваріант скалярного поля.

Визначення. Інваріантом даного об'єкту називається величина, що не залежить від системи координат та характеризує які-небудь властивості об'єкту.

З іншої точки зору: в кожній точці скалярного поля $U(\text{M})$ можна побудувати вектор градієнту $\vec{G}$, модуль якого дорівнює максимальній швидкості зміни поля в цій точці. ***Вектор $\vec{G}$ називається градієнтом скалярного поля.***

2.2. Оператор Гамільтона- Набла. Вираз для градієнту в символічній формі.

Градієнт скалярного поля $U = U(x, y, z)$ в декартовій системі координат представимо:

$$gradU = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\ \vec{k}.$$

Введемо одну умовну операцію. Винесемо за дужки як множник функцію U. Тоді

$$gradU = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\ \vec{k}\right)U. \qquad (2.8)$$

Умовну операцію, яка записана в дужках, позначають символом ∇ (грецька буква «набла») та називається оператором Гамільтона-набла. Це символічний вектор.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\ \vec{k}. \qquad (2.9)$$

Відповідно рівняння (2.8) можна записати таким чином:

$$gradU = \nabla U. \qquad (2.10)$$

Самостійно символічний оператор не застосовується. Як оператор він діє на вираз, який записано відразу після нього. Остання формула промовляється так: градієнт скалярної функції U дорівнює набла U. Формула є символічним виразом градієнту [1-3, 6, 7].

3. ВЕКТОРНЕ ПОЛЕ

Нехай визначена деяка область D, з кожною точкою M(x, y, z) якої пов'язаний вектор.

$$\vec{a}(x,y,z) = a_x(x,y,z)\vec{i} + a_y(x,y,z)\vec{j} + a_z(x,y,z)\vec{k} \qquad (3.1)$$

Тоді кажуть, що задана вектор-функція $\vec{a}(x,y,z) = \vec{a}(\mathrm{M}) = \vec{a}(x,y,z)$.

Область D називається полем заданого вектору $\vec{a}$.

Задати векторне поле – це означає вказати закон, за яким для кожної точки M(x, y, z) області D можна визначити вектор [1, 2, 6].

Розглянемо математичні методи вивчення векторних полів.

Першим і найбільш простим способом вивчення векторного поля є побудова в ньому векторних ліній.

Нехай в області D задано векторне поле

$$\vec{a}(x,y,z) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

Векторною називається така лінія, в кожній точці якої вектор $\vec{a}$ є дотичною до неї.

В полі вектору $\vec{a}$ оберемо точку M(x, y, z), через яку проходить векторна лінія L (рис. 3.1).

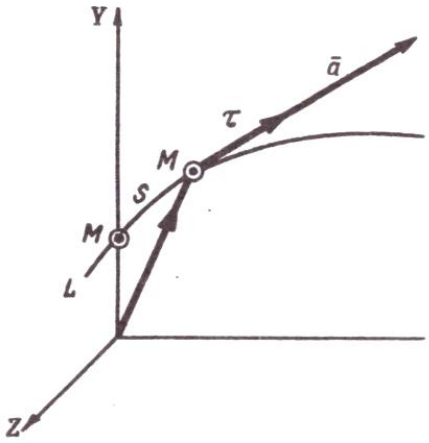

Рис. 3.1 Графічне представлення векторної лінії [2]

Її можна представити радіус-вектором

$$\vec{R} = \vec{R}(\mathrm{t}) = \mathrm{x(t)}\,\vec{\imath} + \; y(t)\vec{\jmath} + \; z(t)\vec{k} \quad . \tag{3.2}$$

За деяким значенням t вектор $\vec{R}$ вкаже нам на точку М. Тоді функції x, y та z в рівнянні (3.2) за фіксованого параметру t будуть координатами точки М. Це є векторна форма рівняння векторної лінії, в кожній точці М вектор $\vec{a}$ співпадає з напрямком τ – дотичної до лінії L:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k}. \tag{3.3}$$

Якщо вектори $\vec{\tau}$ та $\vec{a}$ колінеарні (паралельні), то легко можна записати умову паралельності векторів:

$$\left[\frac{d\vec{R}}{dt} \times \vec{a}\right] = 0. \tag{3.4}$$

Це є шуканим рівнянням. Його треба перевести в аналітичну форму. Запишемо рівняння паралельності в такому виді:

$$\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)}{a_x} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{a_y} = \frac{\left(\frac{dz}{dt}\right)}{a_z},$$

або

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}. \tag{3.5}$$

Це є система двох диференціальних рівнянь. Відповідно, задача побудови векторних ліній приводить до вирішення двох диференціальних рівнянь системи (3.5). За результатами розв’язку можуть бути отримані дів функції:

$$f_1(x, y, z) = C_1 \quad \text{та} \quad f_2(x, y, z) = C_2 \; . \tag{3.6}$$

Кожне з рівнянь системи (3.6) – це поверхня. Їхній перетин визначає положення векторної лінії [2, 3, 7].

Тоді, можна сказати, що буде будь-яка точка М(x, y, z), що належить області Д, може бути прийнятою за початкову або вихідну для побудови векторної лінії. Відповідно, число ліній необмежено велике, та вся область Д може бути рівномірно покрита ними.

У фізичних полях, якщо провести в довільній точці M(x, y, z) ортогональну до вектору поля площадку, то тоді через одиницю площі пройде таке число векторних ліній, яке дорівнює модулю вектору в цій точці. В такому випадку поле, що представлено системою векторних ліній, має різну їхню щільність. Там, де модуль $\vec{a}$ – великий, векторні лінії згущені. Та навпаки, де він маленький – лінії розріджені. Якщо $a = a(x, y, z)$ в усіх точках має однакові абсолютні значення та напрямок, то тоді векторні лінії такого поля розподілені рівномірно та паралельні між собою. Таке поле називається однорідним.

3.1 Потік вектору через поверхню

Вперше це поняття з'явилося в гідродинаміці, а потім в теорії електричного поля, поля сили тяжіння та при вивченні магнетизму. Це поняття є базовим для векторного аналізу полів [1-3, 5].

Розглянемо найпростіший приклад.

Нехай в деякій області рухається рідина та створено поле швидкостей $\vec{V}(x, y, z)$. Для спрощення припустимо, що воно однорідне, тобто вектор $\vec{V}$ в усіх точках має однаковий модуль та напрямок. Нехай на шляху потоку рідини існує прозора для рідини площина величиною S. Ця площина характеризується нормаллю $\vec{n}^0$, яка направлена під деяким кутом до вектору швидкості. Визначимо об'єм рідини, що протікає через дану поверхню за одиницю часу (дивись рисунок 3.2).

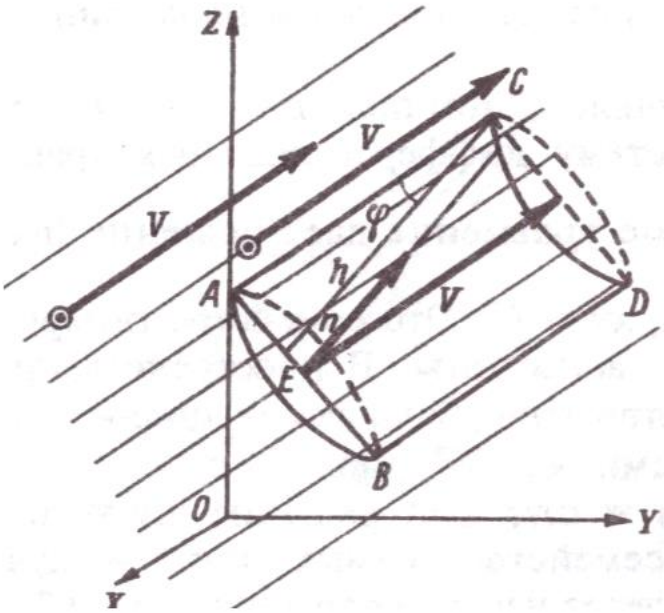

Рис. 3.2 Графічне представлення потоку вектору через поверхню [2]

Якщо в початковий момент шар рідини був на площинці AB, то за одну секунду він перемістився в положення CD на відстань $\left|\vec{V}\right|$ одиниць. Виходить, що шуканий об'єм рідини дорівнює об'єму циліндра, що побудований на даній площадці з утворюючою, яка дорівнює швидкості потоку $\left|\vec{V}\right|$.

Позначимо цей об'єм через N. Він дорівнює добутку площі основи на висоту. Висота $h = |V|\ cos\ \varphi$, де φ – кут між векторами V та n^0. Тому $N = V \cdot S \cdot cos\ \varphi = (V, Sn^0)$. Таким чином кількість рідини, що протікає через поверхню Sn^0, дорівнює скалярному добутку швидкості руху рідини на вектор-нормаль до поверхні.

По аналогії з описаною задачею гідродинаміки введено поняття потік вектору.

Нехай задано поле деякого вектору $\vec{a}(x, y, z)$. Оберемо в цьому полі площадку ΔS що визначається ортом n^0. При цьому величина площадки має бути настільки малою, щоб вектор $\vec{a}$ можна було б наближено вважати постійним у всіх точках площадки.

Назвемо елементарним потоком ΔN вектора $\vec{a}$ через площадку ΔSn^0 скалярну величину [1-3, 7]

$$\Delta N = (\vec{a}, \Delta S\vec{n}^0) = |\vec{a}|\Delta S\ cos\ (\widehat{\vec{a}, \vec{n}^0}). \qquad (3.7)$$

Зазначимо, що кут може бути або гострим, або тупим. Відповідно, потік буде або додатнім, або від'ємним. Абсолютна величина ΔN умовно показує число векторних ліній, що проходять через площадку ΔS.

Узагальнимо тепер наше визначення.

Задано векторне поле $\vec{a}(x, y, z)$ та визначена довільна криволінійна поверхня Sкінцевих розмірів. Розділимо її на m елементарних частинок ΔS_i. Вони мають бути настільки малими, щоб кожну з них можна було б прийняти за площину. На площадці ΔS_i візьмемо довільну точку M_i та побудуємо в цій точці нормальний орт $\vec{n}_i^0$ та вектору $\vec{a}$. Можна обчислити елементарні потоки ΔN_i через кожну поверхню ΔS_i:

$$\Delta N_i = (\overrightarrow{a_i}, \Delta S_i\vec{n}_i^0).$$

Будемо підсумовувати ці потоки, збільшуючи число m та тим зменшуючи площадки ΔS_i.

Сумарний потік визначимо як межу суми елементарних потоків, коли їхнє число збільшується та прямує до нескінченності. За визначенням це інтеграл:

$$\boldsymbol{N = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \left(\overrightarrow{a_i}, \Delta S_i\vec{n}_i^0\right) = \iint_S \left(\overrightarrow{a}, \vec{n}^0\right) ds}. \qquad (3.8)$$

Обчислення потоку вектору зводиться до обчислення подвійного інтегралу [1-3, 6]:

$$N = \iint_S \left[a_x cos(\widehat{\vec{n}, x}) + a_y cos(\widehat{\vec{n}, y}) + a_z cos(\widehat{\vec{n}, z})\right] ds \qquad (3.8\ а)$$

Якщо поверхня S, то, як було встановлено раніше, n^0 – зовнішня нормаль.

Потік запишемо як:

$$\oiint_S \left(\overrightarrow{a}, \vec{n}^0\right) ds\ . \qquad (3.9)$$

Будемо вважати, що інтеграл (3.9) обчислений.

Розглянемо, які висновки можна зробити відносно поля за величиною (3.9).

Відзначимо, що в одних місця вектор $\vec{a}$ може входити в середину замкненої поверхні S, і тоді кут між вектором і нормаллю буде тупим. Косинус цього кута – від'ємний, і потік так само від'ємний знак.

В інших місцях вектор $\vec{a}$ може виходити з замкненої поверхні S, і тоді кут з нормаллю буде гострим. В даному випадку потік буде додатнім.

В деяких частинах поля вектор $\vec{a}$ буде ковзати по поверхні, то його кут з нормаллю буде прямим. В таких випадках потік стає нульовим.

Може виявитися, що додатних складових більше, і загальний потік буде додатним. Це означає, що з замкненої поверхні векторних ліній буде виходити більше, ніж увійшло. Всередині цієї поверхні мають бути джерела векторних ліній.

Навпаки, якщо сумарний потік від'ємний, то векторних ліній входить більше, ніж виходить. Тоді всередині замкненої поверхні мають бути стоки векторних ліній або стоки поля.

Якщо сумарний потік дорівнює нулю, то число ліній, що вийшли дорівнює числу тих, що ввійшли. Всередині такої поверхні немає ні джерел, ні стоків поля.

Задача 1

Задано поле $\vec{a} = \vec{r}$. Знайти потік цього вектору через поверхню радіуса R з центром в початку координат.

Задане поле представимо так: $\vec{a} = \vec{r}\,\overrightarrow{r^0}$. Запишемо потік вектору через інтеграл по поверхні сфери:

$$N = \oiint_S \left(\overrightarrow{a}, \vec{n}^0\right) ds.$$

В даному випадку вектор $\vec{a}$ на поверхні сфери буде $\vec{a} = R\,\overrightarrow{r^0}$. Нормаль до поверхні співпадає з радіусом $\overrightarrow{n^0} = \overrightarrow{r^0}$. Тоді потік запишеться:

$$N = \oiint_S R\,ds = R \oiint_S ds = R\,S_{\text{сфери}} = 4\pi R^3.$$

Відповідно, задане поле таке, що його джерело знаходиться всередині сфери. ***Потік – додатне число.***

3.2 Дивергенція поля

Вивчення потоку вектору веде до іншого дуже важливого поняття векторного аналізу – дивергенції, або розходження поля [1-3, 5-7]. Це поняття дозволяє більш глибоко характеризувати властивість поля в кожній точці.

Нехай задано поле $\vec{a}(x, y, z)$:

$$\vec{a}(x, y, z) = a_x(x, y, z)\vec{i} + a_y(x, y, z)\vec{j} + a_z(x, y, z)\vec{k}.$$

Оберемо в цьому полі довільну точку $M(x, y, z)$. Оточимо її замкненою поверхнею S довільної форми, але такою, що відстані всіх її точок від М будуть малими. Об'єм, що знаходиться всередині поверхні, позначимо через ΔV. Запишемо потік вектору $\vec{a}$ через замкнену поверхню S та складемо відношення цього потоку до ΔV. Будемо і надалі стягувати поверхню S до точки М. Тоді об′єм ΔV буде зменшуватися.

Межу цього відношення назвемо дивергенцією або розрядженням поля в точці M(x, y, z).

Таким чином, дивергенцією або розрядженням вектору $\vec{a}(x, y, z)$ у фіксованій точці поля M(x, y, z) називається межа відношення потоку вектору $\vec{a}$ через замкнену поверхню, що описана навкруги точки М, до об'єму, який охоплює ця поверхня, коли останній прямує до нуля.

Запишемо:

$$div\ \vec{a} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oiint_S (\vec{a}, \vec{n}^0)\, ds}{\Delta V}. \qquad (3.10)$$

Дивергенція – скалярна величина. Вона характеризує ефективність джерела поля в обраній точці. Якщо вона додатна, то в точці М та її нескінченно малій околиці є джерела векторних ліній. Якщо дивергенція від'ємна, то в точці М та її малій околиці є стоки поля., що поглинають векторні лінії. Якщо дивергенція дорівнює нулю, то в точці М та її малій околиці немає ні джерел, ні стоків поля.

З визначення дивергенції (3.10) слідує, що всі величини, що входять до неї, пов'язані з самим полем і не залежать від прийнятої системи координат.

Таким чином, дивергенція в кожній точці поля є інваріантом поля. Вона характеризує внутрішні властивості самого поля, визначається його структурою та зовсім не залежить від координатної системи.

Вираз дивергенції в символічній формі

В прямокутній системі координат дивергенція поля записується так:

$$div\,\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Наведемо ще дві формули:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k};$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

Порівнюючи три останні формули, отримаємо:

$$div\vec{a} = (\vec{\nabla}, \vec{a}\,). \qquad (3.11)$$

Таким чином, ***дивергенція поля $\vec{a}$ є скалярний добуток вектору $\vec{\nabla}$ та заданого вектору $\vec{a}$*** [1-3].

3.3. Теорема Остроградського-Гауса

При обчисленні потоку вектору часто зустрічаються певні труднощі.

Необхідно враховувати всі зміни поля на заданій поверхні та зміни нормалі до цієї поверхні.

В деяких випадках задача обчислень може бути полегшена, якщо поверхня виявиться замкненою.

Теорема Гауса-Остроградського стверджує, що замість подвійного інтегралу по замкненій поверхні $\oiint_S (\vec{a}, \vec{n}^0)\,ds$ можна обчислити потрійний інтеграл від $div\,\vec{a}$, що розповсюджений по об'єму D, який охоплюється поверхнею S [1-3, 5, 7].

Теорема

Потік вектору $\vec{a}$ через будь-яку замкнену поверхню дорівнює інтегралу від дивергенції цього вектору, взятому по об'єму D, який обмежений цією поверхнею:

$$\oiint_S \left(\vec{a}, \vec{n}^0\right) ds = \iiint_D div\, \vec{a}\, d\tau, \tag{3.12}$$

де τ - диференціал об'єму в декартовій системі координат:

$$d\tau = d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Доведення

Весь об'єм D розділимо допоміжними поверхнями на m частинок невеликих об'ємів $\Delta\tau_1, \Delta\tau_2, \ldots, \Delta\tau_m$. Ці об'єми обмежуються замкненими поверхнями S_1, $S_2, \ldots$, S_m. Всі об'єми $\Delta\tau_m$ та поверхні S_m, що їх оточують, можна розбити на два класи. В перший клас включимо ті $\Delta\tau_i$., які частиною своєї поверхні S_i утворюють зовнішню поверхню S всього об'єму D. Другий клас буде складатися лише з тих об'ємів $\Delta\tau_i$, поверхні S_i яких - тільки допоміжні.

Всередині кожного об'єму $\Delta\tau_i$.зафіксуємо точку M_i та запишемо для неї дивергенцію поля. За визначенням маємо:

$$div\, \vec{a}|_{M_i} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\oiint_{S_i} \left(\vec{a}, \vec{n}^0\right) ds}{\Delta\tau_i}.$$

З цього рівняння за визначенням межі слідує:

$$\frac{\oiint_{S_i} \left(\vec{a}, \vec{n}^0\right) ds_i}{\Delta\tau_i} = div\, \vec{a}|_{M_i} + \varepsilon_i,$$

де ε_i – деяка мала величина.

Останнє рівняння запишемо інакше:

$$\oiint_{S_i} \left(\vec{a}, \vec{n}^0\right) ds_i = div\, \vec{a}|_{M_i} + \varepsilon_i \Delta\tau_i. \tag{3.13}$$

Якщо записати співвідношення (3.13) для всіх m об'ємів $\Delta\tau_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, то склавши їх, отримаємо:

$$\sum_{i=1}^{m} \oiint_{S_i} \left(\vec{a}, \vec{n}^0\right) ds_i = \sum_{i=1}^{m} \left[div\, \vec{a}|_{M_i}\right] \Delta\tau_i + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i\, \Delta\tau_i \ . \tag{3.14}$$

Розглянемо ліву частину рівняння (3.14).

Ця сума дорівнює лівій частині рівняння (3.12), тобто $\oiint_S \left(\vec{a},\vec{n}^0\right) ds$, де інтегрування проводиться тільки по зовнішній поверхні S, яка охоплює весь об'єм D (рис. 3.3). Дійсно, всі елементи S_i другого класу взаємно знищуються. Кожному $\overrightarrow{n_k^0}$ знайдеться $(-\overrightarrow{n_t^0})$, і такі пари знищуються. Вектор-функція $\vec{a}$ визначається на поверхні i , природно, вона однакова в k-тій і в t-тій комірках допоміжних поверхонь. В елементах першого класу залишаться тільки ті S_i, які торкаються до зовнішньої поверхні об'єму Д, та не мають сусідніх об'ємів $\Delta\tau_i$.

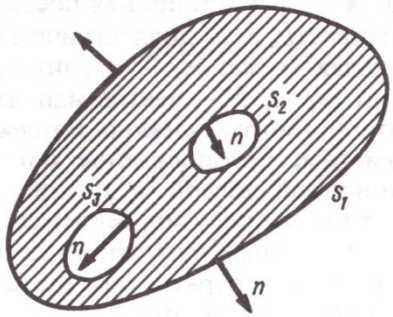

Рис. 3.3 До теореми Остроградського-Гауса [2]

Розглянемо праву частину рівняння (3.14).

Нехай $m \to \infty$ коли $\Delta\tau_i = 0$. Перший доданок за визначенням є потрійним інтегралом, а другий доданок – нескінченно мала величина в крайньому випадку четвертого порядку. Таким чином права частина дорівнює

$$\iiint_{Д} div\ \vec{a}\ d\tau.$$

Порівнюючи ліву та праву частини отримаємо рівняння (3.12) – формулу Гауса-Остроградського. Справедливість її очевидна з наступних міркувань.

В лівій частині визначаються векторні лінії, що виникають або поглинаються всередині об'єму D. Права частина підраховує спроможність кожного елементу всередині об'єму D. Величини в лівій і правій частинах формули однакові.

Аналітична формула Гаусса -Остроградського легко може бути представлена у виді:

$$\oiint_S \left[a_x cos\left(\widehat{\vec{n},x}\right) + a_y cos\left(\widehat{\vec{n},y}\right) + a_z cos\left(\widehat{\vec{n},z}\right)\right] ds =$$

$$= \iiint_D \left[\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right] d\tau.$$

Якщо покласти $a_x = P(x, y, z)$, $a_y = Q(x, y, z)$, $a_z = R(x, y, z)$, де записані три функції неперервні, диференційовані, їхні перші похідні неперервні, то отримаємо формулу перетворення подвійного інтегралу по замкненій поверхні в потрійний, який розповсюджений по об'єму, обмеженому цією поверхнею. Природно, справедливе і обернене перетворення (тривимірного інтегралу у двовимірний).

3.4. Лінійний інтеграл вектору-функції

Важливим елементом для вивчення векторних полів є поняття про лінійний інтеграл вектору. Нехай задане поле:

$$\vec{a}(x, y, z) = a_x(x, y, z)\vec{i} + a_y(x, y, z)\vec{j} + a_z(x, y, z)\vec{k} \qquad (3.15)$$

та проведена лінія. На цій лінії візьмемо дві точки A і B (рис. 3.4.). Розділимо ділянку лінії від A до B на n частинок.

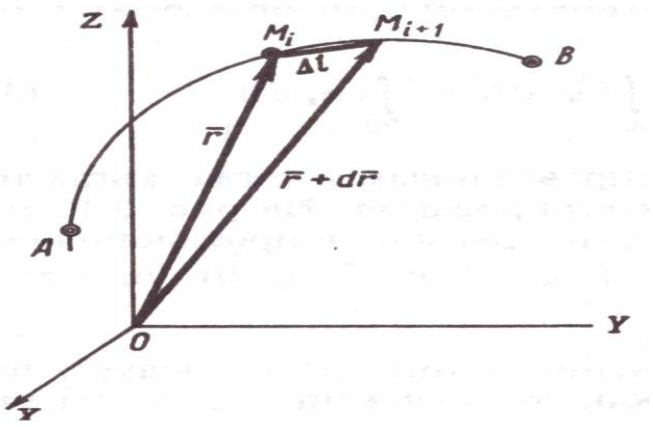

Рис. 3.4. До лінійного інтегралу вектор-функції [2]

Точки поділу позначимо $M_1,\ M_2,\ldots,\ M_{n-1}$. Обхід здійснюємо від точки А до точки В. Якщо число n досить велике, то елемент лінії M_iM_{i+1} можна розглядати як прямолінійний та описати його вектором $\overrightarrow{M_iM_{i+1}} = \overrightarrow{\Delta l_i}$. Для кінцевих точок А і В введемо нові позначення M_0 і M_n. Всередині відрізка Δl_i зафіксуємо точку та для неї запишемо вектор $\vec{a}_i$. Тепер складемо суму скалярних добутків.

$$\sum_{i=0}^{n-1}(\vec{a}_i\ \overrightarrow{\Delta l_i}) \qquad (3.16)$$

Відзначимо, що якщо $\vec{a}(x,y,z)$ – силове поле, то сума (3.32) є робота на ділянці обраної лінії між точками А і В.

Якщо збільшувати число поділок, то розміри Δl_i зменшуються. Межа суми (3.16) за визначенням є лінійний інтеграл вектору $\vec{a}(x,y,z)$ вздовж лінії АВ. Запишемо

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}(\vec{a}_i\ \overrightarrow{\Delta l_i}) = \int_{AB}\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{dl}. \qquad (3.16\ а)$$

Якщо лінія АВ виявиться замкненою, тобто точка В, переміщуючись по кривій від точки А, знову співпаде з А, то така лінія буде називатися контуром. Інтеграл (3.16 а) називається циркуляцією вектору $\vec{a}$ вздовж контуру С по позначається:

$$\oint_C \vec{a}, d\vec{l}. \qquad (3.16\ б)$$

Якщо лінію можна задати векторним рівнянням, точки на ній будуть визначатися своїми радіус-векторами

$$\overrightarrow{R} = \vec{R}(t). \qquad (3.17)$$

В цьому випадку елемент лінії $d\vec{l}$ співпаде з вектором $d\vec{R}$, який направлений по дотичній до годографу (3.17). Отже вірно $d\vec{l} = d\vec{R}$ та $\int_{AB}(\vec{a}, d\vec{l})$.

Якщо вектор $\vec{a}$ представлений як у виразі (3.15), то вектор

$$d\vec{l} = d\vec{R} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

і лінійний інтеграл (3.16 а) запишеться таким чином:

$$\int_{AB}(\vec{a}, d\vec{l}) = \int_{AB}(\vec{a}, d\vec{R}) = \int_{AB}(a_x dx + a_y dy + a_z dz). \quad (3.18)$$

В декартовій системі координат обчислення лінійного інтегралу вектору-функції (3.16 а) зводиться до обчислення криволінійного інтегралу скалярної функції (3.18) [1, 2, 6].

Властивості лінійного інтегралу

1. При зміні напрямку інтегрування вздовж лінії AB на зворотній інтеграл змінює тільки знак:

   $$\int_{AB}(\vec{a}, d\vec{l}) = -\int_{BA}(\vec{a}, d\vec{l}). \quad (3.19)$$

2. Нехай на шляху інтегрування зафіксована точка D (рис. 3.5), тоді справедливо

   $$\int_{AB}(\vec{a}, d\vec{l}) = \int_{AD}(\vec{a}, d\vec{l}) + \int_{DB}(\vec{a}, d\vec{l}). \quad (3.20)$$

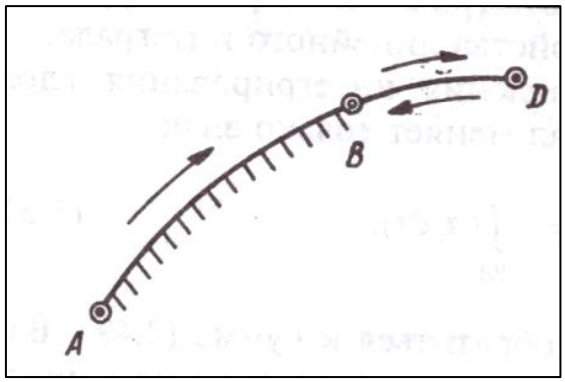

Рис. 3.5 До властивостей лінійного інтегралу [2]

Ця властивість є справедливою і у випадку, коли точка D перебуває за межами відрізку інтегрування. В цьому випадку ділянка BD проходиться двічі в протилежних напрямках і інтеграли $\int_{BD}(\vec{a}, d\vec{l})$ та $\int_{DB}(\vec{a}, d\vec{l})$ при додаванні взаємно знищуються.

3. Лінійний інтеграл залежить як від положення двох кінцевих точок, так і від виду шляху.

Розглянемо рівняння (3.18). Якщо змінилася форма шляху, то функції $a_x(x,y,z)$, $a_y(x,y,z)$ та $a_z(x,y,z)$ стануть іншими. Вони і змінять значення інтегралу. Слід відзначити, що існують таки векторні поля $\vec{a}(x,y,z)$, для яких лінійний інтеграл не залежить від виду шляху, а визначається лише положенням кінцевих точок. Але це вже властивість поля, а не лінійного інтегралу.

Задача

Обчислити циркуляцію вектору $\vec{P} = -\frac{y}{2}\vec{\imath} + \frac{x}{2}\vec{\jmath}$ вздовж контуру еліпсу з піввісями *а* і *в* в напрямку найкоротшого повороту від осі OX до осі OY.

Вид контуру та напрямок переміщення дозволяють записати рівняння еліпсу в параметричній формі: $x = a\cos t; \quad y = b\sin t$

та векторній формі: $\vec{R} = a\cos t\,\vec{\imath} + b\sin t\,\vec{\jmath}$. Запишемо диференціал радіус-вектору

$d\vec{R} = (-a\sin t\,\vec{\imath} + b\cos t\,\vec{\jmath})$ dt.

Якщо точка на еліпсі рухається від осі OX до осі OY та далі проти годинникової стрілки, то параметр t змінюється від 0 до 2π. Вихідний вектор $\vec{P}$ має вид:

$$\vec{P} = -\frac{1}{2}b\sin t\,\vec{\imath} + \frac{1}{2}a\cos t\,\vec{\jmath}.$$

Запишемо циркуляцію вектору $\vec{P}$:

$$\oint_C (\vec{P}, d\vec{l}) = \oint_C (\vec{P}, d\vec{R}) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (ab\sin^2 t + ab\cos^2 t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,dt = \pi\,a\,b.$$

3.5. Циркуляція вектору по контуру нескінченно малої площадки

Нехай задане поле вектору [2]:

$$\vec{a}(x,y,z) = a_x(x,y,z)\vec{i} + a_y(x,y,z)\vec{j} + a_z(x,y,z)\vec{k} \qquad (3.21)$$

В цьому полі закріпимо точку $M(x,y,z)$ та проведемо через неї площину довільного положення. В даній площині навколо точки M утворимо замкнений контур та оберемо напрямок обходу контуру. Обчислимо циркуляцію вектору $\vec{a}$ вздовж контуру C (рис. 3.6):

$$\oint_C (\vec{a}, dl) = \int_C a_x dx + \int_C a_y dy + \int_C a_z dz.$$

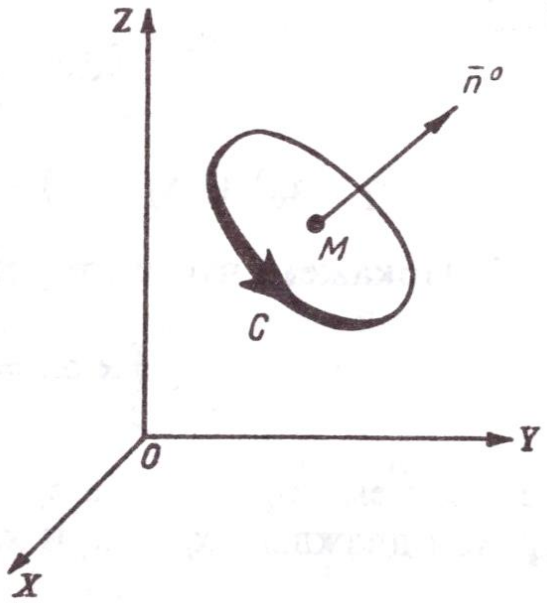

Рис. 3.6 Поле вектору

Розглянемо обчислення доданку $\int_C a_x(x,y,z)dx$. Підінтегральна функція має бути визначена на криволінійному контурі. В цьому конкретному випадку зафіксована точка $M(x,y,z)$. Тимчасово зробимо паралельний перенос системи координат в точку M. Тоді координати цієї точки - $M(0,0,0)$,

а всіх поточних точок на контурі С - $K(x,y,z)$. Функцію $a_x(x,y,z)$ треба представити в усіх поточних точках контуру. Розкладемо її в ряд:

$$a_x(x,y,z) = a_x(0,0,0) + \left(\frac{\partial a_x}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z}\right)_0 z + \varepsilon. \qquad (3.22)$$

В цьому рівнянні часткові похідні мають бути визначені в центральній точці $M(0,0,0)$. Запишемо

$$\oint_C a_x(x,y,z)\,dx = (a_x)_0 \oint_C dx + \left(\frac{\partial a_x}{\partial x}\right)_0 \oint_C x\,dx + \left(\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)_0 \oint_C y dx + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z}\right)_0 \oint_C z dx + \oint_C \varepsilon dx. \qquad (3.23)$$

Розглянемо кожний з інтегралів правої частини виразу (3.23).

1. Покажемо, що $\oint_C dx = 0$. Дійсно, на контурі С закріпимо послідовність точок $K_0, K_1, K_{2,\cdots,} K_{n-1}, K_0$. Початкова та кінцева точки співпали. Цим точкам відповідають послідовності $X_0, X_1, X_{2,\cdots,} X_{n-1}, X_0$. Тоді

$$\oint_C dx = \lim_{n\to\approx\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \Delta x_i = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_0 - x_{n-1}) = 0.$$

2. Покажемо, що й другий інтеграл дорівнює нулю. Запишемо

$$\oint_C x\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} x_k \Delta x_i.$$

В останньому рівнянні x_t деяка точка $x_i \le x_t \le x_{i+1}$. Перепишемо межовий перехід двічі: $x_t = x_i$ і $x_t = x_{i+1}$. Отримаємо

$$\oint_C x\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} x_i \Delta x_i \text{ та } \oint_C x\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1} \Delta x_i.$$

Складемо почленно ці співвідношення

$$2\oint_C x\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} + x_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} + x_i)(x_{i+1} - x_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \left(x_{i+1}^2 - x_i^2\right).$$

Розпишемо послідовно отриманий результат

$$2\oint_C x\,dx = (x_1^2 - x_0^2) + (x_2^2 - x_1^2) + (x_3^2 - x_2^2) + \cdots + (x_0^2 - x_{n-1}^2) = 0.$$

3. Обчислимо $\oint_C y\,dx$. В підінтегральній функції тільки дві змінні $X\ i\ Y$. Це дає підставу спроектувати контур С на площину XOY та розглядати циркуляцію по контуру C_z. Рисунок (рис. 3.7) є проекція контуру С, точка M_1 – проекція точки М, зроблено паралельний перенос системи координат. Доведемо, що

$$\oint_C y\,dx = \oint_{C_z} y\,dx = -\Delta S_z.$$

В даному рівнянні $-\Delta S_z$ – площа, що обмежена замкненим контуром C_z. Можна записати

$$\oint_C y\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta x_i.$$

Вісь OX (рис. 3.7) розділимо на n частинок та отримаємо n смуг. Будемо розглядати смуги в кожній чверті координатної системи. Добуток $y_i\Delta x_i$ – це площа смужки. Одна межа кожної смужки це вісь OX, інша межа – контур C_z. Поточна точка переміщується по контуру від осі OX в сторону осі OY та далі по колу. В першій і другій чвертях $y_i > 0$, але $\Delta x_i < 0$, отже, $y_i\Delta x_i < 0$. В третій і четвертій чвертях – навпаки. В кожній смужці $y_i < 0$, але $\Delta x_i > 0$. Відповідно, $y_i\Delta x_i < 0$. Таким чином, сумарна площа S_z має від'ємний знак.

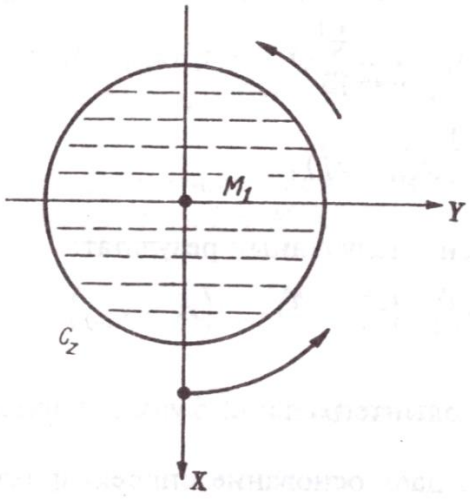

Рис.3.7 До обчисленні інтегралу $\oint_C y\,dx$ [2]

4. Аналогічно можна довести, що $\oint_{C_y} z\,dx = -\Delta S_y$, де C_y проекція контуру С на площину XOZ, ΔS_y – площа, що обмежена замкненим контуром C_y.

5. Неважко показати, що $\oint_C \varepsilon dx = \varepsilon_1$ – нескінченно мала порядку вище другого.

Підводячи підсумки можна записати

$$\oint_C a_x dx = -\left(\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)_0 \Delta S_z + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z}\right)_0 \Delta S_y + \varepsilon_1.$$

По аналогії, проводячи кругову перестановку літер x, y, z, x⋯, отримаємо

$$\oint_C a_y dy = -\left(\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)_0 \Delta S_x + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x}\right)_0 \Delta S_z + \varepsilon_2;$$

$$\oint_C a_z dz = -\left(\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)_0 \Delta S_y + \left(\frac{\partial a_z}{\partial y}\right)_0 \Delta S_x + \varepsilon_3.$$

Склавши почленно ці три рівняння, отримаємо шукану циркуляцію

$$\oint_C \vec{a}d\vec{l} = \left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}\right)_0 - \left(\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)_0\right]\Delta S_x + \left[\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}\right)_0 - \left(\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)_0\right]\Delta S_y + \left[\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}\right)_0 - \left(\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)_0\right]\Delta S_z + \varepsilon.$$

Введемо нормальний орт $\vec{n}^0$ до площинки ΔS. Він узгоджений з напрямком обходу контуру С за правилом правогвинтової системи координат. Тоді можна записати

$$\Delta S_x = \Delta S\cos(\widehat{nx});\ \ \Delta S_y = \Delta S\cos(\widehat{ny});\quad \Delta S_z = \Delta S\cos(\widehat{nz}).$$

В подальшому будемо опускати символ $(\ \ )_0$ та вважати, що похідні складових вектору відносяться до центральної точки, яка взята для вивчення поля:

$$\oint_C \vec{a}d\vec{l} = \left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}\right)_0 - \left(\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)_0\right]\cos(\widehat{nx}) + \left[\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}\right)_0 - \left(\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)_0\right]\cos(\widehat{ny}) + \left[\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}\right)_0 - \left(\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)_0\cos(\widehat{nz})\right]\Delta S + \varepsilon. \qquad (3.24)$$

3.6. Ротор вектору

Побудуємо в точці M(x, y, z)допоміжний вектор $\overrightarrow{W}$, такий, щоб проекції на координатні осі були рівні величинам, що стоять в круглих дужках рівняння (3.24):

$$W_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}; \quad W_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}; \quad W_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y};$$

$$\overrightarrow{W} = W_x\vec{\imath} + W_y\vec{\jmath} + W_z\vec{k}. \tag{3.25}$$

Назвемо цей вектор вихровим в точці $M(x, y, z)$ або вихором вектору $\vec{a}$ та позначимо $\overrightarrow{W} = rot\ \vec{a}$ (rotation, curl)

$$rot_n\ \vec{a} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_S \vec{a} \cdot d\vec{l}}{\Delta S} \tag{3.26}$$

$$rot\ \vec{a} = max \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_S \vec{a} \cdot d\vec{l}}{\Delta S} \cdot \vec{n} \tag{3.27}$$

$$rot\ \vec{a} = -\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \vec{a} \times d\vec{S}}{\Delta V} \tag{3.28}$$

Ротором функції є вектор, нормальні складові якого в контурі (поверхня ΔS) дорівнює межі відношення циркуляції вектора вздовж замкнутого контуру C, що обмежує площадку ΔS до величини цієї елементарної площадки, якщо остання прямує до нуля.

За визначенням з рівняння (3.27) слідує, що ротор вектору є вектор, що визначається як максимальне значення межі відношення циркуляції вектору по контуру C, що обмежує замкнену площадку, до площі цієї площадки, якщо остання прямує до нуля. Ротор співпадає з нормаллю до площі ΔS [2, 3, 5].

З рівняння (3.28) ротор вектору $\vec{a}$ визначається як межа відношення поверхневого інтегралу тангенціальних складових до величини об'єму V, обмеженого даною поверхнею, якщо останній прямує до нуля.

Вираз ротору в символічній формі

Нехай задане поле вектору $\vec{a}$. Запишемо формулу вихору цього поля через оператор «набла» та заданий вектор $\vec{a}$.

$$\overrightarrow{W} = rot\ \vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{k};$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\ ; \quad \vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}.$$

Порівняння цих формул показує, що [1-3, 6, 7]

$$\overrightarrow{W} = rot\ \vec{a} = \left[\vec{\nabla} \times \vec{a}\right] = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \qquad (3.29)$$

Нехай задана вектор-функція $\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$. Припустимо, що для цього поля можна знайти іншу функцію $\vec{b} = b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k}$, тоді справедливе співвідношення $\vec{a} = rot\ \vec{b}$. Вектор $\vec{a}$ називається полем вихорів вектору $\vec{b}$. Для такого поля завжди справедлива тотожність

$$div\ \vec{a} = div\ rot\ \vec{b} = 0. \qquad (3.30)$$

Цю теорему легко перевірити безпосереднім обчисленням. Нехай $rot\ \vec{b} = \overrightarrow{W}$. Знайдемо

$$W_x = \frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z}; \quad W_y = \frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x}; \quad W_z = \frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y}.$$

Оскільки $div\ \overrightarrow{W} = \frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z}$, необхідно знайти

$$\frac{\partial W_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 b_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 b_y}{\partial x \partial z}; \quad \frac{\partial W_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 b_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 b_z}{\partial y \partial x}; \quad \frac{\partial W_z}{\partial z} = \frac{\partial^2 b_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 b_z}{\partial z \partial y}.$$

Сума цих доданків дорівнює нулю. Тому тотожність (3.30) доведена.

3.7 Теорема Стокса

Циркуляція вектору поля вздовж замкненого контуру дорівнює потоку ротора цього вектору через поверхню, що спирається на цей контур [1-3,5, 7].

$$\oint_l \vec{a}d\vec{l} = \int_S rot\vec{a}ds. \qquad (3.31)$$

Ця теорема справедлива за умови кінцевості та неперервності вектору поля разом зі своїми першими похідними на поверхні S, включаючи контур l. Тобто поверхня може бути різною, а результат все одно той самий.

Доведення:

Нехай поверхня S охоплена контуром l. Розіб'ємо площу S на елементарні площинки. Кількість розбиттів оберемо таким чином, щоб контур l був описаний з будь-якою наперед заданою точністю. Обхід виберемо по ходу годинникової стрілки. Розглянемо окремо і-тий контур. Згідно визначення ротора будемо мати

$$\oint_{l_i} \vec{a_i}d\vec{l} = \text{rot}\,\vec{a}d\vec{S_i} = \oint_{l_i} \vec{a}\,d\vec{l}.$$

Зробимо підсумування лівої та правої частин рівняння та розповсюдимо результат на всю поверхню.

$$N = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} rot\vec{a}d\vec{S_i} = \int_S rot\vec{a}dS.$$

Обчислимо другу граничну межу

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \oint_{l_i} \vec{a}d\vec{l} = \oint_l \vec{a}d\vec{l}.$$

Справедливість останнього рівняння підтверджується тим, що при обчисленні циркуляції вздовж елементарних площинок S_i складові інтегралу на ділянках, що перекриваються, компенсуються у зв'язку з протилежними

шляхами обходу нескомпенсованими залишаються тільки зовнішні ділянки контуру. Прирівнюючи два останніх рівняння, впевнюємося, що теорема доведена.

Теорема Стокса представляє собою тотожне математичне перетворення інтегралу по замкненому контуру в поверхневий інтеграл, яка справедлива для довільного вектора, кінцевого та неперервного на заданій поверхні S, включаючи контур l разом зі своїми першими похідними. В математичному аналізі вона відома під назвою формула Стокса, яка виражається таким чином:

Якщо P=P(x, y, z), Q=Q(x, y, z) і R=R(x,y,z), які є неперервними кінцевими разом зі своїми першими похідними, то справедливо:

$$\oint_l [Pdx + Qdy + Rdz] == \iint_S \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdz\right]. \quad (3.32)$$

4. СИМВОЛІЧНІ МЕТОДИ

4.1 Оператор Гамільтона. Векторні диференціальні операції другого порядку. Просторові похідні від добутку.

$\vec{\nabla}$ (набла) – символічний оператор зі складовими по осям [1-3, 5]:

$$\left.\begin{array}{l} \nabla_x = \frac{\partial}{\partial x};\ \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y};\ \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z} \\ \nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \end{array}\right\} \qquad (4.1)$$

Це аналог оператора диференціювання в звичайному аналіз. Множення оператора Гамільтона на скалярний або векторний добуток функції точки визначає просторове диференціювання.

Вирази основних диференціальних операцій векторного аналізу через оператор Гамільтона здійснюється за правилами векторної алгебри

1. $\vec{\nabla}\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} = grad\ \varphi.$

   $$\vec{\nabla}\varphi = grad\ \varphi \qquad (4.2)$$

2. $\vec{\nabla}\vec{a} = \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = div\vec{a}.$

   $$\vec{\nabla}\vec{a} = div\vec{a} \qquad (4.3)$$

3. $\vec{\nabla} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \nabla_x & \nabla_y & \nabla_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = rot\vec{a}.$

   $$\vec{\nabla} \times \vec{a} = rot\vec{a}. \qquad (4.4)$$

4. Градієнт векторного поля виражається через оператор набла наступним чином:

   $$\left(\vec{a}\vec{\nabla}\right)\vec{b} = (\vec{a}\,grad\,)\vec{b} = \vec{a}\frac{\partial\vec{b}}{\partial\vec{a}}. \qquad (4.5)$$

4.2. Векторні диференціальні операції другого роду

В теорії поля велике значення мають обчислення векторних операцій диференціювання другого роду [2]. До цього класу відносяться наступні операції:

$$rot(grad\varphi);$$
$$div\ (rot\vec{a});$$
$$rot\ rot\vec{a};$$
$$grad\ div\ \vec{a}.$$

При їх обчисленні зручно використовувати $\vec{\nabla}$. При цьому має місце наступне правило:

Якщо у вираз, який підлягає диференціюванню, входить один єдиний дійсний скаляр або вектор, то застосування ∇ та диференціювання виразів здійснюється за правилами векторної алгебри.

1. $rot\ grad\ \varphi = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\varphi) = 0,$ (4.6)

Тобто ротор grad довільного скаляра тотожно дорівнює нулю.

Виконаємо цю операцію в декартових координатах

$$rot\ grad\ \varphi = rot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)$$
$$= \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}\right)\vec{\jmath} +$$
$$+ \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right)\vec{k} = 0.$$

2. $div\ rot\ \vec{a} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \times \vec{a}) \equiv 0.$ (4.7)

Обчислюємо цю операцію в декартових координатах.

$$div\ rot\ \vec{a} = \text{div}[(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z})\vec{\imath} + (\frac{\partial a_x}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z})\vec{\jmath} + (\frac{\partial a_y}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial y})\vec{k}] =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial a_x}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial a_y}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial y}) =$$
$$= \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 a_y}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial z\partial y} =$$

$$=\frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial y}-\frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial y \partial z}-\frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial z \partial x}-\frac{\partial^2 a_x}{\partial z \partial y}=0.$$

3. Скалярний лапласіан

$$div\ grad\ \varphi=\ \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\varphi\right)=\left(\vec{\nabla}\vec{\nabla}\right)\varphi=\nabla^2\varphi=\Delta\varphi \qquad (4.8)$$

$$div\ grad\ \varphi=\Delta\varphi.$$

$$\Delta=\vec{\nabla}\vec{\nabla}=\nabla_x\nabla_x+\nabla_y\nabla_y+\nabla_z\nabla_z=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Якщо ми застосуємо лапласіан до скалярної функції точки U(M), то

а)$\Delta U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$.

б) $\Delta U=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ – циліндрична система координат

в) $\Delta U=\frac{1}{R^2}[\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial U}{\partial R}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\ \ U}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial\ \ U}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}$ – сферична система координат.

Інваріантне визначення оператора Лапласа

$$div\ grad\ U=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \overrightarrow{grad}U d\vec{S}}{\Delta V}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \frac{\partial U}{\partial n}d\vec{S}}{\Delta V}, \qquad (4.9)$$

г) $$\Delta U=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \frac{\partial U}{\partial n}d\vec{S}}{\Delta V}. \qquad (4.10)$$

4. Векторний лапласіан

а) $\vec{a}=\Delta(a_x\vec{\imath}+a_y\vec{\jmath}+a_z\vec{k})=\ \Delta a_x\vec{\imath}+\Delta a_y\vec{\jmath}+\Delta a_z\vec{k}.$ (4.11)

Векторний лапласіан – геометрична сума лапласіанів в складі:

$\Delta a_x=\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}$;

$\Delta a_y=\frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2}$;

$\Delta a_z=\frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}$.

б) $\Delta\vec{a}=\frac{\partial^2\vec{a}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec{a}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\vec{a}}{\partial z^2}$

5.$rot\ rot\ \vec{a} = \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right).$ (4.12)

Розкриємо його за правилом подвійного векторного добутку:

$\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = \vec{y}(\vec{x} \cdot \vec{z}) - \vec{z}(\vec{x} \cdot \vec{y}).$

в) $rot\ rot\ \vec{a} = \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\vec{a}\right) - \nabla^2\vec{a} = grad\ div\vec{a} - \Delta\vec{a}$

$rot\ rot\ \vec{a} = \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right) = grad\ div\vec{a} - \Delta\vec{a}.$ (4.13)

г) $\Delta\vec{a} = \ grad\ div\vec{a} - \ rot\ rot\ \vec{a}.$ (4.14)

Остання формула представляє собою інваріант векторного лапласіана.

4.3 Просторові похідні від добутку скалярних і векторних функцій.

Такі операції застосовуються, як правило, за допомогою оператору набла. При цьому діють наступні правила: якщо в рівнянні, до якого застосовується оператор ∇, входить декілька дійсних скалярних або векторних функцій, наприклад, (X, Y, Z), то оператор ∇ застосовується до кожної з цих функцій та результати застосування складаються [2]:

$$\vec{\nabla}(X, Y, Z) = \vec{\nabla}\left(\check{X}, Y, Z\right) + \vec{\nabla}\left(X, \check{Y}, Z\right) + \vec{\nabla}\left(X, Y, \check{Z}\right)$$

Після цього отримане рівняння перетворюється за правилом векторної алгебри таким чином, щоб після оператора «набла» стояла функція, до якої він застосовується.

Користуючись правилом, можна виконати шість основних операцій над скалярними та векторними функціями. Розглянемо їх:

1. $grad\ (\varphi\psi) = \vec{\nabla}(\varphi\psi) = \vec{\nabla}(\check{\varphi}, \psi) + \vec{\nabla}(\varphi, \check{\psi}) = \psi\left(\vec{\nabla}\varphi\right) + \varphi\left(\vec{\nabla}\psi\right) =$
   $\psi grad\varphi + \varphi grad\psi;$ (4.15)
2. $div(\varphi \cdot \vec{a}) = \vec{\nabla}(\varphi\vec{a}) = \vec{\nabla}(\check{\varphi}\vec{a}) + \vec{\nabla}\left(\varphi\check{\vec{a}}\right) = \left(\vec{\nabla}\varphi\right)\vec{a} + \varphi\left(\vec{\nabla}\vec{a}\right) =$
   $grad\varphi\vec{a} + \varphi \cdot div\vec{a}$

$$div(\varphi \cdot \vec{a}) = grad\varphi \cdot \vec{a} + \varphi \cdot div\vec{a}. \quad (4.16)$$

3. $rot\ (\varphi \cdot \vec{a}) = \vec{\nabla} \times (\varphi\vec{a}) = \vec{\nabla} \times (\breve{\varphi}\vec{a}) + \vec{\nabla} \times \left(\varphi\breve{\vec{a}}\right) = \left(\vec{\nabla}\varphi\right) \times \vec{a} + \varphi \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right) = grad\varphi \times \vec{a} + \varphi \cdot rot\vec{a}$

$$rot\ (\varphi \cdot \vec{a}) = grad\varphi \times \vec{a} + \varphi \cdot rot\vec{a}. \quad (4.17)$$

4. $div\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{\nabla}\left(\breve{\vec{a}} \times \vec{b}\right) + \vec{\nabla}\left(\vec{a} \times \breve{\vec{b}}\right) = \vec{b}\left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right) - \vec{a}\left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right) = \vec{b} \cdot rot\vec{a} - \vec{a} \cdot rot\vec{b}$ (при цьому застосовується правило кругової перестановки векторів)

$$div\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{b} \cdot rot\vec{a} - \vec{a} \cdot rot\vec{b}. \quad (4.18$$

5. $grad\ \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \vec{\nabla}\left(\breve{\vec{a}} \cdot \vec{b}\right) + \vec{\nabla}\left(\vec{a} \cdot \breve{\vec{b}}\right)$

$\vec{\nabla}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$, для тлумачення цього виразу розглянемо наступне відношення

$\vec{b} \times \left(\vec{a} \times \vec{\nabla}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{b} \cdot \vec{a}\right) - \vec{a}\left(\vec{b} \cdot \vec{\nabla}\right) = \vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = \vec{y}(\vec{x} \cdot \vec{z}) - \vec{z}(\vec{x} \cdot \vec{y}) = \vec{\nabla}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) - \left(\vec{b} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{a}$, тоді

$\vec{a} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{b}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) - \vec{b}\left(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) - \left(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{b}$, тоді

$$\vec{\nabla}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{b} + \vec{a} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{b}\right)$$

$$grad\ \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \vec{\nabla}\left(\breve{\vec{a}} \cdot \vec{b}\right) + \vec{\nabla}\left(\vec{a} \cdot \breve{\vec{b}}\right)$$

$$= \left(\vec{b} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{a} + \left(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{b} + \vec{b} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right) + \vec{a} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{b}\right)$$

$$= \left(\vec{b}grad\right)\vec{a} + (\vec{a}grad)\vec{b} + \vec{b} \times rot\vec{a} + \vec{a} \times rot\vec{b}$$

6. $rot\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{\nabla} \times \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{\nabla} \times \left(\breve{a} \times \vec{b}\right) + \vec{\nabla} \times \left(\vec{a} \times \breve{b}\right)$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{a}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{b}\right) - \vec{b}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}\right) = \left(\vec{b} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{a} - \vec{b}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}\right)$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{a}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{b}\right) - \left(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{b}$$

$rot\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \left(\vec{b} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{a} - \left(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{b} - \vec{b}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}\right) + \vec{a}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{b}\right) = \left(\vec{b}grad\right)\vec{a} - (\vec{a}grad)\vec{b} - \vec{b} \cdot div\vec{a} + \vec{a} \cdot div\vec{b}$ (4.20)

5. ФОРМУЛИ ГРІНА

5.1. Інтегральні співвідношення в векторному полі

Теорема Гріна. Вона легко отримується з теореми Гауса-Остроградського [2, 3, 7]

$$\int_V div\,\vec{a}\,dV = \oint_S \vec{a}\cdot d\vec{S} \tag{5.1}$$

Будемо враховувати, що вектор $\vec{a}$ може бути представлений:

$$\vec{a} = \psi grad\varphi, \tag{5.2}$$

де ψ і φ – кінцеві та неперервні функції, включаючи їхні перші та другі похідні. Користуючись теоремою Гаусса – Остроградського, виразимо вектор $\vec{a}$ через заміну:

$$\vec{a} = \psi grad\varphi.$$

Тоді будемо мати:

$$div\,\vec{a} = div\,(\psi grad\varphi) = grad\,\psi\cdot grad\varphi + \psi\cdot divgrad\varphi = \psi\Delta\varphi + grad\,\psi\cdot grad\varphi. \tag{5.3}$$

Представимо вектор $\vec{a}$ у вигляді:

$$\begin{cases} \vec{a} = \psi grad\varphi = \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} \\ a_n = \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} \end{cases} \tag{5.4}$$

Підставимо (3) і (4) в формулу (1) та отримаємо:

$$\int_V [\psi\Delta\varphi + grad\,\psi\cdot grad\varphi]dV = \oint_S \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS. \tag{5.5}$$

Останній інтеграл носить назву першої формули Гріна.

Нехай тепер

$$\vec{a} = \varphi grad\,\psi. \tag{5.6}$$

За аналогією будемо мати:

$$\int_V [\varphi\Delta\psi + grad\varphi \cdot grad\,\psi]dV = \oint_S \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}dS. \tag{5.7}$$

Обчислимо різницю рівнянь (5) і (7):

$$\int_V [\psi\Delta\varphi - \varphi\Delta\psi]\,dV = \oint_S \left[\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right]dS. \tag{5.8}$$

Останнє рівняння носить назву другої формули Гріна. Перша і друга формули - це сукупність теореми Гріна. В цьому випадку беруть три поверхневих інтеграли та додатною вважається зовнішня поверхня. Особливий інтерес представляють два випадки.

1. $\psi = const$, тоді обидві формули дають наступний результат

$$\int_V \Delta\varphi\,dV = \oint_S \frac{\partial\varphi}{\partial n}dS. \tag{5.9}$$

Рівняння (5.9) дає можливість отримати незалежне інваріантне визначення скалярного лапласіану. Нехай поверхня S охоплює об'єм V. Будемо вважати, що ΔV – абсолютно малий об'єм, тоді $\Delta\varphi = const$.

В такому випадку рівняння (5.9) набуде вигляду:

$$\Delta\varphi\int_V dV = \int_V \Delta\varphi dV = \Delta\varphi\Delta V = \oint_S \frac{\partial\varphi}{\partial n}dS.$$

Переходячи до кінцевих відношень, отримаємо:

$$\Delta\varphi = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \frac{\partial\varphi}{\partial n}dS}{\Delta V}. \tag{5.10}$$

Остання формула є інваріантним визначенням скалярного лапласіану.

2. $\varphi = \psi$. В цьому випадку перша формула Гріна дає такий результат:

$$\int_V [\varphi\Delta\varphi + (grad\varphi)^2]dV = \oint_S \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS. \tag{5.11}$$

5.2 Об’ємний інтеграл від градієнту

$$\int_V \ grad\varphi \, dV = \oint_S \ \varphi d\vec{S}. \qquad (5.12a)$$

Помножимо ліву та праву частини останньої формули на постійний вектор $\vec{c}$:

$$\vec{c} \int_V \ grad\varphi \, dV = \vec{c} \oint_S \ \varphi d\vec{S} \qquad (5.12)$$

та розглянемо вираз:

$$\vec{c} \int_S \ \varphi \, d\vec{S} = \oint_S \ (\varphi\vec{c}) d\vec{S}.$$

За теоремою Гаусса-Остроградського будемо мати:

$$\int_V \ div\,(\varphi\vec{c}) dV = \int_V \ [grad(\varphi\vec{c}) + \varphi \cdot div\vec{c}] dV,$$

проте $\vec{c} = const$, відповідно $div\vec{c} = 0$, і тоді

$$\int_V \ div\,(\varphi\vec{c}) dV = \int_V \ grad\varphi \cdot \vec{c} \, dV = \vec{c} \int_V \ grad\varphi \, dV.$$

Таким чином, формула (12) доведена. Вона може бути покладена в основу нового інваріантного визначення градієнту через поверхневий інтеграл. Нехай ΔV таке, що $grad\varphi = const$, тоді

$$\int_V \ grad\varphi \, dV = grad\varphi \int_V \ dV = grad\varphi \Delta V = \oint_S \ \varphi d\vec{S}.$$

Поділивши обидві частини останнього рівняння на ΔV та переходячи до визначених меж, отримаємо:

$$grad\varphi = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \ \varphi d\vec{S}}{\Delta V}, \qquad (5.13)$$

5.3 Об’ємний інтеграл від ротора

Доведемо теорему [2]:

$$\int_V \ rot\,\vec{a} \, dV = -\oint_S \ \vec{a} \times d\vec{S}, \qquad (5.14)$$

яка дає зв’язок об’ємного інтегралу в об’ємі V, що обмежений поверхнею S, з поверхневим інтегралом тангенціальних складових. Для доведення теореми,

що виражена рівнянням (14), помножимо її праву та ліву частини на постійний вектор $\vec{c}$:

$$\vec{c}\int_V rot\,\vec{a}\,dV = \int_V \vec{c}\cdot rot\,\vec{a}\,dV = \int_V div(\vec{a}\times\vec{c})\,dV.$$

Розглянемо наступний вираз:

$$div(\vec{a}\times\vec{c}) = \vec{c}\cdot rot\vec{a} - \vec{a}\cdot rot\vec{c}.$$

Тоді за теоремою Гаусса-Остроградського

$$\int_V div(\vec{a}\times\vec{c})\,dV = \oint_S (\vec{a}\times\vec{c})\,d\vec{S} = -\oint_S \vec{c}\left(\vec{a}\times d\vec{S}\right) = -\vec{c}\oint_S \vec{a}\times d\vec{S}.$$

Якщо скоротити на постійний вектор $\vec{c}$, то отримаємо

$\int_V rot\,\vec{a}\,dV = -\oint_S \vec{a}\times d\vec{S}$, що й треба довести.

Ця формула може бути покладена в основу інваріантного визначення ротора через поверхневий інтеграл тангенціальних складових.

Розглянемо малий елемент об'єма V, в межах якого ми можемо вважати $rot\,\vec{a}$ постійним. Тоді

$$\int_V rot\,\vec{a}\,dV = rot\,\vec{a}\int_V dV = rot\,\vec{a}\Delta V = -\oint_S \vec{a}\times d\vec{S}.$$

Поділивши останнє рівняння на ΔV, та переходячи до межових співвідношень при $\Delta V \to 0$, отримаємо

$$rot\,\vec{a} = -\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \vec{a}\times d\vec{S}}{\Delta V}. \qquad (5.15)$$

Вираз (15) це об'ємний інтеграл від ротору.

5.4 Інтеграл по замкненому контуру від скаляру

$$\oint_l \varphi\cdot d\vec{l} = -\int_S grad\varphi\times d\vec{S}. \qquad (5.16)$$

Помножимо праву і ліву частини рівняння на постійний вектор $\vec{c}$:

$$\vec{c}\oint_l \varphi\cdot d\vec{l} = \oint_l (\varphi\cdot\vec{c})\,d\vec{l}.$$

Розглянемо,

$$rot(\varphi\cdot\vec{c}) = grad\varphi\times\vec{c} + \varphi\cdot rot\vec{c} = grad\varphi\times\vec{c}.$$

Застосуємо до останнього інтегралу теорему Стокса [1-3]:

$\int_l (\varphi \cdot \vec{c}) d\vec{l} = \int_S rot\,(\varphi \cdot \vec{c}) d\vec{S} = \int_S (grad\varphi \times \vec{c}) d\vec{S} = -\int_S \vec{c}\big(grad\varphi \times d\vec{S}\big) = -\vec{c}\int_S grad\varphi \times d\vec{S}.$

Скорочуючи на вектор $\vec{c}$, отримаємо:

$\oint_l \varphi \cdot d\vec{l} = -\int_S grad\varphi \times d\vec{S}$, що й треба довести.

6. ПРЯМА І ОБЕРНЕНА ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

В теорії поля розрізняють дві основні задачі, які відносяться до синтезу та аналізу векторних полів.

Пряма задача теорії поля полягає у визначенні векторного поля за його заданими джерелами, а саме, джерелом та вихором $q(\vec{r})$ $\vec{V}(\vec{r})$.

$$\left.\begin{array}{l} div\ \vec{F}(\vec{r}) = q(\vec{r}) \\ rot\ \vec{F}(\vec{r}) = \vec{V}(\vec{r}) \end{array}\right\} \qquad (6.1)$$

Визначити вектор $\vec{F}(\vec{r})$, коли відомі джерела та вихори – це задача синтезу векторного поля за його джерелами та вихорами. З математичної точки зору пряма задача теорії поля приводить до перетворення та звернення (згортки) векторних операцій.

Обернена задача теорії поля зводиться до визначення джерел та вихорів поля за даним вектором поля як функції точок спостерігання.

Якщо заданий вектор $\vec{F}(\vec{r})$, необхідно визначити джерела та вихори, а саме збудники поля. Обернена задача розв'язується шляхом просторового диференціювання векторного поля. Вона відноситься до аналізу векторних полів.

Умова однозначного визначення векторного поля

$$div\ \vec{F}(\vec{r}) = q(\vec{r}) \qquad (6.2)$$

Нехай вектор $\overrightarrow{F_0}(\vec{r})$ – розв'язок рівняння (6.2).

$div\ \overrightarrow{F_0}(\vec{r})$ = div [$\overrightarrow{F_0}(\vec{r})$ + rot $\vec{U}$]= q($\vec{r}$),

оскільки $div\ rot\ U = 0$.

Тоді розв'язком рівняння (6.2) є

$$\overrightarrow{F}(\vec{r}) = \overrightarrow{F_0}(\vec{r}) + rot\ \vec{U}(\vec{r}).$$

Таким чином, завдання тільки джерел поля (вихорів поля) визначає це поле не однозначно, а з точністю до довільного соленоїдального вектору. Це слідує із змісту математичних операцій, наприклад з

$$rot\,\vec{F}(\vec{r}) = \vec{V}(\vec{r}) \qquad (6.3)$$

Припускаємо, що задані тільки вихори поля (6.3). Нехай вектор $\overrightarrow{F_0}(\vec{r})$ – розв'язок рівняння (6.3). Тоді

$$rot\,\vec{F}(\vec{r}) = rot\left[\overrightarrow{F_0}(\vec{r}) + grad\,\varphi(\vec{r})\right] = \vec{V}(\vec{r}).$$

$$rot\,grad\,\varphi(\vec{r}) = 0.$$

Таким чином, зі змісту математичних операціє випливає, що завдання тільки вихорів поля визначає це поле не однозначно, а з точністю до градієнту довільного скаляру.

Умова однозначності визначення поля витікає з теореми єдиності (однозначності).

Теорема єдиності

Розглянемо поле в обмеженій області простору (рис. 6.1)

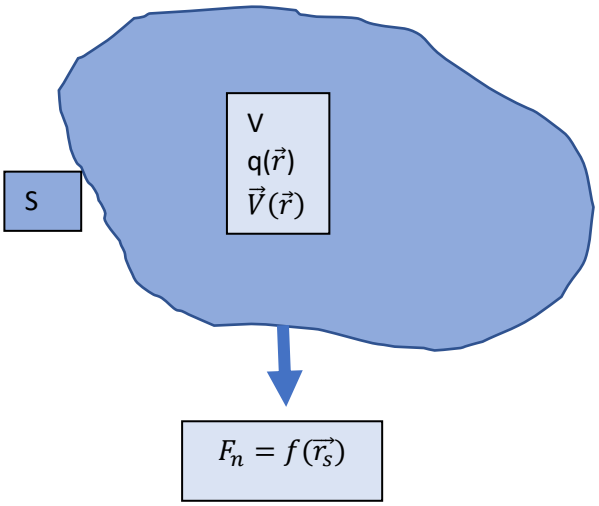

Рис. 6.1. До теореми єдиності

Припустимо, що в цій області задані функції

q($\vec{r}$) та $\vec{V}(\vec{r})$, а на межі області задано $F_n = f(\overrightarrow{r_s})$.

Нехай задана система

$$\left.\begin{array}{c} div\,\vec{F}(\vec{r}) = q(\vec{r}) \\ rot\,\vec{F}(\vec{r}) = \vec{V}(\vec{r}) \\ F(\overrightarrow{r_s})\vec{n} = F_n(\overrightarrow{r_s}) = f(\overrightarrow{r_s}). \end{array}\right\} \qquad (6.4)$$

Якщо в обмеженій частині простору задані витоки (джерела) та вихори поля (система (6.1)), а на межі області задана нормальна компонента поля (гранична умова (6.4)), то задача визначення векторного поля має єдиний розв'язок.

Припустимо, що нам відомі два розв'язки системи (1): $\overrightarrow{F_1}(\vec{r})$ та $\overrightarrow{F_2}(\vec{r})$ при виконанні умови (4).

Тоді

$$\begin{cases} div\ \vec{F}_1(\vec{r}) = q(\vec{r}) \\ rot\ \vec{F}_1(\vec{r}) = \vec{V}(\vec{r}) \\ \vec{F}_1(\overrightarrow{r_S})\vec{n} = f(\overrightarrow{r_S}) \end{cases} \tag{6.5}$$

$$\begin{cases} div\ \vec{F}_2(\vec{r}) = q(\vec{r}) \\ rot\ \vec{F}_2(\vec{r}) = \vec{V}(\vec{r}) \\ \vec{F}_2(\overrightarrow{r_S})\vec{n} = f(\overrightarrow{r_S}). \end{cases} \tag{6.6}$$

Виходить, що дві системи справедливі. Складемо різницеве співвідношення:

$$\begin{cases} div\ [\vec{F}_1(\vec{r}) - \vec{F}_2(\vec{r})] = 0 \\ rot\ \overrightarrow{[F_1}(\vec{r}) - \vec{F}_2(\vec{r})] = 0 \\ [\overrightarrow{F_1}(\overrightarrow{r_S}) - \overrightarrow{F_2}(\overrightarrow{r_S})]\vec{n} = 0. \end{cases} \tag{6.7}$$

Таким чином, різницевий вектор $[\overrightarrow{F_1}(\overrightarrow{r_S}) - \overrightarrow{F_2}(\overrightarrow{r_S})]$ визначає собою, виходячи з системи (6.7), безвихрове поле, яке позбавлене витоків. Його ми можемо визначити як градієнт довільного скаляру φ, тобто

$$\overrightarrow{F_1}(\overrightarrow{r_S}) - \overrightarrow{F_2}(\overrightarrow{r_S}) = grad\ \varphi(\vec{r})$$

$div\ grad\ (\vec{F}_1 - \vec{F}_2) = div\ grad\ \varphi(\vec{r}) = 0$, отже

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = 0. \tag{6.8}$$

Таким чином, функція (8) задовольняє рівнянню Лапласа.

Скористаємося І-ою формулою Гріна:

$$\int_V [\psi\Delta\varphi + grad\psi\ grad\varphi]dV = \oint_S \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS. \tag{6.9}$$

Покладемо в ній, що $\varphi = \psi$, тоді:

$$\int_V [\varphi\Delta\varphi + (grad\varphi)^2]dV = \oint_S \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS. \tag{6.9'}$$

Перевіримо, як результати розв'язку задовольняють формулі Гріна на межі області S:

$$\left[\overrightarrow{F_1}(\overrightarrow{r_S}) - \overrightarrow{F_2}(\overrightarrow{r_S})\right]\vec{n} = \frac{\partial\varphi(\overrightarrow{r_S})}{\partial n} = 0. \qquad (6.10)$$

Підставимо (6.8) і (6.10) у вираз (6.9'), тоді:

$$\int_V [(grad\varphi)^2]dV = \oint_S \left[\overrightarrow{F_1}(\overrightarrow{r_S}) - \overrightarrow{F_2}(\overrightarrow{r_S})\right]^2 dV. \qquad (6.11)$$

Величина $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ на поверхні S завжди дорівнює нулю, тому отримуємо умову (6.11). Інтеграл (6.11) тому у всіх випадках має дорівнювати нулю.

Оскільки умова (6.11) має бути справедлива для всіх S, що обмежують об'єм V, тоді

$\overrightarrow{F_1}(\overrightarrow{r_S}) = \overrightarrow{F_2}(\overrightarrow{r_S})$ – це тому, що підінтегральний вираз має бути рівним нулю, а це можливо тільки в цьому випадку.

Для коректності та визначеності даної задачі вихори та витоки (джерела) поля не можуть задаватися довільно.

З'ясуємо, які значення вони можуть набувати.

Звернемося до теореми Остроградського-Гаусса [1-3, 7]:

$$\int_V div\,\vec{F}(\vec{r})dV = \oint_S \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r_S})d\vec{S}.$$

$$\int_V q(\vec{r})dV = \oint_S f(\overrightarrow{r_S})d\vec{S}. \qquad (6.12)$$

Цій умові має задовольняти функція $q(\vec{r})$.

Обчислимо дивергенцію рівняння (6.2):

$$div\,rot\,\vec{F}(\vec{r}) = div\vec{V}(\vec{r}) = 0,$$

$$div\vec{V}(\vec{r}) = 0 \qquad (6.13)$$

Саме тому функція, що задає вихори поля, є ***<u>соленоїдальною</u>***

$$\int_V q(\vec{r})dV = \oint_S f(\overrightarrow{r_S})d\vec{S}.$$

$$div\vec{V}(\vec{r}) = 0$$

Визначення граничної умови в задачі (6.4) – істотне. Воно враховує джерела (витоки), що знаходяться в зовнішньому просторі. За умовами задачі функції $q(\vec{r})$ і $\vec{V}(\vec{r})$ взяті лише в середині області, що розглядається.

6.1 Постановки задачі. Згортки векторних функцій.

Задача (6.4) зводиться до розв'язку прямої задачі теорії поля.

Раціональним способом згортки векторних операцій є зведення їх до виду одного рівняння вектору $\vec{F}(\vec{r})$. Для досягнення цього обчислимо ротор другого рівняння системи (4):

$$rot\ rot\ \vec{F}(\vec{r}) = grad\ div\ \vec{F}(\vec{r}) - \Delta\vec{F}(\vec{r}) = \vec{V}(\vec{r}).$$

З першого рівняння підставимо значення div $\vec{F}(\vec{r})$:

$$\Delta\vec{F}(\vec{r}) = -rot\ \vec{V}(\vec{r}) + grad\ q(\vec{r}). \quad (6.15)$$

Рівняння (6.15) є диференціальним рівнянням другого порядку самого загального виду. В реальних фізичних полях, наприклад, електромагнітних вид цього рівняння ускладняється тим, що вихори поля є функціями самого вектору:

$$\vec{V}(\vec{r}) \leftrightarrows \vec{F}(\vec{r}).$$

Будемо розглядати лише часткові випадки згортки векторних операцій. Це можливо, коли права частина рівняння (6.15) відома:

$$\overrightarrow{W}(\vec{r}) = -rot\ \vec{V}(\vec{r}) + grad\ q(\vec{r}). \quad (6.16)$$

Тоді будемо мати векторне рівняння Пуассона:

$$\Delta\vec{F}(\vec{r}) = \overrightarrow{W}(\vec{r}) \quad (6.17)$$

В подальшому задача буде полягати у розробці найбільш раціональних шляхів згортки векторних операцій.

Розглянемо два найбільш важливих випадки:

- Потенціальні поля;
- Соленоїдальні поля.

6.2 Потенціальні поля

Розглянемо безвихрове поле джерел. Це поле визначимо наступним чином:

$$\left.\begin{array}{l} div\ \vec{F}(\vec{r}) = q(\vec{r}) \\ rot\ \vec{F}(\vec{r}) = \vec{V}(\vec{r}) = 0 \end{array}\right\} \quad (6.18)$$

Оскільки $\vec{V}(\vec{r}) \equiv 0$, то з рівняння (6.15) отримуємо:

$$\Delta\vec{F}(\vec{r}) = grad\ q(\vec{r}). \quad (6.19)$$

Задача згортки векторних операцій зводиться до інтегрування рівняння Пуассона [2, 3, 7]. Спробуємо три скалярні рівняння звести до одного. Задача може бути значно спрощена, якщо ввести до розгляду $U(\vec{r})$ – - функцію, яку будемо називати скалярним потенціалом.

$$\vec{F}(\vec{r}) = -grad\ U(\vec{r}). \quad (6.20)$$

Це можливо із змісту математичних операцій.

$$rot\ grad\ U(\vec{r}) \equiv 0.$$

Знак «-» - не принципово, а в результаті уявляємо, що ми спускаємося в поле зверху вниз, тобто прямуємо від точок з більшим потенціалом до меншого.

Підставимо рівняння (20) в перше рівняння системи (18).

$$div\ grad\ U(\vec{r}) = -q(\vec{r}) \quad (6.21')$$

$$\Delta U(\vec{r}) = -q(\vec{r}). \quad (6.21'')$$

Таким чином, ми приводимо задачу до інтегрування скалярного рівняння Пуассона. Для наближеного простору загальний інтеграл-рівняння Пуассона має вид:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{q(\vec{r})}{r}\,dV = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{div\,\vec{F}(\vec{r})}{r}\,dV\ . \quad (6.22)$$

де r – відстань від елемента об'єму, який вміщує виток (джерело) q, до даної точки.

Векторні поля, вихори яких дорівнюють нуля, називаються безвихровими або потенціальними. Це дуже важливий клас фізичних полів, яким притаманні визначені властивості.

I. Найважливішою властивістю потенціальних полів є рівність нулю циркуляції вектору поля по довільному замкненому контуру.

Скористаємося теоремою Стокса [1-3]:

$$\oint_l \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{l} = \int_S rot\vec{F}(\vec{r}) d\vec{s} = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\oint_l \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{l} = 0. \qquad (6.23)$$

Згідно з (6.23) безпосередньо слідує, що інтеграл по будь-якому контуру l_1 *і* l_2 між двома точками M_0 і M не залежить від шляху інтегрування (рис. 6.2).

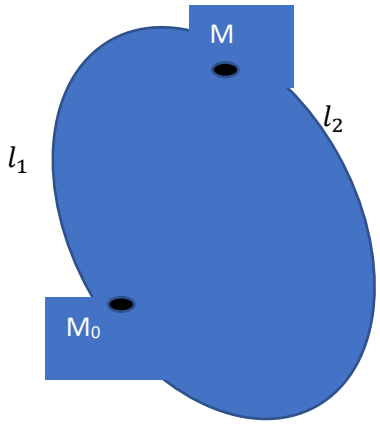

Рис. 6.2. До рівняння 6.23

Згідно (6.20) потенціал може бути визначений:

$$U(\vec{r}) = -\int_{M_0}^{M} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{l} = U(M) - U(M_0) \qquad (6.24)$$

Потенціал точки спостереження – це різниця потенціалів між цією точкою та точкою відліку M_0 $U(M_0)$=0, тобто це нескінченно віддалена точка.

Формула (6.24) представляє собою операцію згортки градієнту. Незалежність інтегралу (6.24) від шляху інтегрування є тільки властивістю однозв'язкових областей, тобто таких областей, для яких у всіх точках справедливо рівняння (6.18). Для інших областей ця властивість порушується.

Розглянемо для прикладу двозв’язкову область. Розглянемо будь-яку точку М та обчислимо інтеграл по замкненому контуру, при цьому l_1 охоплює l_2 (рис.6.3).

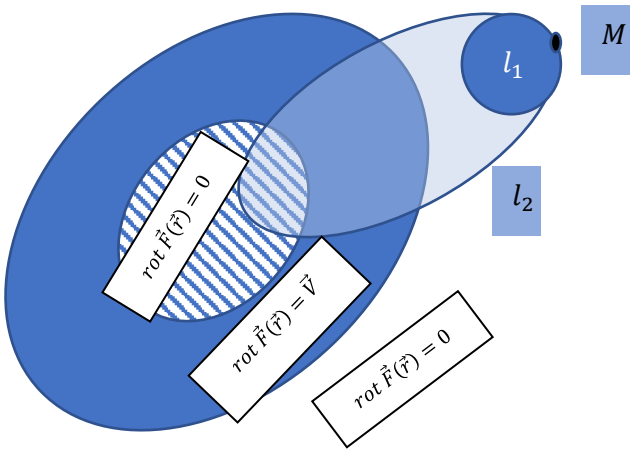

Рис. 6.3. Двозв’язкова область

Тоді

$$\oint_{l_1} \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{l} = 0,$$

$\oint_{l_2} \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{l} = \int_S rot\vec{F}(\vec{r}) d\vec{s} = \int_S \vec{V}(\vec{r}) d\vec{s} = I$, тобто $\oint_{l_2} \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{l} = I$

$$U(\vec{r}) = U(M) + nI$$

$U(M_0)=0$ (6.25)

Вираз (6.25) називається циклічним скалярним потенціалом [2, 3]. Цей потенціал – багатозначний. Для усунення його багатозначності в нього вводять «непроникні перегородки». На цій «перегородці» задають граничні умови.

Звернемося до рівняння (6.20):

$$\vec{F}(\vec{r}) = -grad\, U(\vec{r}) = -grad\, (U + C),$$

оскільки $grad\, C \equiv 0$, де С – адитивна постійна.

Потенціал визначається не однозначно, а з точністю до адитивної сталої, проте поле, визначене потенціалом, визначається однозначно.

Скалярний потенціал – умовна характеристика поля, яка спрощує математичні операції та дозволяє отримати поле шляхом просторового диференціювання. В реальних фізичних полях скалярний потенціал відповідає роботі поля. В загальному випадку скалярний потенціал фізичними властивостями не володіє.

6.3 Соленоїдальні поля

Розглянемо вихрове поле, що позбавлене витоків [2, 3]. Задамо його виразом:

$$div\vec{F}(\vec{r}) = 0$$

$$rot\vec{F}(\vec{r})=\vec{V}(\vec{r}) \qquad (6.27)$$

Результати інтегрування рівнянь (6.27) згідно (6.15) можуть бути представлені у вигляді:

$$\Delta\vec{F}(\vec{r})=\text{-rot}\vec{V}(\vec{r}) \qquad (6.28)$$

В загальному випадку рівняння (28) – векторне рівняння Пуассона [2, 3]. Спробуємо три рівняння звести до одного. Задача може бути істотно спрощена, якщо ввести до розгляду функцію $\vec{\mathrm{A}}(\vec{r})$, яку в подальшому будемо називати **вектор-потенціалом** [2]**:**

$$\vec{\mathrm{A}}(\vec{r}) = rot\,\vec{\mathrm{A}}(\vec{r}) \qquad (6.29)$$

Це можливо із змісту математичних операцій

$div\vec{F}(\vec{r})$ =div $rot\,\vec{\mathrm{A}}(\vec{r}) \equiv 0$.

Підставимо (29) у друге рівняння системи (27):

$$rot\vec{F}(\vec{r})=rot\;rot\,\vec{\mathrm{A}}(\vec{r}) = \vec{V}(\vec{r}) \qquad (6.30)$$

Розкриємо значення $rot\;rot\,\vec{\mathrm{A}}(\vec{r}) = \vec{V}$ за правилами векторної алгебри:

$$rot\;rot\,\vec{\mathrm{A}}(\vec{r})=\text{ grad div }\vec{\mathrm{A}}(\vec{r})\text{-}\Delta\vec{\mathrm{A}}(\vec{r}) = \vec{V}(\vec{r}). \qquad (6.31)$$

Це аналогічно:

grad div $\vec{\mathrm{A}}(\vec{r})$-$\Delta\vec{\mathrm{A}}(\vec{r}) = \vec{V}(\vec{r})$.

Звідси з урахуванням перестановки можемо отримати:

$-\Delta\vec{A}(\vec{r}) = -\text{grad div}\,\vec{A}(\vec{r}) + \vec{V}(\vec{r})$

$\Delta\vec{A}(\vec{r}) = \text{grad div}\,\vec{A}(\vec{r}) - \vec{V}(\vec{r}).$

Шляхом наступних перетворень наше рівняння приводимо наступного вигляду:

$$\Delta\vec{A}(\vec{r}) = -\vec{V}(\vec{r}) \qquad (6.32)$$

Таким чином, задача зводиться до інтегрування векторного рівняння Пуассона [2, 3].

З математичної фізики відомо, що для необмеженого простору векторне рівняння Пуассона має розв'язок типу:

$$\Delta\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\vec{V}(\vec{r})}{r}\,dV. \qquad (6.33)$$

В реальних фізичних полях потенціали фізичним змістом не володіють. Вектор-потенціал ні в яких полях не співпадає з реальною фізичною величиною. Вектор-потенціал – це функціональні величини, що вводяться для спрощення розв'язку задач обернених векторних операцій та дозволяють отримати поле шляхом просторового диференціювання.

6.4 Поле в обмеженій області простору вільне від джерел та вихорів

Розглянемо вихрове поле, де відсутні витоки та джерела. Представимо його виразом:

$$div\vec{F}(\vec{r}) = 0$$

$$rot\vec{F}(\vec{r}) = \vec{V}(\vec{r}) \qquad (6.34)$$

Якщо рівняння (6.34) розповсюдити на весь простір, то тоді очевидно, що єдиним розв'язком даної системи є:

$\vec{F}(\vec{r}) \equiv 0.$

Проте, може бути шпарина в просторі, де ці рівняння мають розв'язок. Нехай таке поле існує в обмеженій області простору S. Для характеристики цього поля введено скалярний потенціал:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -grad\, U(\vec{r}) \tag{6.35}$$

$$\Delta U(\vec{r}) = 0. \tag{6.36}$$

Задача інтегрування поля зводиться тоді до розв'язку рівняння Лапласа.

Для розв'язку рівняння Лапласа [2, 3] в обмеженій області на її межі повинні бути задані умови, які враховують джерела (збудники) поля. А саме на межі області має бути задана нормальна складова вектору поля.

1. $\vec{F}(\overrightarrow{r_s})\vec{n} = F_n(\overrightarrow{r_s}) = -\frac{\partial U(r_s)}{\partial n}$ – задача Неймана [3]

На границі області має бути заданий сам потенціал.

2. $U(\overrightarrow{r_s})=\varphi(\overrightarrow{r_s})$ – задача Діріхле [2, 3]

Однозначний розв'язок задачі Неймана слідує з вже розглянутої задачі про однозначність.

Розглянемо задачу Діріхле, а саме, її умови однозначності

$$\left.\begin{array}{l} \Delta U(\vec{r}) = 0 \\ U(\overrightarrow{r_s}) = \varphi(\overrightarrow{r_s}) \end{array}\right\} \tag{6.37}$$

Припустимо, що є два розв'язки $U_1(\overrightarrow{r_s})$ та $U_2(\overrightarrow{r_s})$, що в рівній мірі задовольняють розв'язку системи (6.37).

Різницевий розв'язок запишемо у виді:

$U(\overrightarrow{r_s}) = U_1(\overrightarrow{r_s}) - U_2(\overrightarrow{r_s})$.

Тоді різницевий потенціал

$\Delta U(\overrightarrow{r_s}) = \Delta[U_1(\overrightarrow{r_s}) - U_2(\overrightarrow{r_s})] = 0.$

Він задовольняє розв'язку рівняння Лапласа. Вектор поля буде визначатися

$U_1(\overrightarrow{r_s}) - U_2(\overrightarrow{r_s}) = 0.$

Тоді слід розв'язати наступну систему:

$$\begin{cases} \Delta U(\overrightarrow{r_s}) = \Delta[U_1(\overrightarrow{r_s}) - U_2(\overrightarrow{r_s})] = 0 \\ U_1(\overrightarrow{r_s}) - U_2(\overrightarrow{r_s}) = 0 \end{cases} \tag{6.38}$$

Тоді різницевий вектор поля визначається як градієнт різницевого потенціалу.

$$\vec{F}(\vec{r}) = -grad[U_1(\vec{r_s}) - U_2(\vec{r_s})] = \begin{cases} 0 \\ const \end{cases} \quad (6.39)$$

6.5 Визначення векторного поля за його джерелами (витоками) та вихорами

$$\left.\begin{array}{l} div\,\vec{F}(\vec{r}) = q(\vec{r}) \\ rot\,\vec{F}(\vec{r}) = \vec{V}(\vec{r}) = 0 \end{array}\right\} \quad (6.40)$$

Для розв'язку цієї задачі уявимо вектор $\vec{F}$ у виді суперпозиції двох полів:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{U}(\vec{r}) + \overrightarrow{W}(\vec{r}), \quad (6.41)$$

де $\vec{U}(\vec{r})$ та $\overrightarrow{W}(\vec{r})$ - вектори соленоїдального та потенціального полів.

Припустимо, що

$$\begin{cases} div\,\vec{U}(\vec{r}) = q(\vec{r}) \\ rot\,\vec{U}(\vec{r}) = 0 \end{cases} \quad (6.42) \qquad \begin{cases} div\,\overrightarrow{W}(\vec{r}) = 0 \\ rot\,\overrightarrow{W}(\vec{r}) = V(\vec{r}) \end{cases}, \quad (6.43)$$

де $\vec{U}(\vec{r})$ – потенціальний вектор, $\overrightarrow{W}(\vec{r})$ – соленоїдальний вектор

За заданих умов вектор $\vec{F}(\vec{r})$ задовольняє вихідному рівнянню (6.40). У випадку потенціального поля введемо функцію

$$\begin{cases} \vec{U}(\vec{r}) = -grad\,\varphi(\vec{r}) \\ \Delta\varphi(\vec{r}) = -q(\vec{r}) \\ \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{q(\vec{r})}{r}dV \end{cases} \quad (42') \qquad \begin{cases} \overrightarrow{W}(\vec{r}) = -rot\,\vec{A}(\vec{r}) \\ \Delta\,\vec{A}(\vec{r}) = -\vec{V}(\vec{r}) \\ \overrightarrow{W}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\vec{V}(\vec{r})}{r}dV \end{cases} \quad (6.43')$$

Згідно рівнянням (6.41) можемо записати:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -grad\,\varphi(\vec{r}) + \mathrm{rot}\vec{A}(\vec{r}). \quad (6.44)$$

Для необмеженого простору можна записати:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} grad \int_V \frac{q(\vec{r})}{r} dV + \frac{1}{4\pi} rot \int_V \frac{\vec{V}(\vec{r})}{r} dV. \quad (6.45)$$

Таким чином, якщо джерела та вихори поля визначені в кожній точці області, от це поле може бути представлено у виді суперпозиції потенціального та вихрового полів Це положення носить назву **теореми розкладання Гельмгольца.**

7. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ПОЛЯ ТА ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ

7.1 Фізичні характеристики електромагнітних полів і електромагнітні властивості середовищ. Вектори електромагнітного поля.

Електромагнітне поле характеризується сукупністю чотирьох векторів, які згідно встановленою термінологією позначаються наступним чином:

$\vec{\mathrm{E}}$ – напруженість електромагнітного поля;

$\vec{D}$ – електрична індукція(вектор індукції електричного поля);

$\vec{B}$ – магнітна індукція(вектор магнітної індукції);

$\vec{H}$ – напруженість магнітного поля.

Вектори поля представляють собою кінцеві та неперервні функції точок поля. Неперервність векторів поля відноситься до звичайних точок поля, тобто тим, де відсутній стрибкоподібний процес в полі. В граничних точках, де існує стрибкоподібний ефект, вектори поля можуть зазнавати розривів [2-4].

Силовий вплив на рухомий заряд визначається наступним чином:

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\left[\vec{E} + (\vec{V} \times \vec{B})\right]. \qquad (7.1)$$

Останнє рівняння можна розкласти на складові:

$$\begin{cases} \vec{F}(\vec{r}) = q(\vec{r})\vec{E} & - \text{(кулонова сила)} \quad (7.2') \\ \vec{F}(\vec{r}) = q(\vec{r})\left(\vec{V} \times \vec{B}\right) & - \text{(лоренцева сила)} \quad (7.2'') \end{cases} \qquad (7.2)$$

З рівняння (7.2’) можна отримати наступний вираз:

$$\vec{E}=\frac{1}{q}\vec{F}. \qquad (7.3)$$

Відповідно до (7.3) напруженість виражається силою, що діє зі сторони поля на одиничний заряд. Це додатній дотичний заряд. Рівняння (7.3) є наслідком із закону Кулона:

$$\vec{F} = k_e \frac{q_1 q_2}{R^2} \times \frac{\vec{R}}{R}. \qquad (7.4)$$

В основу визначення індукції магнітного поля може бути покладене рівняння (7.2’’). Проте, для цього краще використовувати закон Ампера для провідника зі струмом в електричному полі [2, 4]:

$$d\vec{F} = I\left(d\vec{l} \times \vec{B}\right)k_{\text{магн.}}. \qquad (7.5)$$

$$k_{\text{магн.}} = 1.$$

В ідентичності рівнянь (7.2’’) і (7.5) легко впевнитися, якщо згадати, що

$$I = \frac{dq}{dt}; \qquad \vec{V} = \frac{d\vec{l}}{dt}, \text{ тоді}$$

$$q\vec{V} = Id\vec{l}.$$

Розкриваємо зміст вектору магнітної індукції.

Якщо в магнітному полі вектору $\overrightarrow{B}$ помістити провідник зі струмом $d\vec{l}$, то напрямок вектору $d\vec{F}$ буде напрямком вектору в цій правогвинтовій системі (рис. 7.1).

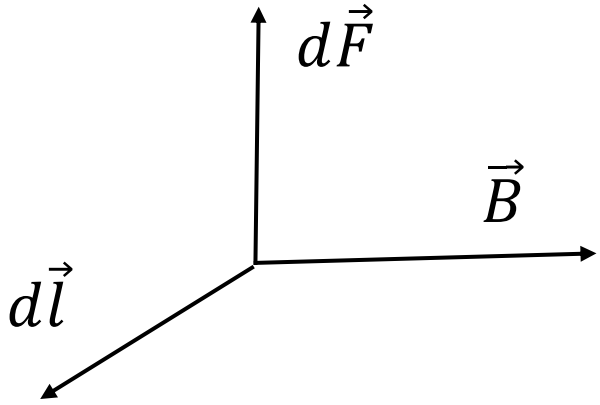

Рис. 7.1. До визначення вектору магнітної індукції

Вектор магнітної індукції чисельно дорівнює силі, що діє на одиницю провідника зі сторони поля з одиничним струмом I, що розташовано перпендикулярно магнітному полю

$$\vec{B} = \frac{d\vec{F}}{Id\vec{l}}$$
$$\vec{B} = \frac{d\vec{F}}{qV} \qquad (7.6)$$

Пари векторів $\vec{E}$ і $\vec{B}$(напруженості електричного та індукції магнітного полів) загалом досить для характеристики електромагнітного поля в вакуумному середовищу. Але в середовищах, де властивості поля залежать від властивостей середовищі, цих векторів недостатньо. Тому крім них вводяться ще вектори $\vec{D}$ та $\vec{H}$.

Електричною індукцією $\vec{D}$ називається векторна характеристика електричного поля, що задано системою електричних зарядів, яка не залежить від електричних властивостей середовища.

Напруженістю магнітного поля $\vec{H}$ називається векторна характеристика магнітного поля, яка створена рухомими зарядами та струмами, що не залежать від магнітних властивостей оточуючого середовища.

Сукупність чотирьох векторів повністю характеризує електромагнітне поле заданого матеріального середовища.

7.2. Діелектрична та магнітна проникність

Електромагнітне середовище характеризують [2 - 4]:

- ε – діелектрична проникність
- μ – магнітна проникність.

Обидві проникності можуть бути безпосередньо визначені з відповідних законів електромагнетизму.

Діелектрична проникність ε може бути отримана з закону Кулона.

Виразимо в ньому k-коефіцієнт в реальній матеріальній формі:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{R^2}\frac{\vec{R}}{R}. \qquad (7.7)$$

Діелектрична проникність в різних середовищах має різні значення.

Нехай q_1 – пробний заряд, а q_2 – заряд, який створює поле.

Тоді: $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_2}{R^2}\frac{\vec{R}}{R}$.

Домножимо останній вираз на ε:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \varepsilon\frac{\vec{F}}{q_1} = \frac{1}{4\pi}\frac{q_2}{R^2}\frac{\vec{R}}{R}. \qquad (7.8)$$

З рівняння (8) отримаємо одне з матеріальних рівнянь електромагнітного поля:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}. \qquad (7.9)$$

Складні процеси поляризації речовини визначаються введенням величини ε.

Таким чином, діелектрична проникність визначає собою вплив середовища на силу взаємодії електричних зарядів; в кількісному відношенні – це збільшення сили взаємодії зарядів в даному середовищі в порівнянні з вакуумом [2, 4].

В системі СІ діелектрична постійна проникності ε_0 має розмірність:

$$\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}\left[\frac{\Phi}{\text{м}}\right] \rightarrow \left[\frac{\text{с}}{\text{Ом м}}\right].$$

Значення ε_0 є мінімальним у вакуумі. В реальних середовищах значення ε завжди більше приведеної величини.

Магнітну проникність μ середовища можна виразити з закону Біо-Савара-Лапласа [2]. Відповідно до цього експериментального закону (рис.7.2):

$$d\vec{B} = \frac{I\mu}{4\pi}\frac{(d\vec{l}\times\overrightarrow{R})}{R^3} \quad . \qquad (7.10)$$

Після інтегрування отримаємо: $\vec{B} = \frac{I\mu}{4\pi}\oint_l \frac{(d\vec{l}\times\overrightarrow{R})}{R^3}$ (7.10')

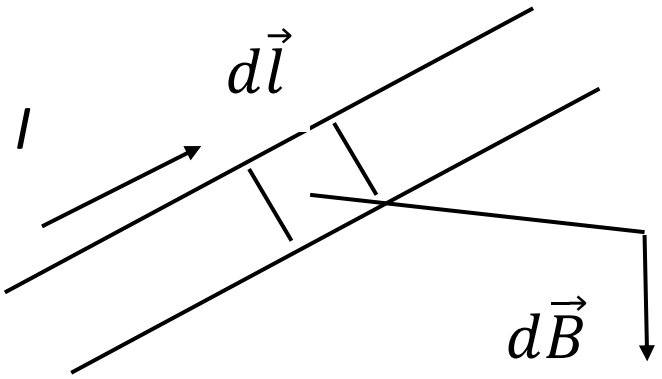

Рис.7.2До визначення магнітної проникності

В результаті маємо характеристику поля, що не залежить від властивостей середовища. Для цього рівняння (7.10) розділимо на μ:

$$d\vec{H} = \frac{d\vec{B}}{\mu} = \frac{I}{4\pi}\frac{(d\vec{l}\times\overrightarrow{R})}{R^3}. \qquad (7.11)$$

В такому випадку отримаємо ще одне матеріальне рівняння:

$$\vec{B} = \mu\vec{H}. \qquad (7.12)$$

Для вакууму вводиться μ_0 – магнітна проникність вакууму:

$$\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}(\frac{\text{Гн}}{\text{м}}).$$

Магнітна проникність середовища визначається впливом середовища на магнітне поле в даному середовищі і кількісно виражає зміну (збільшення або зменшення) впливу середовища на магнітне поле в порівнянні з вакуумом.

Для зручності вводяться також і відносні проникності – безрозмірні сталі, що показують у скільки разів проникність даної речовини відрізняється від проникності вакууму:

$$\varepsilon_{\text{р}} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}; \qquad \mu_{\text{р}} = \frac{\mu}{\mu_0}\ .$$

7.3. Поляризація та намагніченість

Нехай задано поле $\vec{E}$. Воно в матеріальному середовищі дасть індукцію $\vec{D}$, а в вакуумі

$$\overrightarrow{D_0} = \varepsilon_0 \vec{E}.$$

Знайдемо різницю цих величин

$$\vec{P} = \vec{D} - \overrightarrow{D_0} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}, \qquad (7.13)$$

де $\vec{P}$ – вектор електричної поляризації, який характеризує питомий електричний момент одиниці об'єму речовини, що виникає внаслідок поляризації.

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum \overrightarrow{P_l}}{\Delta V}$$

$$\vec{D} = \vec{P} - \varepsilon_0 \vec{E}, \qquad (7.14)$$

Припустимо, що задано поле $\vec{H}$. В матеріальному середовищі воно дає індукцію $\vec{B}$, а в вакуумі

$$\overrightarrow{B_0} = \mu_0 \vec{H}.$$

Знайдемо різницю цих величин

$$\vec{M} = \vec{B} - \overrightarrow{B_0} = \vec{B} - \mu_0 \vec{H},$$

де $\vec{M}$ – вектор магнітної поляризації, або вектор намагнічення. Він виражає собою питомий магнітний момент одиниці об'єму.

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum \vec{m}}{\Delta V},$$

$$\vec{B} = \vec{M} - \mu_0 \vec{H}. \qquad (7.15)$$

Вектор $\vec{B}$ враховує внутрішнє магнітне поле та зовнішнє поле намагнічування.

В лінійних середовищах вектори $\overrightarrow{E}$, $\vec{D}$, $\vec{P}$, а також $\overrightarrow{B}$, $\vec{H}$ і $\vec{M}$, звичайно пропорційні між собою. Цю пропорцію можна визначити наступним чином:

$$\begin{cases} \vec{P} = \chi_l \varepsilon_0 \vec{E}, \\ \vec{M} = \chi_m \mu_0 \overrightarrow{H}, \end{cases} \qquad (7.16)$$

де χ_l і χ_m – електрична і магнітна сприйнятливості середовища.

Суто фізично вони визначають міру активності середовищі до розвитку електромагнітного процесу.

$$\vec{P} = \vec{D} - \overrightarrow{D_0} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E};$$

$$\vec{M} = (\mu - \mu_0)\vec{H}.$$

Якщо $\vec{P}$ підставити в рівняння (7.16), то отримаємо

$$\chi_l \varepsilon_0 = \varepsilon - \varepsilon_0 \quad \text{та} \quad \chi_m \mu_0 = \mu - \mu_0, \text{ звідки}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_0(1 + \chi_l) \\ \mu &= \mu_0(1 + \chi_m) \end{aligned} \qquad (7.17)$$

А для відносних значень проникності отримаємо

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \chi_l \\ \mu_r &= \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m \end{aligned} \qquad (7.18)$$

Сприйнятливості – це безрозмірні величини (коефіцієнти), що виражають собою приріст відносної проникності середовища над вакуумним середовищем.

Фундаментальними характеристиками середовища є проникності.

Величина $\vec{P}$ – це індукція, а не напруженість!

8. ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ В ПРОВІДНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Будь-який рух електричних зарядів представляє собою електричний струм. Елементарний заряд притаманний електрону: $\bar{e}$ = -1,602 ▪10^{-19} Кл.

За рухом електронів встановлюється напрямок струмів. Переходячи до макроскопічного розповсюдження зарядів введемо наступні поняття [2-4]:

1. Об'ємна щільність заряду – це заряд в одиниці об'єму

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \quad \left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}\right], \quad q = \int_V \rho \, \Delta V$$

2. Поверхневий заряд (його щільність)

$$\sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} \quad \left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}\right], \quad q = \int_S \sigma \, \Delta S$$

3. Лінійний розподіл заряду

$$\lambda = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} \quad \left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}}\right], \quad q = \int_l \lambda \, \Delta l$$

Цими характеристиками ми виражаємо просторовий розподіл зарядів.

Розглянемо струми.

4. Електричний струм через визначений переріз S.

Враховується, що струм розповсюджується в лінійному середовищі.

$$I = \frac{dq}{dt} \qquad [\text{А}]$$

5. Вектор щільності струму $\vec{j}$

$$\vec{j} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} \vec{j}_0 \quad \left[\frac{\text{А}}{\text{м}^2}\right],$$

де $\vec{j}_0$ – орт, що представляє напрямок вектору щільності струму.

6. Поверхнева щільність струму

Вважаємо, що струм протікає по провідній поверхні (Рис. 7.3)

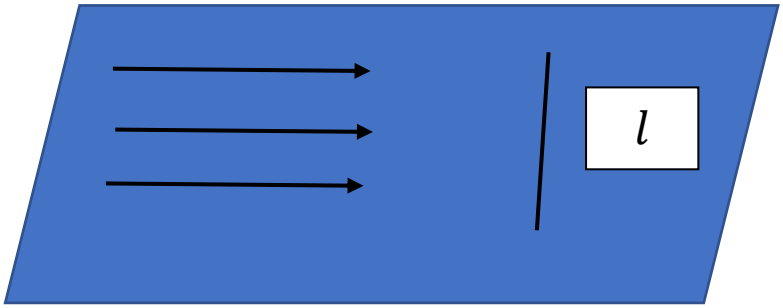

Рис. 7.3 Графічне представлення поверхневих струмів

В такому випадку можна обчислити струми на одиницю довжини.

$$\vec{\imath} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta l} \vec{\imath}_0 \quad \left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}}\right], \qquad I = \int_S \vec{j}\, d\vec{S} = \int_S j_n\, dS\,, \qquad I = \int_l i_\perp\, dl$$

В цьому випадку струм рухається від «+» до «-»

8.1 Закон збереження заряду

Розглянемо замкнену поверхню S. Всередині цієї поверхні зосереджений заряд q(t), який зменшується з плином часу t. Струм через цю поверхню можна визначити як

$$I = \frac{dq}{dt} = \oint_S \vec{j}\, d\vec{S} \qquad (8.1)$$

Введемо об’ємну щільність електричного заряду

$$\begin{cases} q = \int_V \rho\, \Delta V \\ \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \rho\, \Delta V = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, \Delta V \end{cases} \qquad (8.2)$$

Величина $\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, \Delta V$ – розглядає зменшення в кожній точці об’єму.

Тоді вираз (1) прийме вигляд:

$$\oint_S \vec{j}\, d\vec{S} = \int_V div\, \vec{j}\, \Delta V = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, \Delta V \qquad (8.3)$$

Цілком можливо рівняння (3) представити в наступному виді:

$$\int_V \left(div\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right)\Delta V = 0 \qquad (8.4)$$

Формула (8.4) – інтегральна формула закону збереження заряду. Вона справедлива для будь-якого об'єму, що обмежений будь-якою поверхнею S. Рівняння (8.4) існує тільки в тому випадку, коли інтегральний вираз дорівнює нулю.

$$div\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (8.5)$$

Рівняння (8.5) представляє собою диференціальну форму закону збереження заряду, та є відомим рівнянням неперервності. Згідно з ним витоками (джерелами) вектору щільності струму є змінні в часі заряди.

Рівняння (8.4) і (8.5) визначають собою закон збереження заряду. Згідно з (8.4) електричний струм, що проходить через замкнену поверхню S, компенсується спаданням заряду всередині цієї поверхні. Суто фізично закон збереження характеризує незнищуваність електричних зарядів.

Цей закон є частковим представленням загального закону природи – закону збереження матерії:

$$div\left(\vec{j} + rot\,\vec{H}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Математично ми не можемо однозначно трактувати (пояснювати) рівняння (8.5). Тому ми розглядаємо лише випадок, коли $rot\,\vec{H}$=0.

8.2 Закони Кірхгофа

I. Для будь-якої точки вузла (розгалуження) електричного ланцюгу сума струмів, що спрямована до вузлу, дорівнює сумі струмів, що спрямовані з вузла.

. $$\sum I = 0$$

$$\sum I_{\text{вх}} = \sum I_{\text{вих}}$$

II. Для будь-якого замкненого контуру алгебраїчна сума всіх е.р.с. контуру дорівнює алгебраїчній сумі спадів напруг на окремих опорах контуру.

$$\sum I\,R = \sum \text{е. р. с.}$$

Ці закони в випадку просторового розподілу полів (рис. 7.4) набувають диференціальні і інтегральні форми.

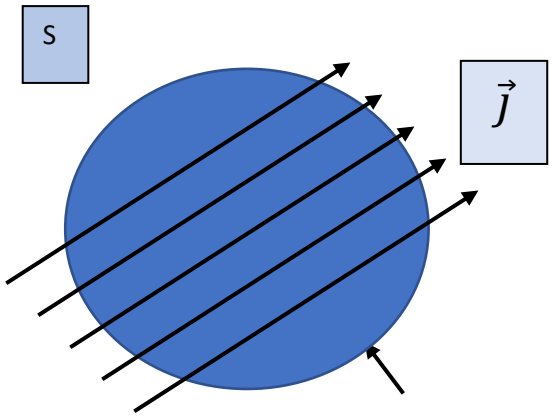

Рис. 7.4. До другого закону Кірхгофа

$$\oint_S \vec{j}\,d\vec{S}=0 \qquad (8.6)$$

Рівняння (8.6) – інтегральна форма першого закону Кірхгофа.

В цьому випадку всередині поверхні заряди відсутні.

Якщо вони є, то тоді маємо право записати:

$$I = \oint_S \vec{j}\,d\vec{S}$$

З рівнянь неперервності цей вираз можна перетворити за формулою Остраградського-Гауса [1-3] та отримати:

$$div\,\vec{j}=0 \qquad (8.7)$$

Рівняння (8.7) – диференціальна форма І-го закону Кірхгофа (закону збереження струму стаціонарних полів). Це істотна характеристика вектору $\vec{j}$.

В стаціонарних полях поле вектору $\vec{j}$ є соленоїдальним полем (тобто лінії струму ніде не починаються і ніде не закінчуються).

Згідно з другим законом Кірхгофа:

$$\varepsilon = \int_l \vec{E} d\vec{l} = 0. \qquad (8.8)$$

Рівняння (8.8) представляє собою інтегральну форму другого закону Кірхгофа. За теоремою Стокса рівняння (8.8) можна записати у виді:

$$\oint_l \vec{E}\, d\vec{l} = \oint_S rot\, \vec{E}\, dS = 0.$$

Оскільки цей вираз має бути справедливим для будь-якої поверхні S, то тоді підінтегральний вираз

$$rot\, \vec{E}=0 \qquad (8.9)$$

Згідно з (9) стаціонарне поле в середовищі, яке проводить, є безвихровим або потенціальним. Тоді вводиться скалярний потенціал

$$\vec{E} = -grad\, U. \qquad (8.10)$$

8.3 Закон Ома

$$I = \frac{U}{R}; \qquad U = \int_l \vec{E} d\vec{l}; \qquad R = \rho \frac{l}{S}.$$

Припустимо, що необхідно знайти функціональний зв'язок

$$\vec{j} \leftrightarrows \overrightarrow{E}.$$

Введемо наступний (третій) електромагнітний параметр середовища

$$\gamma = \frac{1}{\rho},$$

де γ – електропровідність, ρ – питомий електричний опір.

ρ = [Ом м], $\gamma = \left[\frac{\text{Ci}}{\text{м}}\right] = \left[\frac{1}{\text{Ом м}}\right]$.

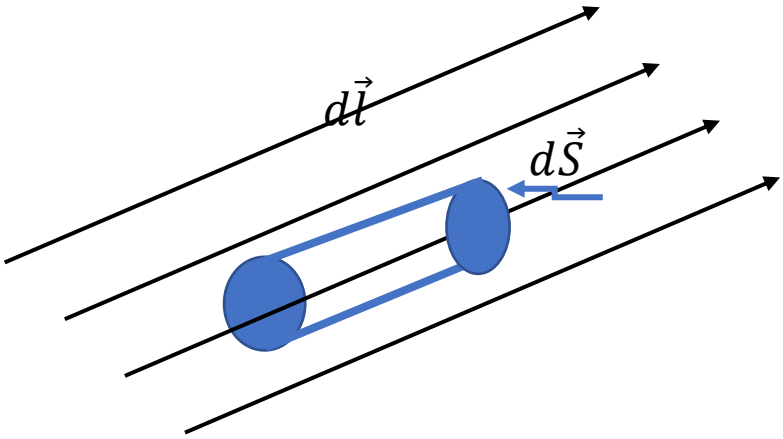

Рис. 7.5. До закону Ома

Виділимо трубку таких малих розмірів (рис. 7.4), щоб струм протікав паралельно поверхням циліндра, та до неї застосуємо закон Ома.

Нехай через трубку протікає струм ΔI. Згідно закону Ома:

$$\Delta I = \frac{\Delta U}{R}.$$

Опір цієї трубки дорівнює: $R = \rho \frac{\Delta l}{\Delta S}$, тоді

$$\frac{\Delta I}{\Delta S} = \frac{1}{\rho}\frac{\Delta U}{\Delta l}.$$

Перейдемо до граничних відношень, спрямувавши Δl та ΔS до нуля.

$$\lim \frac{\Delta I}{\Delta S} = j_l = \frac{1}{\rho} \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta l} = \frac{1}{\rho} E_l.$$

Узагальнюючи отриманий результат, маємо:

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}. \qquad (8.11)$$

Останнє рівняння представляє собою закон Ома в диференціальній формі для просторових струмів.

Нехай, $\left.\begin{array}{c} div\, \vec{j} = 0 \\ \vec{j} = \gamma \vec{E} \\ \vec{E} = -grad\, U \end{array}\right\}$. (8.12)

Відповідно до (8.12) вектор щільності струму можна представити

$\vec{j} = -\gamma\ grad\ U$, тоді

$$div\ \vec{j} = div\ (\gamma\ grad\ U) = 0.$$

Таким чином, маємо наступне рівняння:

$$div\ (\gamma\ grad\ U) = div\gamma\ grad\ U + \gamma\ div\ grad\ U = 0. \qquad (8.13)$$

Рівняння (8.13) задовольняє потенціалу та описує поля в неоднорідних середовищах. Якщо середовище однорідне, тобто $\gamma = const$ та $grad\ \gamma = 0$, маємо

$$\Delta U = 0. \qquad (8.14)$$

З рівняння (8.14) слідує, що для однорідних середовищ електричний потенціал стаціонарного поля задовольняє рівнянню Лапласа.

Рівняння (8.13) сучасна математична фізика не розв'язує, а тому розв'язок задачі переходить до розв'язку рівняння Лапласа для однорідних середовищ. А для області її розбивають на частини, де $\gamma = const$ та знаходять потенціал для кожної з окремих частин.

8.4 Матеріальні рівняння для анізотропних середовищ

Анізотропні середовищі – це такі середовищі, в яких фізичні параметри залежать від напрямку їх визначення в середовищах.

$$\begin{cases} \vec{j} = \gamma\vec{E} \\ \vec{D} = \varepsilon\vec{E} \\ \vec{B} = \mu\vec{H} \end{cases} \qquad (8.15)$$

Рівняння системи (8.15) справедливі для будь-яких однорідних ізотропних електромагнітних середовищ крім анізотропних.

Розглянемо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} \vec{j} = \tilde{\gamma}\vec{E} \\ \vec{D} = \tilde{\varepsilon}\vec{E} \\ \vec{B} = \tilde{\mu}\vec{H} \end{cases} \qquad (8.16)$$

Найбільш важливою особливістю анізотропних середовищ є кут між векторами поля, зокрема, кут між вектором електричного поля та щільністю струму.

Розглянемо закон Ома для такого випадку та вивчимо картинку розподілу в одній площині.

В даному випадку вектор $\vec{j}$ пропорційний вектору $\vec{E}$ в різній степені по різним координатним напрямкам, що добре видно з рисунку.

Нехай α - сумарний кут між векторами (рис. 7.6). Просторова картина аналогічна площинній.

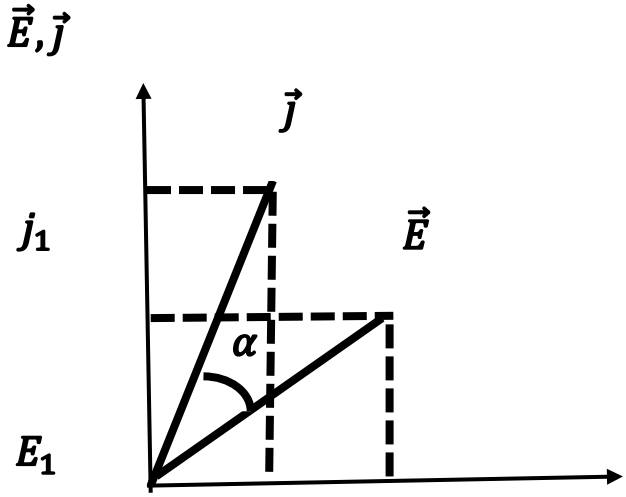

Рис. 7.6. Кут між вектором електричного поля та щільністю струму

Розглянемо систему рівнянь (8.16) в більш загальному плані.

Припустимо, що поле вектору $\vec{E}$ задано по осі OX. Це поле створить вектор $\vec{j}$ по всім координатним осям. Те ж саме для областей по осям Y та Z.

$$\begin{array}{ccc} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ j'_x = \gamma_{xx}E_x & j''_x = \gamma_{xy}E_y & j'''_x = \gamma_{xz}E_z \\ j'_y = \gamma_{yx}E_x & j''_y = \gamma_{yy}E_y & j'''_y = \gamma_{yz}E_z \\ j'_z = \gamma_{zx}E_x & j''_z = \gamma_{zy}E_y & j'''_z = \gamma_{zz}E_z \end{array} \qquad (8.17)$$

Для того, щоб отримати загальну картину, припустимо, що поле вектору напруженості електричного поля $\vec{E}$ задане довільно. Для цього складемо складові таблиці (8.17) зліва направо. Отримаємо:

$$\begin{cases} j_x = \gamma_{xx}E_x + \gamma_{xy}E_y + \gamma_{xz}E_z \\ j_y = \gamma_{yx}E_x + \gamma_{yy}E_y + \gamma_{yz}E_z \\ j_z = \gamma_{zx}E_x + \gamma_{zy}E_y + \gamma_{zz}E_z \end{cases} \quad (8.18)$$

Рівняння (8.18) виражають собою матеріальні рівняння для випадку анізотропних середовищ. Для інших рівнянь з системи (8.18) отримуються аналогічні викладки. В узагальненому виді дане рівняння можна записати:

$\vec{j} = \tilde{\gamma}\vec{E}$, де

$$\tilde{\gamma} = \begin{Vmatrix} \gamma_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \gamma_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \gamma_{zz} \end{Vmatrix} \quad (8.19)$$

Цей тензор представляє собою симетричний тензор другого рангу. З дяв'яти величин, що складають компоненти тензора, незалежними є шість, а саме:

$$\gamma_{xx}, \gamma_{yy}, \gamma_{zz}, \gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \gamma_{xz} = \gamma_{zx}, \gamma_{yz} = \gamma_{zy}.$$

Будь-який тензор (симетричний) другого рангу може бути відносним до його осей. Три діагональні компоненти тензору визначають головні напрямки, ще три вказують просторову орієнтацію цих напрямків анізотропії.

Якщо осі координат суміщені з головними напрямками анізотропії, то система лінійних рівнянь значно спрощується та набуває виду:

$$\begin{cases} j_x = \gamma_{xx}E_x \\ j_y = \gamma_{yy}E_y \\ j_z = \gamma_{zz}E_z \end{cases} \quad (8.20)$$

Співставляючи (8.19) і (8.20) ми істотно спрощуємо розв'язок електродинамічних задач. В такому випадку величини j_x, j_y і j_z будемо мати лише з одним підстрочним індексом.

Визначимо кут між вектором щільності струму $\vec{j}$ та вектором напруженості електричного поля $\vec{E}$. Для цього розглянемо скалярний добуток цих векторів. Суто фізично – це потужність електричного струму, яка формулюється законом Джоуля-Ленца.

$$p = \vec{j} \cdot \vec{E} = j_x E_x + j_y E_y + j_z E_z = |\vec{j}|\left|\vec{E}\right| \cos\widehat{\left(\vec{j}, \vec{E}\right)},$$

тоді $$\cos\widehat{\left(\vec{j}, \vec{E}\right)} = \frac{\vec{j}\vec{E}}{|\vec{j}||\vec{E}|} \qquad (8.21)$$

Для отримання розв'язку в загальному виді необхідно в рівняння (8.21) підставити рівняння (8.18). Проте, можна сумістити з початком координат і тоді отримаємо:

$$\cos\widehat{\left(\vec{j}, \vec{E}\right)} = \frac{\rho_x j_x^2 + \rho_y j_y^2 + \rho_z j_z^2}{\sqrt{j_x^2 + j_y^2 + j_z^2}\sqrt{\rho_x^2 j_x^2 + \rho_y^2 j_y^2 + \rho_z^2 j_z^2}} =$$

$$= \frac{\gamma_x E_x^2 + \gamma_y E_y^2 + \gamma_z E_z^2}{\sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}\sqrt{\gamma_x^2 E_x^2 + \gamma_y^2 E_y^2 + \gamma_z^2 E_z^2}} \qquad (8.22)$$

За такої постановки питання вектор щільності струму визначається

$$|\vec{j}| = \sqrt{\gamma_x^2 E_x^2 + \gamma_y^2 E_y^2 + \gamma_z^2 E_z^2} = \gamma_{\text{ан}}(\vec{r})\left|\vec{E}\right|. \qquad (8.23)$$

Для вибору $\vec{E}$ можемо записати:

$$\left|\vec{E}\right| = \sqrt{\rho_x^2 j_x^2 + \rho_y^2 j_y^2 + \rho_z^2 j_z^2} = \rho_{\text{ан}}(\vec{r})\,|\vec{j}|. \qquad (8.24)$$

$$\rho_{\text{ан}}(\vec{r}) = \frac{\left|\vec{E}\right|}{|\vec{j}|} = \sqrt{\frac{\rho_x^2 j_x^2 + \rho_y^2 j_y^2 + \rho_z^2 j_z^2}{j_x^2 + j_y^2 + j_z^2}},$$

проте $\cos\alpha = \frac{j_x}{|\vec{j}|}$; $\cos\beta = \frac{j_y}{|\vec{j}|}$; $\cos\gamma = \frac{j_z}{|\vec{j}|}$.

Тому в кінцевому вигляді отримаємо:

$$\rho_{\text{ан}}(\vec{r}) = \sqrt{\rho_x^2 cos^2\alpha + \rho_y^2 cos^2\beta + \rho_z^2 cos^2\gamma}. \qquad (8.25)$$

Отже, опір анізотропного середовища залежить від напрямку.

Піднесемо ліву та праву частини рівняння (8.25) до квадрату та врахуємо, що

$\rho_{\text{ан}}(\vec{r}) \cdot \gamma_{\text{ан}}(\vec{r}) = 1,$ тоді

$\rho_x^2 \gamma_{\text{ан}}^2(\vec{r}) cos^2\alpha + \rho_y^2 \gamma_{\text{ан}}^2(\vec{r}) cos^2\beta + \rho_z^2 \gamma_{\text{ан}}^2(\vec{r}) cos^2\gamma = 1.$

Введемо наступні позначення:

$$x = \gamma_{\text{ан}}\, cos\alpha;$$

$$y = \gamma_{\text{ан}} \cos\beta\,;$$

$$z = \gamma_{\text{ан}} \cos\gamma\,;$$

$$\frac{x^2}{\gamma_x^2} + \frac{y^2}{\gamma_y^2} + \frac{z^2}{\gamma_z^2} = 1. \qquad (8.26)$$

Це формула тривісного еліпсоїду, який в даному випадку носить назув еліпсоїду провідності. Якщо провідність анізотропного середовища в заданому напрямку зображувати в якості пропорційних відрізків, що проведені у відповідному напрямку, то x, y, z будуть представляти собою поточні координати кінців цих відрізків.

Визначимо довжину $\vec{r}$-вектору, що проведений з центру еліпсоїду до довільної точки на її поверхні:

$$|\vec{r}|=\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}=\gamma_{\text{ан}}(\vec{r})\sqrt{cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma} = \gamma_{\text{ан}}(\vec{r}).$$

Таким чином, провідність анізотропного середовищі можна визначити як радіус еліпсу, що проведений з його центру, до довільної точки на його поверхні.

9. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ЗМІННОГО ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

Змінне електромагнітне поле – це сукупність змінних у часі та взаємопов'язаних електричного та магнітного полів. Воно визначається двома векторними величинами – напруженістю електричного поля $\vec{E}$ та напруженістю магнітного поля $\vec{H}$ [2-4, 7].

Змінне електромагнітне поле – це вид матерії, якому притаманні енергія, маса, кількість руху, і воно може перетворюватися в інші види матерії та самостійно існувати у вигляді електромагнітних хвиль.

Фундаментальні закони електромагнетизму представлені у виді рівнянь Максвелла.

9.1. Струм зміщення

Для змінних у часі процесів, що можна описати рівнянням $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$, рівняння неперервності $div\vec{j} = -\frac{d\rho}{dt}$ несумісне з рівняннями $\oint_l \vec{H}\, dl = I$ і $rot\vec{H} = \vec{j}$ [2-4], що виражають зв'язок магнітного поля та постійного струму. В дійсності, якщо взяти дивергенцію від величини $rot\vec{H}$ і $\vec{j}$ у рівнянні $rot\vec{H} = \vec{j}$, маємо

$$div\, rot\vec{H} \equiv 0 = div\vec{j},$$

тоді як за рівнянням неперервності в лівій частині рівняння має бути $\frac{\partial \rho}{\partial t}$.

Разом з тим, у випадку незамкнених струмів нерідко можна вибрати поверхню S, яка спирається на контур l так, щоб вона не перетинала провідників, які переносять струм, як це зображено на рисунку 9.1.

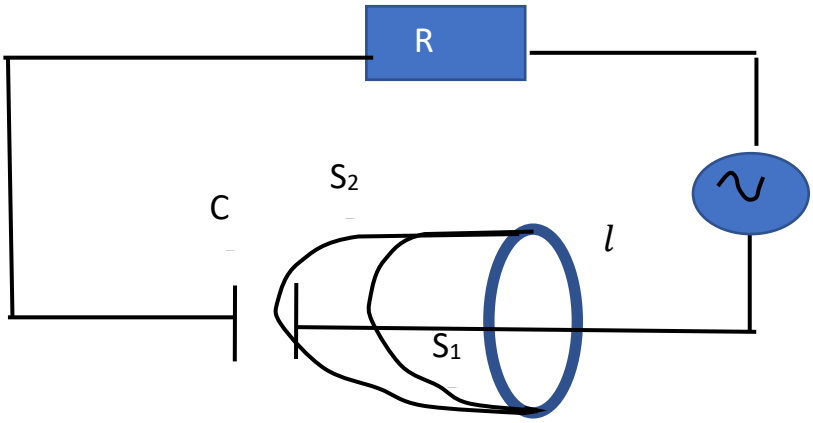

Рис. 9.1До визначення струму зміщення

Дійсно через поверхню S_1, яка спирається на контур l, струм проходить, а через S_2, що спирається на той же контур – не проходить, що явно протирічить закону повного струму $rot\vec{H} = \vec{j}$.

Для узгодження відзначених протиріч Максвеллом було введено поняття струму зміщення. ***Струм зміщення – це змінне у часі електромагнітне поле між обкладинками конденсатора C*** [2-4]**.** Наявність струму зміщення можна тлумачити як деяку «поправку», яка приводить рівняння $rot\vec{H} = \vec{j}$ у відповідність із законом збереження заряду, коли розглядаються змінні процеси.

Максвелл запропонував розглядати дві складові повного струму: струму провідності та струму зміщення:

$\vec{J}_{\text{повн.}} = \vec{J}_{\text{пр.}} + \vec{J}_{\text{зм.}}$,

причому струми зміщення еквівалентні струму провідності в тому сенсі, що вони також збурюють магнітне поле.

Лінії повного струму є неперервними:

$$\vec{J}_{\text{повн.}} = \vec{J}_{\text{пр.}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \qquad (9.1)$$

Фізично це означає, що на межі провідного середовища та діелектрика струм провідності переходить у струм зміщення. Візьмемо дивергенцію від обох частин рівняння $rot\vec{H} = \vec{j}_{\text{повн.}}$. Тоді

$$div\vec{j}_{\text{повн.}} = div\vec{j}_{\text{пр.}} + div\vec{j}_{\text{зм.}} = div\, rot\vec{H} = 0.$$

Останнє рівняння свідчить, що поле повного струму позбавлене витоків. Струми провідності з одного боку, та струми зміщення в вакуумі, з іншого, представляють собою, за змістом, істотно різні фізичні поняття. Спільна їхня характеристика – вони однаковим чином збурюють магнітне поле. Проте в усіх інших відношеннях ці струми різко розрізняються. Сама істотна різниця полягає в тому, що струм провідності – це рух електричних зарядів, тоді як «чистий» струм зміщення – струм зміщення у вакуумі – відповідає лише зміні напруженості електричного поля у часі та ніяким рухам електричних зарядів або інших частинок речовини не супроводжується.

Струми зміщення на відміну від струмів провідності не супроводжуються виділенням джоулевої теплоти. У випадку струмів зміщення у вакуумі – це очевидно. Дане твердження справедливе і для струмів зміщення в діелектриках, діелектрична проникність яких не залежить від температури. Для інших типів діелектриків струми зміщення супроводжуються тепловими ефектами. Проте виділення тепла тут підпорядковується іншим закономірностям, ніж при виділенні джоулевого тепла.

9.2. Перше рівняння Максвелла

Припустимо, що в рівнянні $rot\vec{H}=\vec{j}$ вектор $\vec{j}$ є повним струмом, у який входять і струм зміщення, і струм провідності. Як було встановлено цей струм є соленоїдальний вектор

$$div\vec{j}_{\text{повн.}} = 0.$$

Підставимо цей вектор у рівняння $rot\vec{H}=\vec{j}$

$$rot\vec{H} = \vec{j}_{\text{пр.}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (9.2)$$

Співвідношення (9.2) відомо під назвою **першого рівняння Максвелла в диференціальній** формі. Його зміст полягає в тому, що будь-яка зміна електричної індукції в часі в деякій точці поля (тобто виникнення в ній струму

зміщення), однаковим чином, як і струм провідності, викликає в цій точці вихор магнітного поля ($rot\vec{H}$). Якщо середовище однорідне і ізотропне, то $\varepsilon = const$ і тоді

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Інтегруючи рівняння (9.2) по деякій поверхні S, що спирається на контур l, і використовуючи формулу Стокса, маємо

$$\int_S \ rot\vec{H}\, d\vec{S} = \int_S \ \left(\vec{j}_{\text{пр.}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) d\vec{S} = \oint_l \ \vec{H} d\vec{l}.$$

Таким чином,

$$\oint_l \ \vec{H} d\vec{l} = \int_S \ \left(\vec{j}_{\text{пр.}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) d\vec{S}. \qquad (9.3)$$

Рівняння (9.3) – інтегральний аналог рівняння (9.2) – **перше рівняння Максвелла в інтегральній** формі.

9.3. Друге рівняння Максвелла

Виділимо в змінному електромагнітному полі деякий замкнений контур l. У відповідності із законом електромагнітної індукції Фарадея змінний магнітний потік Ф, що пронизує контур, наведе в ньому електрорушійну силу:

$$\epsilon = \oint_l \ \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial t}. \qquad (9.4)$$

Відзначимо, що магнітний потік $\vec{\Phi}$ є потоком вектору $\vec{B}$ через поверхню S, яка спирається на контур l (вимірюється в веберах [Вб])

$$\vec{\Phi} = \int_S \ \vec{B} d\vec{S}, \qquad (9.5)$$

тому

$$\oint_l \ \vec{E} d\vec{l} = -\int_S \ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \qquad (9.6)$$

На основі теореми Стокса [1-3] контурний інтеграл в останньому рівнянні може бути перетворений в поверхневий $\oint_l \ \vec{E} d\vec{l} = -\int_S \ rot\vec{E} d\vec{S}$.

Тоді

$$\int_S \ rot\vec{E}d\vec{S} - - \int_S \ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} = 0. \qquad (9.7)$$

Рівняння (9.7) має виконуватися при будь-яких S, що можливо лише в тому випадку, коли є рівними підінтегральні функції обох інтегралів.

Таким чином,

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \qquad (9.8)$$

Рівняння (9.8) – **друге рівняння Максвелла в диференціальній** формі. З нього слідує, що просторові зміни електричного поля ті часові зміни магнітної індукції взаємопов'язані. Це рівняння дає локальну характеристику електромагнітного процесу: йому задовольняють функції $\vec{E}$ і $\vec{B}$ в деякій точці простору в визначений момент часу t.

Оператор часового диференціювання $\partial/\partial t$ в правій частині рівняння (9.6) можна винести за знак інтегралу, оскільки обраний контур вважаємо незмінним. Оскільки сам інтеграл залежить тільки від часу, то символ часткової похідної $\partial/\partial t$ можна замінити на d/dt. В результаті співвідношення (9.6) набуде вигляду:

$$\oint_l \ \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \ \vec{B}d\vec{S}. \qquad (9.9)$$

Рівняння (9.9) звичайно називають **другим рівнянням Максвелла** в **інтегральній** формі.

Знак «мінус» в правій частині другого рівняння Максвелла (як і у формулі (9.4)) пояснюється тією обставиною, що в основу покладено правило правого гвинта. Якщо обертати правий гвинт таким чином, що додатній напрямок вектору магнітної індукції $\vec{B}$ в деякій точці простору при зростанні індукції в ній співпадає з напрямком руху кінця гвинта, то додатній напрямок для вектору напруженості електричного поля при складанні циркуляції вектору $\vec{E}$ вздовж нескінченно малого контуру, що оточує цю точку і лежить в площині, яка перпендикулярна вектору $\vec{B}$, співпадає з напрямком оберту головки гвинта.

9.4. Дивергенція векторів поля

Перше та друге рівняння Максвелла в диференціальній формі задають тільки вихори поля, які не можуть описати його однозначно. Для цього необхідно ще визначити, чому дорівнюють джерела поля. Обчислимо спочатку дивергенцію магнітного поля.

$$\begin{cases} rot\,\vec{H} = \vec{j}_{\text{пр.}} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ rot\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases}.$$

З цією метою застосуємо операцію «дивергенція» до другого рівняння Максвелла. Оскільки дивергенція ротору дорівнює нулю, то з рівняння (9.8) слідує, що

$$div\,\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0.$$

Поміняємо місцями операції дивергенції та $\partial/_{\partial t}$, тоді

$$\frac{\partial}{\partial t}\,div\,\vec{B} = 0. \qquad (9.10)$$

Останнє рівняння означає, що в кожній точці простору $div\,\vec{B}$ має постійне значення. Оскільки ця властивість залишається справедливою для будь-якого поля в будь-який момент часу, ця константа має бути рівною нулю. Отримуємо одне з фундаментальних рівнянь електромагнітного поля

$$div\,\vec{B} = 0. \qquad (9.11)$$

Відповідно до останньої рівності, магнітне поле не має джерел. Рівняння (9.11) – диференціальна форма теореми Гауса для магнітного поля.

Обчислимо в подальшому дивергенцію вектору $\vec{D}$, використовуючи перше рівняння Максвелла. Застосовуючи операцію «дивергенція» до лівої та правої частин рівняння, знаходимо

$$div\left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = 0. \qquad (9.12)$$

Змінюючи порядок диференціювання по просторовим координатам і по часу, представимо рівняння (9.12) у формі $div\,\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} div\,\vec{D} = 0$. Беручи до уваги, що $div\vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$, можна записати

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\ div\,\vec{D} = 0. \qquad (9.13)$$

Оскільки рівняння (9.13) має залишатися справедливим для будь-якого змінного в часі та просторі поля, маємо:

$$\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{D}} = \rho. \qquad (9.14)$$

Рівняння (9.14) – **диференціальна форма теореми Гауса** для електричного поля.

Відповідно до рівняння (9.14) дивергенція (розходження) електричної індукції дорівнює щільності заряду ρ. За змістом поняття розходження – це означає, що векторні лінії $\vec{\mathrm{D}}$ можуть починатися або закінчуватися тільки в тих точках простору, де $\rho \neq 0$. «Джерелами» (витоками) векторних ліній $\vec{\mathrm{D}}$ слугують додатні заряди, а стоками – від'ємні. Слід зазначити, що $\vec{\mathrm{D}}$ вимірюється в кулонах на квадратний метр.

Рівняння $div\,\vec{B} = 0$ та $\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{D}} = \rho$ називають відповідно **третім і четвертим** рівнянням Максвелла. Застосовуючи теорему Гауса-Остроградського до кожного з цих рівнянь, знаходимо їх інтегральні аналоги:

$$\int_S \vec{B} d\vec{S} = 0, \qquad (9.15)$$

$$\int_S \vec{D} d\vec{S} = q, \qquad (9.16)$$

де $q = \int_V \rho dV.$ (9.17)

є повний заряд в області V, що обмежена поверхнею S.

Вочевидь, повний заряд в об'ємі V вимірюється потоком електричної індукції через його замкнену поверхню S. Якщо інтеграл (9.16) дорівнює нулю, це ще не вказує на відсутність зарядів в об'ємі V: можливо, додатні або від'ємні заряди взаємно урівноважують один одного.

Потік магнітної індукції крізь будь-яку замкнену поверхню згідно з рівнянням (9.15) завжди дорівнює нулю.

9.5. Повна система рівнянь Максвелла

Розглянемо повну систему рівнянь теорії електромагнетизму. Це відомі чотири рівняння Максвелла з частковими похідними:

$$\begin{cases} rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, & div\vec{D} = \rho \\ rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & div\vec{B} = 0. \end{cases}, \tag{9.18}$$

та матеріальними співвідношеннями

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \quad \vec{j} = \gamma\vec{E}, \tag{9.19}$$

які встановлюють зв'язок індукцій $\vec{D}$, $\vec{B}$ і щільність струму провідності з напруженостями поля $\vec{E}$ і $\vec{H}$. Відзначимо, що на відміну від рівнянь Максвелла (9.18) матеріальні співвідношення не є найбільш загальними (універсальними) рівняннями електромагнітної теорії.

Якщо замінити рівняння Максвелла (9.18) їхніми інтегральними співвідношеннями, то отримаємо:

$$\begin{cases} \oint_l \vec{H}d\vec{l} = \frac{d}{dt}\int_S \vec{D}d\vec{S} + \int_S \vec{j}d\vec{S}, & \int_S \vec{D}d\vec{S} = q, \\ \oint_l \vec{E}d\vec{l} = \frac{d}{dt}\int_S \vec{B}d\vec{S}, & \int_S \vec{B}d\vec{S} = 0, \end{cases} \tag{9.20}$$

систему рівнянь Максвелла в інтегральній формі, яка розглядається разом з матеріальними рівняннями (9.19).

Цілком істотно, існують середовища, для яких рівняння (9.19) мають бути заміненими іншими, більш складними матеріальними рівняннями [2, 4]. Разом з рівняннями (9.18) вони знову утворюють повну систему рівнянь теорії електромагнетизму.

9.6. Рівняння Максвелла та класи електромагнітних явищ

Перехід від рівнянь Максвелла до рівнянь, що описують часткові класи електромагнітних явищ, виконується шляхом накладання відповідних обмежень. Так, поклавши рівними нулю всі часові похідні в рівняннях (9.18) та (9.20), можна перейти до електродинаміки стаціонарних струмів [2, 4]. Система рівнянь Максвелла (9.18) в цьому випадку набуває виду:

$$\begin{cases} rot\,\vec{E} = 0, \quad rot\,\vec{H} = 0, \\ div\,\vec{D} = \rho, \quad div\,\vec{B} = 0, \\ \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \quad \vec{j} = \gamma\vec{E}. \end{cases} \tag{9.21}$$

В приведеній системі рівнянь у лівому стовпчику зібрані величини, що характеризують електричне поле, а в правому – магнітне.

Якщо ще більше звузити клас полів, поклавши $\vec{j} = 0$, то лівий і правий стовпчики в рівняннях (9.21) стають незалежними одне від одного. Це рівняння електростатики та магнітостатики відповідно. Історично стаціонарні та статичні поля були досліджені раніше полів, які змінні у часі.

Змінні електромагнітні поля (процеси), що зберігають риси стаціонарних, називаються квазістаціонарними.

Умова квазістаціонарних струмів представляється у виді [2-4]:

$$\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \ll \vec{j}$$

та визначає значну перевагу струмів провідності над струмами зміщення.
Система рівнянь Максвелла (9.18) для квазістаціонарних струмів має вид:

$$\begin{cases} rot\,\vec{H} = \vec{j}, \quad div\,\vec{B} = 0, \\ rot\,\vec{E} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad div\,\vec{E} = 0 \\ \vec{j} = \gamma\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}. \end{cases} \tag{9.22}$$

В рівняннях останньої системи врахована та обставина, що об’ємний заряд ρ в провідному середовищі відсутній. Навіть у тому випадку, якщо в деякому об’ємі він і існує в деякий початковий момент часу, то в провідному

середовищі відбувається його швидка релаксація (розпад). Час релаксації заряду в провідному середовищі звичайно досить малий.

У тому випадку, якщо струми зміщення значно більші за струми провідності

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \gg \vec{j},$$

Маємо систему рівнянь Максвелла хвильової електродинаміки:

$$\begin{cases} rot\,\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad div\,\vec{D} = \rho, \\ rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad div\,\vec{B} = 0, \\ \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}. \end{cases} \tag{9.23}$$

Наближений характер цих підходів цілком очевидний.

9.7. Електромагнітні поля в однорідних середовищах

Запишемо рівняння Максвелла для однорідного ізотропного середовища [2, 4], тобто в припущенні $\varepsilon = \varepsilon_в\varepsilon_0 = const,\ \ \mu = \mu_в\varepsilon\mu_0 = const.$

Враховуючи, що

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E};\ \vec{B} = \mu\vec{H};\ \vec{j} = \gamma\vec{E},$

і виносячи постійні коефіцієнти ε і μ з під знаку диференціювання, з рівнянь (9.18) знаходимо:

$$\begin{cases} rot\,\vec{H} = \gamma\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad div\,\vec{H} = 0; \\ rot\,\vec{E} = -\mu\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \quad div\,\vec{E} = 0. \end{cases} \tag{9.24}$$

Щільність вільних електронів (електричних зарядів) у рівнянні $div\,\vec{D} = \rho$ приймемо для однорідного провідного середовища рівній нулю. Дійсно, для випадку провідного середовища на основі першого рівняння (9.24) можна записати:

$$div\,rot\,\vec{H} = \gamma div\,\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}div\,\vec{E} = 0.$$

З врахуванням співвідношення $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$ останнє рівняння перепишемо по-іншому:

$\frac{\gamma}{\varepsilon}\rho + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$, звідки

$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\gamma}{\varepsilon}\rho$, або $\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\gamma}{\varepsilon}dt$ (9.25)

Інтегруючи останнє рівняння, знаходимо

$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}t} = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ (9.26)

де $\tau = \frac{\epsilon}{\gamma}$ – час релаксації заряду, виміряний в секундах;

ρ_0=const – щільність вільних зарядів, яка існувала в початковий момент $t = 0$.

Як слідує з рівняння (9.26), величина ρ з бігом часу швидко зникає. Щоб впевнитися в цьому, в якості прикладу оцінимо час релаксації τ для провідного середовища з параметрами

$\varepsilon_0, \gamma = 10^{-1}\ {\text{См}}/{\text{м}}$:

$$\tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma} = \frac{{10^{-9}}/{36\pi(c\cdot \text{Ом}^{-1}\cdot\text{м}^{-1})}}{10^{-1}(\text{Ом}^{-1}\cdot\text{м}^{-1})} = \frac{\frac{1}{36\pi\cdot 10^9}}{\frac{1}{10}} \approx 10^{-10}.$$

Відповідно, щільність вільних електричних зарядів досить швидко прямує до нуля, навіть, за відносно невеликої питомої електричної провідності середовища.

Для багатьох електродинамічних задач корисно розділити рівняння Максвелла (9.24), тобто окремо записати їх для електричного та магнітного полів. З цією метою до обох частин другого рівняння (9.24) застосуємо оператор «rot», а потім в отриману рівність підставимо рівняння (9.24):

$rot\ rot\ \vec{E} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \mu\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0.$ (9.27)

Аналогічно, діючи оператором «rot» на перше рівняння (9.24), з урахуванням другого, отримуємо [2]:

$rot\ rot\ \vec{H} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} + \mu\gamma\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = 0.$ (9.28)

З урахуванням векторної тотожності

$rot\ rot\vec{A} = grad\ div\vec{A} - \Delta\vec{A}$ (що дійсне лише для прямокутної системи координат) і рівності $div\ \vec{E} = 0$, рівняння (9.27) можна переписати:

$$\Delta\vec{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \mu\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0. \qquad (9.29)$$

Подібні перетворення за допомогою рівняння $div\ \vec{H} = 0$ дозволяють привести рівняння (9.28) до виду:

$$\Delta\vec{H} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} - \mu\gamma\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = 0. \qquad (9.30)$$

Рівняння (9.29) і (9.30), яким задовольняють вектори електричного та магнітного полів в однорідному середовищі, називають в теорії математичної фізики телеграфними рівняннями.

9.8. Моделі електромагнітних полів

При побудові теорії електромагнітних методів розвідки та геоелектрики широке застосування отримали наступні моделі електромагнітних полів [2-4]:

- хвильова;
- квазістаціонарна;
- стаціонарна.

Хвильова модель. Легко бачити, що при $\mu = 0$ (умови ізолятору) телеграфні рівняння (9.29) та (9.30) можуть бути представлені наступним чином:

$$\Delta\vec{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta\vec{H} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0. \qquad (9.31)$$

Квазістаціонарна модель. В тому випадку, якщо електромагнітні поля змінюються в часі відносно повільно [2, 3], в рівняннях (9.29) і (9.30) можна знехтувати другою похідною по часу в порівнянні з першою похідною, в результаті ці рівняння набудуть вид:

$$\Delta\vec{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta\vec{H} - \mu\varepsilon\frac{\partial\vec{H}}{\partial t^2} = 0. \qquad (9.32)$$

Рівняння (9.32) носять назву рівнянь дифузії.

Квазістаціонарна модель з'являється в тому випадку, якщо в першому рівнянні Максвелла знехтувати струмами зміщення $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, зберігаючи похідну магнітного поля по часу (тобто враховуючи електромагнітну індукцію $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$) в другому рівнянні Максвелла.

Стаціонарна модель. Стаціонарним називають електромагнітне поле, що не залежить від часу (всі похідні по часу дорівнюють нулю) [2, 3].

Відповідно рівняння (9.29) і (9.30) записують таким чином:

$$\Delta\vec{E} = 0, \quad \Delta\vec{H} = 0. \qquad (9.33)$$

Тому стаціонарні електричні та магнітні поля в однорідному середовищі за відсутності сторонніх струмів задовольняють рівнянням Лапласа.

Рівняння (9.31) – (9.33) – це класичні рівняння математичної фізики. При цьому рівняння (9.31) і (9.32) описують так звані нестаціонарні (перехідні) процеси, розв'язок яких залежить істотно від початкових умов. Явища встановленої рівноваги за відсутності зовнішніх джерел виражаються рівняннями Лапласа.

9.8. Граничні умови для векторів поля

Рівняння Максвелла постуловані для точок поля, в яких стрибки електромагнітних властивостей середовища відсутні. Проте на межі між пластами (шарами) або областями з різними властивостями параметрами ε, μ, γ можуть змінюватися стрибкоподібно. При цьому згідно з рівняннями зв'язку

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E};\ \vec{B} = \mu\vec{H}\ i\ \vec{j} = \gamma\vec{E}$$

неминуче змінюються стрибками і деякі вектори електромагнітного поля. В результаті в точках границь поділу середовищ рівняння Максвелла в диференціальній формі втрачають зміст. Тому для розв'язку задач електромагнітної індукції в Землі необхідно задати граничні умови, тобто

умови спряження векторів в двох нескінченно близьких точках, що знаходяться по різні сторони від межі поділу середовищ з різними електромагнітними параметрами [2-4].

Відзначимо, що інтегральні аналоги диференціальних рівнянь Максвелла (9.20) за математичним змістом такі, що можуть бути застосовані і до областей (V і S), що вміщують всередині себе межі, на яких вектори поля зазнають розриву (рис. 9.2). Відповідно, ці рівняння можуть бути використані і на межах розділу середовищ.

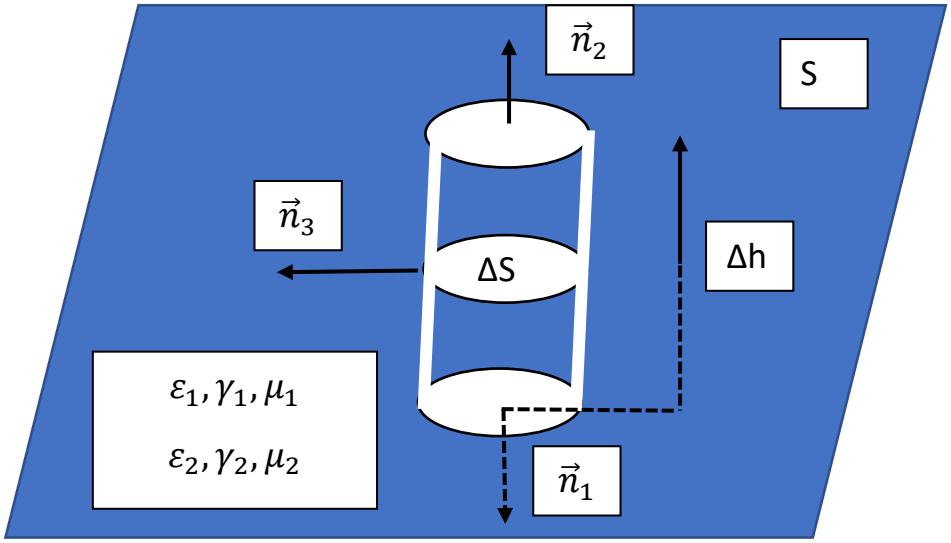

Рис. 9.2. До системи рівнянь (9.20)

Сформулюємо граничні умови для найбільш важливого на практиці випадку, коли деяка гладка поверхня S розділяє два середовища (1) і (2), в кожній з яких параметри ε, μ, γ постійні або змінюються від точки до точки досить повільно, так, що в малому охресті будь-якої точки на границі розділу останню можна вважати плоскою, а параметри – незмінними.

Позначимо через $\vec{n}$ вектор одиничної нормалі до поверхні S в даній точці.

Виберемо в окресті цієї точки на S досить малий елемент ΔS та побудуємо на ньому елементарний циліндр висотою Δh, що захоплює обидві сторони. Під поняттям «досить малий елемент» розуміємо, що ΔS можна вважати

елементом поверхні розділу S, а поле в його межах – однорідним вздовж границі в обох середовищах.

Визначимо спочатку граничні умови для нормальних компонент векторів електромагнітного поля. Приймаючи до уваги рівності

$$div\,\vec{B} = 0, \quad div\vec{D} = \rho, \quad div\overrightarrow{j_{\text{повн.}}} = 0. \tag{9.34}$$

Відзначимо, що вирази для $\vec{B}$ і $\overrightarrow{j_{\text{повн.}}}$ однотипні.

Відповідно, і граничні умови для них будуть однотипними.

Розглянемо компоненту поля $\vec{B}$. За визначенням дивергенція поля вектору $\vec{B}$ в даній точці поля є границя (межа), до якої прямує відношення потоку вектору $\vec{B}$ крізь довільну поверхню, що оточує цю точку, до об'єму ΔV, обмеженому цією поверхнею при $\Delta V \to 0$, тобто:

$$div\,\vec{B} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\int_S \vec{B} dS}{\Delta V} = 0 \tag{9.35}$$

Внаслідок однорідності поля потік вектору $\vec{B}$ крізь верхні і нижні твірні циліндричного об'єму та його бічну поверхню рівний

$$\int_S \vec{B}\,dS = (\overrightarrow{B_1}\overrightarrow{n_1} + \overrightarrow{B_2}\overrightarrow{n_2})\Delta S + \Delta h \int_l \vec{B}\,d\vec{l}=0.$$

Беручи до уваги ту обставину, що $\overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{n} = -\overrightarrow{n_1}, d\vec{l}=n_0\,d\vec{l}$ та $\Delta h \to 0$, отримуємо

$(\overrightarrow{B_1}\overrightarrow{n_1} + \overrightarrow{B_2}\overrightarrow{n_2})\Delta S=0$, звідки $\overrightarrow{B_1}\overrightarrow{n_1} + \overrightarrow{B_2}\overrightarrow{n_2} = 0$ і відповідно

$(\overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1})\,\overrightarrow{n} = 0$

Таким чином,

$$div\,\vec{B} = \vec{n}(\overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1})=0 \tag{9.36}$$

Звідси слідує, що нормальна компонента вектору $\vec{B}$ на межах розділу середовищ завжди неперервна:

$$\overrightarrow{B_1}\overrightarrow{n_1} = \vec{B}_{n_1} = \overrightarrow{B_2}\overrightarrow{n_2} = \vec{B}_{n_2}.$$

З урахуванням однотипності виразів для $div\,\vec{B} = 0$ та , $div\overrightarrow{j_{\text{повн.}}} = 0$ формулу (9.36) можна записати:

$$\left(\overrightarrow{J_1} + \frac{\partial\overrightarrow{D_1}}{\partial t}\right)\overrightarrow{n_1} + \left(\overrightarrow{J_2} + \frac{\partial\overrightarrow{D_2}}{\partial t}\right)\overrightarrow{n_2} = 0 \tag{9.37}$$

Звідси слідує, що нормальна компонента щільності повного струм на межах розділу середовищ теж завжди неперервна:

$$\vec{j}^{(2)}_{\overrightarrow{n},\text{повн.}} - \vec{j}^{(1)}_{\overrightarrow{n},\text{повн.}} = 0.$$

Зокрема, для стаціонарних струмів з рівняння (9.37) слідує, що неперервність нормальної компоненти щільності струму провідності

$\vec{j}^{(2)}_{\overrightarrow{n},\text{повн.}} = \vec{j}^{(1)}_{\overrightarrow{n},\text{повн.}}$.

Знайдемо тепер граничні умови для нормальної компоненти вектору $\vec{D}$:

$$div\vec{D} = \rho = \lim \frac{\int_S \vec{D}\, dS}{\Delta V}.$$

Звідки $\int_S \vec{D}\, dS = \rho \Delta V$, де $\Delta V = \Delta S \Delta h$.

Аналогічно попередньому запишемо:

$\int_S \vec{D}\, dS = (\overrightarrow{D_1}\overrightarrow{n_1} + \overrightarrow{D_2}\overrightarrow{n_2})\Delta S + + \Delta h \int_l \vec{D}\, n_0\, d\vec{l} = (\Delta h \rho)\, \Delta S.$

Будемо необмежено зменшувати висоту циліндру Δh так, щоб на межі при Δh його твірні співпали з елементом граничної поверхні ΔS. Оскільки разом з Δh прямують до нуля бічна поверхня та об'єм циліндру, то в останньому зникає потік вектору $\vec{D}$ крізь бічну поверхню циліндру та, здавалось би, має зникнути і заряд $\Delta q = \Delta V \rho$. Проте, якщо припустити можливість існування мікроскопічно тонкого шару заряду на самій граничній поверхні і, відповідно, цьому виділити в Δq дві його компоненти (заряди в об'ємі та на поверхні), то тоді зникла тільки об'ємна його частина.

Таким чином, будемо мати:

$$div\vec{D} = \vec{n}(\overrightarrow{D_2} - \overrightarrow{D_1}) = \sigma, \qquad (9.38)$$

де $\sigma = \lim_{\Delta h \to 0} (\Delta h\, \rho)$ – поверхнева щільність заряду. Іншими словами, поверхнева дивергенція $\vec{D}$ дорівнює поверхневій щільності заряду:

$$\vec{D}^{(2)}_{\overrightarrow{n},\text{повн.}} - \vec{D}^{(1)}_{\overrightarrow{n},\text{повн.}} = \sigma. \qquad (9.39)$$

Оскільки $\vec{D}^{(2)}_{\overrightarrow{n},\text{повн.}}$ і $\vec{D}^{(1)}_{\overrightarrow{n},\text{повн.}}$- це значення нормальної компоненти $\vec{D}_{\overrightarrow{n},\text{повн.}}$ вектору $\vec{D}$ при підході до межі розділу з боку другого та першого

середовища, то, як легко бачити, нормальна компонента $\vec{D}_{\overrightarrow{n},\text{повн.}}$ зазнає тут розрив, і величина цього розриву (стрибка) дорівнює щільності поверхневого заряду σ. Зокрема, якщо поверхня розділу не несе заряду ($\sigma = 0$), то нормальна компонента $\vec{D}_{\overrightarrow{n},\text{повн.}}$неперервна.

Останню формулу легко переписати відносно напруженості електричного поля $\vec{\text{E}}$, замінивши $\overrightarrow{D_1}$ на $\varepsilon_1\overrightarrow{E_1}$.

Розглянемо в подальшому граничні умови для тангенціальних (дотичних) компонент векторів поля. В цьому випадку будемо виходити з формули:

$$rot\ \vec{a} = -\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \vec{a}\times d\vec{S}}{\Delta V}, \qquad (9.40)$$

що визначає ротор векторного поля $\vec{a}$ за допомогою відношення векторного потоку через (крізь) замкнену поверхню до об'єму, обмеженому цією поверхнею S при $\Delta V \to 0$, взятому з протилежним знаком.

На основі формули (9.40) можна записати:

$$rot\ \vec{E} = -\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \vec{E}\times d\vec{S}}{\Delta V} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.$$

Обчислимо векторний потік вектору $\vec{\text{E}}$ крізь верхню та нижню твірні циліндричного об'єму і його бічну поверхню. Зважаючи на однорідність поля, можна записати:

$$-\oint_S \vec{E}\times d\vec{S} = -\int_S \left(\vec{E}\times\vec{n}\right)\, d\vec{S} =$$

$$= \left(\overrightarrow{n_1}\times\vec{E}_1 + \overrightarrow{n_2}\times\vec{E}_2\right)\Delta S + \Delta h\int_l \left(\overrightarrow{n_0}\times\vec{E}\ \right)d\vec{l} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\Delta S\Delta h,$$

Оскільки $d\vec{S} = \vec{n}dS;\ d\vec{l} = \overrightarrow{n_0}\,dl.$

Спрямовуючи до нуля Δh, знаходимо:

$\left(\overrightarrow{n_1}\times\vec{E}_1 + \overrightarrow{n_2}\times\vec{E}_2\right)\Delta S = 0$, з урахуванням якого отримуємо:

$$rot\ \vec{E} = \vec{n}\times\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) = 0. \qquad (9.41)$$

Векторний добуток нормалі до границі розділу та різниці вектору $\vec{\text{E}}$ по обидві сторони від неї називають поверхневим ротором.

З формули (9.41) слідує, що тангенціальні компоненти вектору $\vec{E}$ завжди неперервні при переході через межу розділу середовищ з різними електромагнітними властивостями.

Знайдемо тепер відповідний вираз для тангенціальної компоненти вектору напруженості магнітного поля $\vec{H}$. Діючи аналогічно, маємо:

$rot\,\vec{H} = -\lim\limits_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \vec{H} \times d\vec{S}}{\Delta V} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, звідси

$$-\oint_S \vec{H} \times d\vec{S} = \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\Delta V;$$

$-\oint_S \vec{H} \times d\vec{S} = \left(\overrightarrow{n_1} \times \vec{H}_1 + \overrightarrow{n_2} \times \vec{H}_2\right)\Delta S + \Delta h \int_l \left(\overrightarrow{n_0} \times \vec{H}\right) d\vec{l}=$

$=(\Delta h\ \mathrm{j})\Delta S+(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\Delta S)$.

Припустимо можливість існування на границі поверхневого струму провідності. Поверхневий струм на S – це такого же роду макроскопічна абстракція, як і поверхневий заряд. Він характеризується щільністю:

$$\vec{\imath} = \lim \frac{\overrightarrow{\Delta I}}{\Delta l}\overrightarrow{n_0},$$

де $\overrightarrow{n_0}$ –одиничний вектор, який вказує напрямок струму, а Δl – елемент лінії, що перетинається струмом $\overrightarrow{\Delta I}$ перпендикулярно.

Поклавши

$$\lim_{\Delta h \to 0}(\Delta h\,\vec{j}) = \vec{\imath}(A/\text{м}),$$

знаходимо

$$\lim_{\Delta h \to 0} \oint_S \vec{H} \times d\vec{S} = \vec{n} \times \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = \vec{\imath},$$

тобто

$$rot\,\vec{H} = \vec{n} \times \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = \vec{\imath}. \qquad (9.42)$$

Рівняння (9.42) - закон Біо-Савара для поверхневих струмів.

Як відомо, щільність поверхневого струму $\vec{\imath}$ відмінна від нуля тільки на поверхні ідеального провідника. У випадку реальних середовищ можна записати:

$$\vec{E}_\tau^{(2)} - \vec{E}_\tau^{(1)} = 0; \qquad \vec{H}_\tau^{(2)} - \vec{H}_\tau^{(1)} = 0, \qquad (9.43)$$

де індексом τ позначена дотична до S компонента поля. Іншими словами, ***дотичні складові вектору магнітного поля $\vec{H}$ неперервні на межі розділу реальних середовищ, а дотичні складові вектору електричного поля $\vec{E}$ неперервні на межі будь-яких середовищ.***

Таким чином, умови сполучення на плоскій межі розділу середовищ з різними фізичними властивостями виражають неперервність тангенціальних компонент напруженості електричного та магнітного полів. Нормальна складова магнітної індукції $\overrightarrow{B}$ неперервна при переході крізь границю розділу середовищ, а нормальна складова електричної індукції $\vec{D}$ зазнає розриву, який дорівнює поверхневій щільності електричного заряду. В загальному випадку, ці умови справедливі і на криволінійних межах розділу.

9.9. Електродинамічні потенціали

В задачах електродинаміки традиційно використовуються допоміжні функції – електродинамічні потенціали [2-4]: векторний потенціал $\vec{\mathrm{A}}$ і скалярний потенціал φ.

Щоб ввести до розгляду ці потенціали звернемося до системи рівнянь Максвела та матеріальних співвідношень. Цілком очевидно, що рівняння $div\ \vec{B} = 0$ буде задовольнятися, якщо покласти:

$$\vec{B} = rot\ \vec{\mathrm{A}} \quad або \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu}\ rot\ \vec{\mathrm{A}}, \qquad (9.44)$$

оскільки $div\ rot\ \vec{\mathrm{A}} \equiv 0$.

Підставляючи значення $\vec{B}$ з (9.44) в рівняння $rot\ \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, отримуємо

$$rot\ \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \qquad (9.45)$$

Звідси слідує, що вектор, який стоїть в круглих дужках, є градієнтом деякої скалярної функції φ ($rot\ grad\ \varphi = 0$).

Відповідно, $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - grad\ \varphi.$ (9.45а)

Підставляючи вирази (9.44) і (9.45а) в перше та третє рівняння Максвелла (9.18) та використовуючи відому векторну тотожність $rot\ rot\ \vec{a} = grad\ div\vec{a} - \Delta\vec{a}$, отримуємо (з урахуванням і областей, що зайняті джерелами електрорушійної сили)

$$\vec{\mathrm{A}} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{\mathrm{A}}}{dt^2} - \mu\gamma\frac{\partial\vec{\mathrm{A}}}{\partial t} - grad\left(div\,\vec{\mathrm{A}} + \varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mu\gamma\varphi\right) = -\mu\vec{j}_{\text{ст}} \qquad (9.46)$$

$$\Delta\varphi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{dt^2} - \mu\gamma\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \qquad (9.47)$$

Враховуючи, що векторний потенціал $\vec{\mathrm{A}}$ визначається з точністю до градієнту деякої скалярної функції ($rot\,\vec{\mathrm{A}} = rot(\vec{\mathrm{A}} + grad\ \varphi)$), потенціали $\vec{\mathrm{A}}$ і φ завжди можна вибрати таким чином, щоб виконувалася умова:

$$div\,\vec{\mathrm{A}} + \varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mu\gamma\varphi = 0. \qquad (9.48)$$

Це і є калібрувальне співвідношення (нормування) Лоренца [4]. При такому нормуванні рівняння (9.46), (9.47) зводяться до двох окремих рівнянь другого порядку відносно векторного та скалярного потенціалів:

$$\begin{cases} \Delta\vec{\mathrm{A}} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{\mathrm{A}}}{dt^2} - \mu\gamma\frac{\partial\vec{\mathrm{A}}}{\partial t} = -\mu\vec{j}_{\text{ст}} \\ \Delta\varphi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{dt^2} - \mu\gamma\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \end{cases} \qquad (9.49)$$

Таким чином, напруженості поля $\vec{E}$ і $\vec{H}$ можуть бути знайдені, якщо попередньо визначені електродинамічні потенціали $\vec{\mathrm{A}}$ і φ як розв'язки рівнянь (9.49). Відповідно, що напруженість $\vec{E}$ згідно (9.45) складається з двох компонент або складових:

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{вихр}} + \vec{E}_{\text{потен}},$$

де $\vec{E}_{\text{вихр}} = \frac{\partial\vec{\mathrm{A}}}{\partial t}$, а $\vec{E}_{\text{потен}} = grad\ \varphi.$

$\vec{E}_{\text{вихр}}$ визначає вихрові струми, які індукуються в провідному середовищі, а $\vec{E}_{\text{потен}}$ визначають гальванічні струми, що виникають за рахунок електричних зарядів.

9.10 Вектор Герца

Розв‘язок неоднорідних хвильових рівнянь (9.49) при відповідних граничних і початкових умовах є фундаментальною проблемою геофізичних застосувань електромагнітної теорії. Проте, деякі конкретні задачі геоелектрики можуть бути розв‘язані більш просто за допомогою одного потенціалу (вектору Герца), за допомогою якого можуть бути визначені і електрична, і магнітна компоненти електромагнітного поля.

Припустимо, що скалярний потенціал φ може бути представлений через деяку вектор-функцію $\vec{Z}$ співвідношенням:

$$\varphi = div\,\vec{Z}. \tag{9.50}$$

Підставивши це співвідношення для φ в калібрувальне співвідношення Лоренца (9.48), останнє можна переписати в формі рівності:

$$div\,\left(\vec{\mathrm{A}} + \mu\gamma\vec{Z} + \varepsilon\mu\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t}\right) = 0,$$

Його тривіальним розв‘язком буде $\vec{\mathrm{A}} + \mu\gamma\vec{Z} + \varepsilon\mu\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t} = 0$, звідки

$$\vec{\mathrm{A}} = -\mu\gamma\vec{Z} - \varepsilon\mu\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t}. \tag{9.51}$$

Підставивши останню рівність в рівняння для вектор-потенціалу $\vec{\mathrm{A}}$ з (9.49), в якому для спрощення викладок приймемо, що $\vec{j}_{\text{ст}} = 0$, знаходимо:

$$-\mu\gamma\Delta\vec{Z} - \varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\Delta Z} = \mu\gamma\left[-\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{Z}}{dt^2}\right] + \varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\left[-\mu\gamma\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{Z}}{dt^2}\right].$$

Після групування складових останнього рівняння у формі

$$\gamma\left(\overrightarrow{\Delta Z} - \mu\gamma\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{Z}}{dt^2}\right) + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\Delta Z} - \mu\gamma\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{Z}}{dt^2}\right) = 0.$$

І, вводячи позначення,

$$U = \overrightarrow{\Delta Z} - \mu\gamma\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{Z}}{dt^2}, \tag{9.52}$$

отримуємо $\gamma U + \varepsilon\frac{\partial U}{\partial t} = 0$.

Розв‘язок цього диференціального рівняння, як легко впевнитися прямою підстановкою, має вигляд:

$$U = U(0)e^{(-\gamma)/\varepsilon t} = U(0)e^{-t/\tau},$$

де $\tau = \frac{\varepsilon}{\gamma}$, $U(0) = U|_{t=0}$.

Таким чином, для усталеного процесу в провідному середовищі (при $t \to \infty$) маємо телеграфне рівняння того ж самого типу для вектору-функції $\vec{Z}$, що й для вектор-потенціалу $\vec{A}$:

$$\mu\gamma\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{Z}}{dt^2} = 0. \qquad (9.53)$$

Залишається лише визначити значення напруженостей електричного та магнітного полів ($\vec{E}$ і $\vec{H}$) через вектор-функцію $\vec{Z}$.

З цією метою скористаємося відомими нам співвідношеннями:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\, rot\, \vec{A}, \qquad (I)$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - grad\, \varphi. \qquad (II)$$

$$\vec{A} = -\mu\gamma\vec{Z} - \varepsilon\mu\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t} \qquad (III)$$

$$\varphi = div\, \vec{Z} \qquad (IV)$$

Підставляючи рівняння (III) в рівняння (I), знаходимо:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}(-\mu\gamma\, rot\, \vec{Z} - \varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t} rot\, \vec{Z}) = -(\varepsilon\frac{\partial}{\partial t} + \gamma) rot\, \vec{Z} \qquad (9.54)$$

Далі, підставляючи рівняння (III) і (IV) в рівняння (II), отримуємо:

$$\vec{E} = \mu\gamma\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t} + \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{Z}}{dt^2} - grad\, div\, \vec{Z} = \overrightarrow{\Delta Z} - grad\, div\, \vec{Z} = rot\, rot\vec{Z}\,. \qquad (9.55)$$

Відповідно, у випадку усталеного процесу в провідному середовищі напруженості електричного і магнітного полів можуть бути визначені через вектор-функцію $\vec{Z}$ (вектор Герца) використовується для опису хвильових процесів, коли мать місце струми зміщення. У випадку квазістаціонарного наближення згідно з рівнянням (9.51):

$$\vec{A} = -\mu\gamma\, \vec{Z}.$$

9.11 Граничні умови для електродинамічних потенціалів

Як було вже встановлено, умови узгодження на плоскій межі розділу середовищ виражають неперервність тангенціальних складових напруженостей електричного і магнітного полів при переході через неї, а також неперервність нормальної складової магнітної індукції $\vec{B}_n$ і нормальної компоненти щільності повного струму $\vec{j}_{\vec{n}\ \text{повн}}$. Ці співвідношення і є вихідними при завданні граничних умов для потенціалів. Так як згідно з умовами (9.44) та (9.45):

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\, rot\, \vec{\mathrm{A}}, \qquad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - grad\, \varphi,$$

то, беручи до уваги відому рівність

$$rot\, \vec{\mathrm{A}} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k},$$

знаходимо з урахуванням граничних умов для компонент магнітного поля, що

$$\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)_1 = \frac{1}{\mu_2}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)_2;$$

$$\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y}\right)_1 = \frac{1}{\mu_2}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)_2.$$

Відповідно з урахуванням граничних умов для тангенціальних компонент електричного поля:

$$\frac{\partial A_{x1}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial A_{x2}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \quad : \quad \frac{\partial A_{y1}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{\partial A_{y2}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\ .$$

Представлені рівності для компонент магнітного та електричного полів будуть виконані, якщо покласти:

$$A_{x1}=A_{x2}; \quad A_{y1} = A_{y2}; \quad \frac{1}{\mu_1}A_{z1} = \frac{1}{\mu_2}A_{z2}; \quad \varphi_1 = \varphi_2;$$

$$\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial A_{x1}}{\partial z} = \frac{1}{\mu_2}\frac{\partial A_{x2}}{\partial z}; \quad \frac{1}{\mu_1}\frac{\partial A_{y1}}{\partial z} = \frac{1}{\mu_2}\frac{\partial A_{y2}}{\partial z}.$$

У тому випадку, якщо середовища не диференційовані за магнітною проникністю, ці рівності спрощуються і приймають наступний вид:

$$A_{x1}=A_{x2}; \qquad \frac{\partial A_{x1}}{\partial z} = \frac{\partial A_{x2}}{\partial z};$$

$$A_{y1} = A_{y2}; \qquad \varphi_1 = \varphi_2;$$

$$A_{z1} = A_{z2}; \qquad \frac{\partial A_{y1}}{\partial z} = \frac{\partial A_{y2}}{\partial z}.$$

Таким чином, на межі розділу двох немагнітних середовищ неперервні всі три компоненти вектору-потенціалу $\vec{A}$, тобто $[\vec{A}] = 0$. Неперервні також вертикальні похідні тангенціальної компоненти вектору-потенціалу $\vec{A}\left(\left[\frac{\partial A_\tau}{\partial z}\right] = 0\right)$ і скалярний потенціал $\varphi([\varphi] = 0)$.

9.12 Гармонійні коливання та рівняння електродинаміки в комплексній формі

В електродинаміці важливе значення мають електромагнітні процеси, що змінюються в часі за гармонійним законом з круговою частотою ω [2-4]. Гармонійні електромагнітні поля – це поля, часовий закон зміни яких відбувається за законами синусу або косинусу. Вочевидь, питання не тільки в тому, що гармонічні коливання представляють першочерговий практичний інтерес, але і в тому, що іншого роду часові залежності можуть бути розкладені за гармонічними коливаннями у вигляді рядів або інтегралу Фур‘є. Інтеграл Фур‘є є суперпозицією нескінченного числа гармонічних хвиль, що складають в початковий момент часу вихідну часову функцію $f(t)$:

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

У випадку однієї гармоніки:

$$A(t) = A_0 \left\{ \begin{matrix} sin \\ cos \end{matrix} \right\} (\omega t + \varphi), \qquad (9.56)$$

де $A(t)$ – миттєве значення компоненти поля, що розглядається;

A_0 – амплітудне значення;

$\omega = {}^{2\pi}/_{T}$ – циклічна (кругова) частота;

T – період;

φ – початкова фаза.

Для математичного опису електромагнітних коливань, що змінюються в часі за гармонійним законом (9.56) з круговою частотою ω використовується метод комплексних амплітуд.

Суть цього методу полягає в тому, що деякій фізичній величині A(t) , що змінюється за гармонічним законом з циклічною частотою ω, яка має початкову фазу φ та амплітуду A (9.56), ставиться у відповідність деяка комплексна величина, яка називається комплексною амплітудою. При цьому комплексна форма запису базується на формулі Ейлера:

$e^{+ix} = cosx + isin\,x$, де $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця, або

$$e^{\pm i(\omega t+\varphi)} = \cos(\omega t + \varphi) \pm isin\,(\omega t + \varphi) \qquad (9.57)$$

У відповідності з цією рівністю гармонічне коливання (9.56) може бути представлено у формі:

$$A(t) = A_0[\cos(\omega t + \varphi) \pm isin\,(\omega t + \varphi)] = A_0 e^{\pm i(\omega t+\varphi)} \qquad (9.58)$$

$$\text{Тобто якщо} \quad A(t) = A_0\,sin\,(\omega t + \varphi), \text{то}\ A(t) = \pm\, Im\left[A_0 e^{\pm i(\omega t+\varphi)}\right],$$
$$\text{якщо} \quad A(t) = A_0\,cos\,(\omega t + \varphi), \text{то} \quad A(t) = \pm\, Re\left[A_0 e^{\pm i(\omega t+\varphi)}\right]. \qquad (9.59)$$

Таким чином, будь-яке гармонічне коливання може бути представлено як дійсна та уявна частини комплексного коливання.

В свою чергу, комплексне коливання (9.58) зручно представити у вигляді:

$$A(t) = A_0 e^{\pm i(\omega t+\varphi)} = \left(A_0 e^{\pm i\varphi}\right)e^{\pm i\omega t} = Ae^{\pm i\omega t}, \qquad (9.60)$$

де $A=A_0 e^{\pm i\varphi}$ – комплексна амплітуда, причому $A_0 = |A|,\ \varphi = \pm argA$.

Очевидно, що при $\varphi = 0 \quad A = A_0$. Якщо за гармонічним законом змінюється векторна величина, то комплексна амплітуда вводиться аналогічно, і буде при цьому теж векторною.

Потрібно відзначити, що в електротехніці залежність від часу виражається експоненціальним множником $e^{i\omega t}$ [4]. В електромагнітних задачах часовий закон звичайно задається у виді: $e^{-i\omega t}$.

Розглянемо, який вид будуть набувати рівняння Максвелла, якщо вектори поля змінюються за гармонічним законом $e^{-i\omega t}$.

$$\begin{cases} \vec{E}(t) = \vec{E}e^{-i\omega t} & \vec{H}(t) = \vec{H}e^{-i\omega t} \\ \vec{D}(t) = \vec{D}e^{-i\omega t} & \vec{B}(t) = \vec{B}e^{-i\omega t} \end{cases} \quad (9.61)$$

Переходячи до комплексних векторних амплітуд $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B}$, знаходимо:

$$\begin{cases} rot\ \overrightarrow{H} = \vec{j} - i\omega\vec{D}, & rot\ \vec{E} = \omega\vec{B}, \\ div\ \vec{B} = 0, & div\ \omega\vec{D} = \rho. \end{cases} \quad (9.62)$$

Таким чином, рівняння (9.62) відносно комплексних векторних амплітуд слідують з рівнянь Максвелла заміною векторів поля їхнім комплексними векторними амплітудами і оператора диференціювання за часом $\frac{\partial}{\partial t}$ оператором множенням на $k\omega$.

У випадку однорідного ізотропного провідного середовища

$$(\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \vec{B} = \mu\vec{H},\ \vec{j} = \gamma\vec{E})$$

рівняння (9.62) набувають вигляд:

$$rot\ \overrightarrow{H} = (\gamma - k\omega\varepsilon)\vec{E} = -k\omega\varepsilon'\vec{E} = \gamma'\vec{E}, \quad rot\ \vec{E} = k\omega\,\mu\vec{H};$$
$$div\ \overrightarrow{H} = 0; \qquad div\ \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (9.63)$$

де $\gamma' = \gamma - k\omega\varepsilon$ – комплексна провідність, дійсна частина обумовлена струмами провідності $\gamma\vec{E}$, а уявна – струмами зміщення $k\omega\varepsilon'\vec{E}$; $\varepsilon'(1 + i\frac{\gamma}{\omega\varepsilon})$ – комплексна діелектрична проникність.

Величина $\frac{\gamma}{\omega\varepsilon} = \left|\frac{\vec{j}_{\text{пр}}}{\vec{j}_{\text{зм}}}\right|$ називається електродинамічним коефіцієнтом середовища при заданій частоті (або тангенс кута електричних втрат $tg\alpha = \frac{\gamma}{\omega\varepsilon}$).

Відзначимо, що застосування метода комплексних амплітуд не тільки приводить до вилучення часової залежності з рівнянь Максвелла, але й дозволяє істотно розширити фізичний зміст деяких понять.

Насамперед це пов’язано з можливістю чисто формального, на перший погляд, розглядати значення всіх параметрів рівнянь вже не в межах дійсної осі, а на комплексній площині. Це особливо актуально для проникностей ε і μ та має важливе значення для деяких задач розвідувальної геофізики.

Розглянемо також диференціальні рівняння другого порядку відносно комплексних амплітуд напруженостей поля $\vec{H}$ і $\vec{E}$ та виразів

електродинамічних потенціалів. Переходячи в телеграфних рівняннях (9.28) та (9.30) до комплексних амплітуд $\vec{H}$ і $\vec{E}$, отримуємо:

$$\Delta\vec{E} - k^2\vec{E} = 0, \qquad \Delta\vec{H} - k^2\vec{H} = 0, \tag{9.64}$$

де k^2- $\omega\gamma'\mu = -\omega^2\mu\varepsilon'$.

Комплексна величина $k = \sqrt{-i\omega\gamma'\mu} = k_1 - ik_2$ (9.65)

називається ***хвильовим числом***, або постійною розповсюджування, та відіграє важливу роль при дослідженні електромагнітних процесів в матеріальних середовищах.

Наведемо диференціальне рівняння другого порядку відносно комплексної амплітуди $\vec{A}$ векторного потенціалу. Згідно з формулою (9.49) маємо:

$$\Delta\vec{A} = k^2\vec{A} = -\mu\vec{j}_{\text{стор.}} \tag{9.66}$$

Комплексні амплітуди поля виражаються через комплексну амплітуду $\vec{A}$ за формулами:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}rot\vec{A}\ ; \quad \vec{E} = i\,\omega\vec{A} - \frac{i\,\omega}{k^2}grad\ div\,\vec{A}, \tag{9.67}$$

в яких враховано, що за умови (9.48)

$$div\,\vec{A} = \mu(-\gamma + i\omega\varepsilon)\varphi = i\omega\varepsilon\mu\varphi, \text{ а}$$

$$\varepsilon' = \varepsilon(1 + i\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}), \text{ звідки } \varphi = -\frac{i}{\mu\omega\varepsilon}div\,\vec{A}$$

9.11. Хвильове число

Розглядаючи рівняння Максвелла в комплексній формі, було встановлено, що компоненти поля (9.64) і векторний потенціал ($\vec{J}_{\text{стор.}}$ – (9.66)) задовільнять рівнянню Гельмгольца.

При цьому вплив середовища на структуру електромагнітного поля описується квадратом хвильового числа k – постійної розподілу (9.65):

$$k^2 = -i\omega\gamma'\mu = -\omega^2\mu\varepsilon(1 + i\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}) \tag{9.68}$$

Якщо провідність середовища $\gamma = 0$, то k^2 є дійсним числом, і має місце хвильовий процес. Якщо k^2 – уявна величина, то має місце дифузійний процес. При комплексній величині k^2 рівняння описують накладання хвильового і дифузійного процесів.

Припускаючи, що $k = b - ia, k^2 = b^2 - a^2 - i2ab,$ то, беручи до уваги рівняння (9.68), маємо:

$$Re\, k^2 = b^2 - a^2 = -\omega^2\mu\varepsilon, \qquad Im\, k^2 = 2ab = -\omega\gamma'\mu \quad (9.69)$$

З останнього рівняння слідує, що знаки у a і b – різні. В силу неоднозначності радикалу у формулі $k = \sqrt{-i\omega\gamma'\mu} = k_1 - ik_2$ звичайно обирають ту його гілку, яка відповідає від'ємній уявній частині хвильового числа k.

Розв'язуючи систему рівнянь (9.69), отримуємо:

$$b = \sqrt{\frac{\omega^2\varepsilon\mu}{2}\left[\sqrt{(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon})^2 + 1} - 1\right]}, a \quad a = -\sqrt{\frac{\omega^2\varepsilon\mu}{2}\left[\sqrt{(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon})^2 + 1} + 1\right]}. \quad (9.70)$$

На комплексній площині k^2 можна представити у виді вектору, модуль якого зміщений відносно уявної осі на кут δ:

$$|k^2| = \sqrt{(Rek^2)^2 + (Im\, k^2)^2}$$

$$tg\ \delta = \frac{Im\, k^2}{Rek^2} = \frac{\gamma}{\omega\varepsilon}. \qquad (9.71)$$

Величина $tg\ \delta$ називається ***тангенсом кута втрат***. Вочевидь, найменші втрати електромагнітної енергії відбуваються в породах з малою питомою провідністю γ, коли струми зміщення переважають над струмами провідності. При $\gamma = 0$ квадрат хвильового числа є дійсною величиною:

$$k^2 = -\omega^2\mu\varepsilon, b = 0, a = -\omega(\varepsilon\mu)^{\frac{1}{2}}.$$

В реальних середовищах і діапазоні частот, що типові для геоелектрики, переважну роль відіграють токи провідності. В цьому випадку

$$k^2 \approx -i\omega\gamma'\mu; \quad k = \sqrt{-i\omega\gamma'\mu} = \sqrt{-i}\sqrt{i\omega\gamma'\mu} \qquad (9.72)$$

Щоб взяти корінь з (-i) представимо цю величину в експоненціальній формі, скориставшись формулою Ейлера:

$$\sqrt{-i} = \sqrt{e^{-i\frac{\pi}{2}}} = e^{-i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} - i\,sin\frac{\pi}{4} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

Таким чином, $k = \sqrt{-i\omega\gamma\ \ \mu} = \sqrt{\frac{\gamma\omega\mu}{2}}(1-i)$.

Тоді $a = b = \sqrt{\frac{\gamma\omega\mu}{2}}$.

Визначимо розмірність хвильового числа k, враховуючи, що

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ (де Т – період в секундах);

$\gamma\left[\frac{1}{\text{Ом м}}\right], \quad \mu\left[\frac{\text{Ом с}}{\text{м}}\right]$.

Таким чином, розмірність хвильового числа k $м^{-1}$.

9.12 Міжнародна система електромагнітних одиниць

Міжнародна система електромагнітних одиниць прийнята в 1963 році. Тоді були прийняті такі одиниці для електромагнітних вимірювань:

1. l = 1 м – довжини;
2. $t = 1\ c$ – часу;
3. $m = 1$ кг – маси;
4. $I = 1\ A$ – сили струму.

Всі інші величини є похідними від означених чотирьох.

За одиницю **заряду** в системі СІ прийнято Кулон. Один Кулон – це заряд, що проходить за 1 секунду через поперечний переріз провідника, струм якого дорівнює 1А.

Діелектрична та магнітна проникності:

$\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\,\pi}\left[\frac{\Phi}{\text{м}}\right]$;

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\left[\frac{\text{Гн}}{\text{м}}\right]$.

За одиницю **потенціалів** в 1В приймається така різниця потенціалів, за якої переміщенню заряду в 1Кл необхідна робота в 1 Дж.

$E = \left[\frac{\text{В}}{\text{м}}\right]; \quad \Delta V = [\text{В}]; \quad 1B = \left[\frac{\text{Дж}}{\text{Кл}}\right]$

Опір, при якому при струмі в 1А різниця потенціалів на точках виміру складає 1В.

$R = [\text{Ом}]; \ 1\ \text{Ом} = \left[\frac{1\ \text{В}}{1\ \text{А}}\right].$

Провідність – величина, що обернена до опору (Сіменс).

$\gamma = \frac{1}{R} = \left[\frac{1}{\text{Ом}}\right] = [\text{Сі}]$

Питомий електричний опір

$\rho = \left[\frac{\text{Ом}}{\text{м}}\right]$

Напруженість електричного поля $E = \left[\frac{\text{В}}{\text{м}}\right].$

За одиницю напруженості магнітного поля приймається напруженість такого магнітного поля, індукція якого у вакуумі дорівнює $4\pi \cdot 10^{-7}\left[\frac{\text{Гн}}{\text{м}}\right]$.

Напруженість магнітного поля $H = \left[\frac{\text{А}}{\text{м}}\right].$

Індукція електричного поля $D = \left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}\right].$

Індукція магнітного поля $B = \left[\frac{\text{Вб}}{\text{м}^2}\right] = \left[\frac{\text{Ом с}}{\text{м}^2}\right] = [\text{Тл}].$

Щільність струму $j = \left[\frac{A}{\text{м}^2}\right].$

Потік вектору магнітної індукції $\Phi = [\text{Вб}] = [\text{Тл м}^2]$.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Бізюк В.В. Елементи теорії поля – Харків: ХНУМГ імені Бекетова, 2020 – 76 с.
2. Булах Е.Г., Шуман В.Н. Основы векторного анализа и теория поля.– Киев: Наукова думка, 1998. – 359 с.
3. Кузьменко Е. Д., Рева М. В. Теорія поля. – Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2014. – 410 с.
4. Москалюк В.О., Саурова Т.А. Теорія поля – Київ: Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут іменіІгоря Сікорського, 2018. – 244 с.
5. Полянська Т. С., Чорна О. С. Теорія поля: навч.-метод. посіб. Харків: НТУ ХПІ», 2019. – 76 с
6. Сачанюк- Кавецька Н.В. , Ковальчук М.Б. Вища математика. Елементи теорії поля .- Вінниця: ВНТУ, 2019. – 116 с.
7. Ткаченко Ю.Ф., Федоришин Д.Д., Федорів В.В., Лизун С.О. Теорія поля. – Ів.- Франківськ: Факел, 2006. – 106 с.