

Безродний Д.А.,
Безродна І.М.

Гравіметрія

(в трьох книгах)

Теорія.
Апаратура і методика.
Застосування

Київ - 2022

ННІ «ІНСТИТУТ ГЕОЛОГІЇ»
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ГРАВІМЕТРІЯ

Теорія.
Апаратура і методика.
Застосування

для студентів спеціальностей
103 – «Науки про Землю»
193 «Геодезія і картографія»

Затверджено вченою радою
ННІ «Інститут геології»
«19» жовтня 2022 року

Київ - 2022

Підручник «Гравіметрія. Теорія.
Апаратура і методика. Застосування» для студентів спеціальностей
103 – «Науки про Землю», 193 «Геодезія і картографія» /
Упорядники – доц. Безродний Д.А., доц. Безродна І.М. –
електронний ресурс, 2022 – 477 с.

Рецензенти - проф., докт. геол. н. Вижва С.А.,
проф., докт. геол.н. Орлюк М.І.

Зміст

ВСТУП	14
Книга 1. Теоретичні основи	16
1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЇ ГРАВІМЕТРІЇ	17
1.1. Історичний розвиток гравіметрії	17
1.1.1. Теоретичні основи (17 - 18 ст.)	18
1.1.2. Маятникові вимірювання та їх застосування в геодезії і геофізиці (17 – 18 ст.)	20
1.1.3. Спостереження з крутильними вагами та гравіметрами та їх застосування в прикладній геофізики (перша половина 20 ст.)	25
1.1.4. Створення гравіметричних мереж, геодезичні і геофізичні результати (друга половина 20 ст., початок 21 ст.)	30
1.1.5. Сучасний стан гравіметричної вивченості України	36
1.2. Закон Всесвітнього тяжіння. Гравітаційна стала G	39
1.3. Сила тяжіння та її складові. Напруженість гравітаційного поля	42
1.4. Вага	44
1.5. Невагомість	47
1.6. Космічні швидкості	48
1.7. Прискорення сили тяжіння та потенціал сили тяжіння	52
1.8. Еквіпотенціальні (рівневі) поверхні	55
1.9. Геоїд	60
1.10. Нормальне гравітаційне поле Землі	63
1.11. Другі похідні потенціалу сили тяжіння. Одиниці вимірювання других похідних	67

1.12. Кривизни та їхня роль в гравіметрії	70
1.13. Нормальні значення других похідних потенціалу сили тяжіння	72
1.14. Аномалії сили тяжіння	74
1.15. Зв'язок між похідними гравітаційного та магнітного потенціалів	76
2. РЕДУКЦІЇ СИЛИ ТЯЖІННЯ	80
2.1. Необхідність та сенс введення редукцій	80
2.2. Редукція у вільному повітрі	82
2.3. Поправка за денний рельєф місцевості	84
2.4. Редукція Буге	87
2.5. Редукція Прея	89
2.6. Тимчасові зміни сили тяжіння	91
2.7. Припливні зміни сили тяжіння	93
2.8. Неприпливні зміни сили тяжіння	102
2.9. Вікові зміни сили тяжіння	103
3. Фізико-математичні основи теорії сили тяжіння	104
3.1. Поле тяжіння і рішення прямої задачі	104
3.2. Різні типи мас і їх густини	109
3.3. Дві фундаментальні властивості поля тяжіння	112
3.3.1. Незалежність інтеграла <i>lgdl</i> від шляху інтегрування	112
3.3.2. Зв'язок між потоком поля тяжіння і його джерелами (масами)	115
3.4. Система рівнянь поля тяжіння	117
3.5. Рівняння Лапласа і Пуассона	121

3.6. Потенціал та його зв'язок з масами	123
3.7. Фундаментальні розв'язки рівнянь Пуассона та Лапласа	125
3.8. Теорема єдності і розв'язок прямої задачі	130
3.8.1.Крайова задача першого роду	133
3.8.2.Крайова задача другого роду	135
3.8.3.Крайова задача третього роду	136
3.8.4.Крайова задача четвертого роду	137
3.9.Формула Гріна і співвідношення між потенціалом і граничними умовами	139
3.10. Аналітичне продовження поля в верхній напівпростір	142
3.11. Інтеграл Пуассона	146
3.12.Поведінка поля притягання	149
3.12.1.Поле притягання сферичної маси	149
3.12.2.Поле притягання тонкого сферичного шару	153
3.12.3. Оцінка маси довільного тіла	154
3.12.4. Нормальна компонента поля притягання, що створена плоскими поверхневими масами	155
3.13. Функції Лежандра та розв'язок рівняння Лапласа	159
3.13.1. Розклад функції $1R$ в степеневі ряди	159
3.13.2. Рівняння Лапласа та функції Лежандра	161
4. Притягання тіл правильної форми	164
4.1. Притягання сферичного шару і кулі	164
4.2. Притягання горизонтального відрізка і лінії	168
4.3. Притягання диска, шару, циліндра і конуса	170
5. Густина гірських порід	177
5.1. Густина магматичних порід	178

5.2. Густина метаморфічних та ультраметаморфічних порід	181
5.3. Густина осадових порід	185
КНИГА 2. АПАРАТУРА І МЕТОДИКА ГРАВИМЕТРИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ	190
6. Основні теоретичні принципи побудови гравіметрів	191
6.1. Балістичний метод абсолютних вимірювань прискорення сили тяжіння	191
6.2. Основні принципи пристрою балістичного гравіметра	192
6.2.1 . Рівняння руху	193
6.2.2. Методи польових вимірювань	195
6.2.2.1. Несиметричний рух	195
6.2.2.2 Симетричний рух	196
6.3. Сучасні прилади для вимірювань балістичним методом	199
6.4 Точність абсолютного вимірювання прискорення сили тяжіння балістичним методом і джерела похибок методу	204
6.5. Маятникові пристрої	208
6.5.1 . Коливання з малою амплітудою	209
6.5.2 . Коливання з довільною амплітудою	211
6.5.3. Фізичний маятник. Рівняння руху	215
6.5.4. Реверсивний маятник	218
6.6. Практичне застосування маятникового методу	221
6.6.1. Поправка за амплітуду коливань	223
6.6.2. Поправка за температуру	224
6.6.3. Поправка за густину навколишнього середовища	226
6.6.4. Поправка за частоту кварцового генератора	226
6.6.5. Поправка Венінга-Мейнеса	227

6.6.6. Вплив електромагнітних полів на період коливання маятника	228
6.6.7. Маятникові прилади для відносних вимірювань прискорення сили тяжіння	229
6.6.8. Оцінка точності досліджень за допомогою маятникового методу	231
6.7. Металічні гравіметри	233
6.8. Надпровідні гравіметри	235
6.9. Квантовий гравіметр	238
7. Відносні вимірювання сили тяжіння	242
7.1. Система «вертикальна пружина – маса»	242
7.2. Вертикальні пружинні терези	242
7.2.1. Механічна чутливість системи	244
7.2.2. Рівняння вільних коливань маси	245
7.2.3. Граничний випадок, $n = 0$	247
7.2.4. Три типи затухання вільних коливань	248
7.2.5. Вимушені коливання	249
7.2.6. Механічна чутливість і стійкість системи «вертикальна пружина – маса»	251
7.2.7. Стійкість вертикальної пружинно-масової рівноваги	253
7.3. Пружина з початковим стисненням і закон Гука	254
7.4. Обертальна система «пружина – маса»	258
7.4.1. Три типи точок рівноваги	260
7.4.2. Рівняння обертання маси	261
7.4.3. Механічна чутливість крутильних терезів	263
7.5. Важільна система «пружина – маса»	264

7.5.1. Система пружин з нульовим вантажем	266
7.5.2. Про вимірювання в присутності високочастотних завад	267
7.6. Загальні відомості про статичні гравіметри	268
7.7. Класифікація гравіметрів	271
7.8. Теорія механічних гравіметрів. Чутливість гравіметра	273
7.9. Вплив температури і атмосферного тиску на пружну систему гравіметра	275
7.10. Вплив нахилу гравіметра	278
7.11. Вплив магнітного та електричного полів і мікросейсмічних коливань ґрунту	279
7.12. Дослідження, регулювання і визначення основних характеристик гравіметрів	280
7.12.1. Регулювання оптичної системи	280
7.12.2. Регулювання рівнів на мінімум чутливості до кута нахилу	281
7.12.3. Контроль чутливості гравіметра	284
7.12.4. Визначення часу стабілізації відліку	284
7.12.5. Еталонування гравіметрів	285
7.12.5.1. Еталонування гравіметрів на полігоні	286
7.12.5.2. Еталонування гравіметрів методом нахилу	288
7.12.5.3. Еталонування гравіметрів методом навішування додаткових тягарців	290
7.12.6. Дослідження нелінійності відлікової шкали гравіметра	291
7.12.7. Визначення температурної характеристики і температурного коефіцієнта	292

7.12.8. Розрахунок діапазону вимірювань і його зміни	294
7.13. Методика вимірювань статичними гравіметрами	294
7.14. Сучасні типи статичних гравіметрів	296
7.14.1. Автоматизовані гравіметри	297
7.14.2. Кварцові гравіметри ГНУК-В, ГНУК-С, ГАГ-2	301
7.14.3. Кварцові гравіметри Уорден, Шарп, Содін	304
7.14.4. Металеві астазовані гравіметри "Північна Америка" та Лакоста-Ромберг	305
7.14.5. Неастазовані металеві гравіметри фірми Асканія- Верке	307
8. МЕТОДИКА ПОЛЬОВИХ ГРАВИМЕТРИЧНИХ СПОСТЕРЕЖЕНЬ	308
8.1. Світова опорна гравіметрична мережа	308
8.2. Світова абсолютна гравіметрична мережа (IAGBN)	310
8.3. Опорні і рядові гравіметричні мережі	311
8.4. Національні гравіметричні мережі. Національна гравіметрична мережа України	316
8.5. Методика зйомки і обробка результатів	321
8.5.1. Методика гравіметричних зйомок	321
8.5.2. Наземна гравіметрична зйомка	322
8.5.3. Похибка зйомки	325
8.5.4. Обробка даних гравіметричних зйомок	327
9. ВИМІРЮВАННЯ ДРУГИХ ПОХІДНИХ ПОТЕНЦІАЛУ СИЛИ ТЯЖІННЯ	329
9.1. Результативна сила та момент	329
9.2. Рівняння рівноваги та руху	330
9.3. Другі похідні гравітаційного потенціалу	333
9.4. Рівняння рівноваги в системі координат Θ, η, ζ	334

9.5. Прилади для вимірювання других похідних сили тяжіння	336
9.5.1. Будова гравітаційних варіометрів. Техніка спостережень з варіометрами та градієнтометрами. Визначення їхніх сталих	336
9.5.2. Обробка результатів варіометричних спостережень	341
9.6. Про можливість вимірювання вертикального градієнта сили тяжіння	347
10. ВИМІРЮВАННЯ ПРИСКОРЕННЯ СИЛИ ТЯЖІННЯ НА МОРІ І В ПОВІТРІ	348
10.1. Ефект Етвеша	351
10.2. Вимірювання сили тяжіння на морі методом Венінга – Мейнеса	354
10.3. Статичний спосіб вимірювання прискорення сили тяжіння на морі	356
10.4. Гравіметрична зйомка на морі	357
10.5. Обробка результатів вимірювань з морськими гравіметрами	360
10.6. Вимірювання сили тяжіння в повітрі	361
Книга 3. Застосування гравіметрії	364
11. ЗАГАЛЬНІ СФЕРИ ЗАСТОСУВАННЯ ГРАВІМЕТРІЇ	365
12. Застосування гравіметрії при вирішенні геодезичних задач	372
12.1 Визначення фігури геоїда	372
12.1.1 Збурюючий потенціал	372
12.1.2 Крайові задачі Діріхле для сфери	374
12.1.3 Крайові задачі Неймана	375
12.1.4 Змішана крайова задача	376
12.1.5 Визначення висот геоїда	377

12.1.6 Визначення ухилень схилу	379
12.2. Квазігеоїд Молоденського	382
12.2.1 Критика класичної теорії Стокса	382
12.2.2 Система висот	383
12.2.3 Крайові умови задачі Молоденського	387
12.3. Визначення стиснення Землі за результатами гравіметричних вимірів	389
12.4. Врахування неоднорідності гравітаційного поля в результатах геодезичних вимірів	391
12.5. Врахування неоднорідностей гравітаційного поля в інженерній геодезії	394
12.6. Диференціальний метод визначення аномалій висот та ухилень схилу за вимірами сили тяжіння та других похідних потенціалу сили тяжіння	398
12.7. Вплив варіацій гравітаційного поля на результати повторних геодезичних вимірів	402
12.8. Гравіметричні дослідження для визначення поправки в нівелювання за непаралельність рівневих поверхонь	405
12.9. Принципи розробки методики проведення гравіметричної зйомки під час вирішення геодезичних завдань	407
13. Застосування гравіметрії для вирішення геологічних задач	412
13.1. ВИВЧЕННЯ ГЛИБИННОЇ БУДОВИ ЗЕМНОЇ КОРИ І ВЕРХНОЇ МАНТІЇ	412
13.1.1. Тектонічне районування геосинклінальних областей	412
13.1.2. Тектонічне районування платформних областей	419
13.2. Використання гравіметрії при геологічному картуванні	421

13.3. Застосування гравіметрії при математичному моделюванні геологічних структур	429
13.4 Застосування гравіметрії при пошуках та розвідці корисних копалин	437
13.4.1. Пошуки родовищ нафти і газу	437
13.5. Застосування гравіметрії в гідрогеології	445
13.5.1. Геометрія водоносного горизонту	445
13.5.2. Метод пористості поверхні	447
13.5.3. Пошуки підземних тріщинних вод	451
13.5. Застосування гравіметрії в інженерній геології	454
13.6. Застосування гравіметрії при вирішенні задач археології	459
Література	462

ВСТУП

Гравіметрія – це наука про вимірювання прискорення сили тяжіння та інших компонент гравітаційного поля на поверхні Землі або поблизу неї. Гравітаційна розвідка представляє собою один з методів геофізики для вирішення багатьох практично важливих геологічних і чисто наукових задач, оскільки величина сили тяжіння залежить від місцезосташування пунктів спостереження і розподілу збурюючих мас.

Гравітаційна розвідка використовується для вивчення глибинної будови земної кори, тектонічного і петрографічного районування, глибинного геологічного картування, пошуку і прогнозуванню родовищ і покладів нафти і газу, пошуку і розвідці твердих корисних копалин і будівельних матеріалів, вирішення деяких задач інженерної геології, вивчення фігури Землі (геодезична гравіметрія). Загалом, можна виділити наступні основні напрямки застосування гравіметрії:

- визначення фігури Землі;
- вивчення глибинної будови Землі ;
- пошуки та розвідка родовищ горючих і твердих корисних копалин;
- оцінка пружних напружень в надрах Землі;
- вивчення сучасних геодинамічних явищ;
- вимірювання сили тяжіння для визначення різних фізичних констант.

Гравіметрія тісно пов'язана з математикою, фізикою, геодезією, астрономією і, звичайно, геологією. При розв'язку задач гравіметрії застосовуються сучасні математичні методи (рівняння математичної фізики, статистичні методи, теорія функції комплексної змінної тощо). Результати гравіметричних досліджень широко використовуються в гравіметричній геодезії для уточнення форми Землі, для визначення гравітаційних полів Місяця та інших планет, для розв'язку балістичних задач.

Особливе значення відіграють гравіметричні дослідження для розв'язку різноманітних прикладних геологічних задач. Необхідно відзначити, що найбільш якісне тлумачення гравітаційних аномалій проводиться в комплексі з іншими методами геофізики

(магніторозвідкою, сейсморозвідкою, електророзвідкою, петрофізикою, геофізичними дослідженнями в свердловинах) та при аналізі результатів геологічних досліджень.

Співставлення гравітаційних і геологічних карт (особливо структурних) завжди проводиться при якісному тлумаченні гравітаційних аномалій. Причому навіть такі співставлення не завжди дають позитивний результат, тобто надійну основу геологічного тлумачення; іноді гравітаційні карти показують розташування аномалій, які не узгоджуються з контурами структур, що встановлені по геологічній карті. В інших випадках – аномалії за місцезнаходженням ув'язуються з структурами, проте їх знак не узгоджується з характером структур (підняття щільних порід відповідає не максимум, а мінімум сили тяжіння і т.п.). Тому в подібних випадках слід пам'ятати, що основний план гравітаційного поля визначається будовою більш глибинних горизонтів земної кори, а не приповерхневими шарами порід, що представлені на геологічній карті.

Найчастіше гравірозувальні роботи проводяться в комплексі з магніторозвідкою. При цьому, якщо гравітаційні і магнітні аномалії викликані одним й тим самим геологічним об'єктом, то вони звичайно не завжди співпадають за місцезнаходженням, розміром, формою і т.п., а іноді різняться досить істотно. Причиною невідповідності є різна аналітична природа і гравітаційних, і магнітних аномалій.

Досить успішним є комплексування гравітаційних зйомок і результатів сейсморозувальних або електророззувальних робіт, що проводилися на ділянці робіт. В багатьох випадках вони досить правдоподібно вказують на зв'язок гравітаційних аномалій з тими або іншими структурами – характером поверхні кристалічного фундаменту, з тектонічними порушеннями, підняттями або зануреннями пластів осадових порід, з рудними родовищами.

Залучення даних петрофізичних досліджень (щільність гірських порід ділянки) істотно підвищує результативність гравіметричних досліджень.

КНИГА 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ

1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЇ ГРАВІМЕТРІЇ

1.1. ІСТОРИЧНИЙ РОЗВИТОК ГРАВІМЕТРІЇ

Перші вимірювання сили тяжіння в XVII і XVIII ст. були пов'язані з розвитком механіки твердого та деформованого тіл [1]. Точність вимірювання відстаней і часу, необхідних для визначення сили тяжіння, була вже досить висока, щоб використовувати гравіметрию для завдання еталона довжини на основі цієї природної величини і, після того як була виявлена залежність сили тяжіння від місця розташування, для вивчення фігури Землі. Надалі розвиток гравіметрії визначається як технічними можливостями, так і науковими задачами геодезії і геофізики, в яких зростаючий вплив починають надавати практичні завдання геодезичних вимірювань і геофізичних досліджень.

Особливість розвитку гравіметрії за останні три століття полягає в безперервному поширенні вивчених територій континентів і океанів, при цьому точність вимірювань весь час зростає. Відповідно до застосовуваної апаратури і вирішуваних завдань можна виділити чотири етапи розвитку гравіметрії:

- становлення теоретичних основ (XVII - XVIII ст.);
- вдосконалення маятникових приладів і початок їх використання в глобальних задачах геодезії і геофізики (XVIII і XIX ст.);
- розвиток варіометрів і статичних гравіметрів, регіональні гравіметричні зйомки для геофізики (перша половина XX ст.);
- розвиток балістичних гравіметрів і створення прецизійних гравіметричних мереж для вирішення задач геодезії, геофізики і геодинаміки (друга половина XX ст. – сьогодення).

Будемо надалі дотримуватися цих етапів; зауважимо також, що розвиток гравіметрії після 1950-х рр. описується більш детально в відповідних розділах підручника поряд з відомостями про основні роботи в попередні роки.

У списку літератури історія гравіметрії відображена в історичних трактатах з наук про Землю [2], визначенням фігури Землі [3] і

геофізики [4]. Огляд досягнень до початку нашого століття подано в праці [5].

1.1.1. Теоретичні основи (17 - 18 ст.)

Теоретичні основи гравіметрії були закладені одночасно з розвитком теорії тяжіння, механіки твердого тіла та гідростатики.

До 16-го століття феномен гравітаційного прискорення описувався теорією Аристотеля (384 - 322 рр. до н.е.), відповідно до якої швидкість падіння тіл пропорційна їх вазі. Датчанин С. Стевін (1548 - 1620) і Галілео Галілей (1564 - 1642) змогли спростувати цю теорію експериментами з падаючими тілами. Проводячи досліди з похилими площинами, Галілеєм було встановлено, що вільне падіння - це рівноприскорений рух, а період коливань маятника залежить тільки від його довжини. Ґрунтуючись на цьому, Християн Гюйгенс (1629 - 1695) розвинув теорію математичного й фізичного маятників і створив перший маятниковий годинник.

З відкриттям двох законів - закону вільного падіння і закону коливань маятника в гравіметрії були встановлені два фундаментальних співвідношення. Понад два століття єдиним вимірювальним приладом залишався маятник. На перших порах, однак, вимірюється не величина сили тяжіння, а довжина секундного маятника, тобто довжину маятника (0,994 м) з напівперіодом коливань рівним одній секунд.

Після перших визначень П. Мерса (1644) і Г.Б. Річчолі (1647) Х. Гюйгенс в 1664 р пропонує визначити міру довжини фут як одну третину довжини секундного маятника. Таким чином, в той час сила тяжіння приймалася величиною постійною та її передбачалось використовувати для визначення одиниці довжини. Через 10 років він розширює це визначення, враховуючи залежність довжини секундного маятника від широти. Ж. Пікар переслідував цю ж мету, виконуючи маятникові спостереження при вимірах дуги Паризького меридіана (1669 - 1670).

Незабаром експедиції в низькоширотних областях земної кулі виявили залежності сили тяжіння від місця розташування. Під час перебування в Кайєні в 1672 – 1673 рр. французький астроном Ж. Ріше (1630 - 1696) встановив, що вивірений в Парижі годинник з

секундним маятником на 2,5 хвилини відстає від астрономічного часу. Відставання можна було усунути, скоротивши маятник на 1,25 «паризької лінії» (3 мм). Після повернення в Париж залежність періоду коливань маятника від місця розташування була підтверджена. У 1677 – 1678 рр. під час експедиції на острів Св. Олени англійський астроном Е. Галілей отримав подібний результат з секундним маятником, який був вивірений в Лондоні. Ці та наступні спостереження знайшли пояснення в теоретичних роботах І.Ньютона і Гюйгенса.

Ще Аристотель дав фізичне пояснення сферичності Землі, яке сприймали як постулат в античні часи. Він пояснив його наслідком руху елементарних частинок (корпускул) до центру Всесвіту. Приблизно в 1666 р Ісак Ньютон (1643 - 1727) прийшов до висновку, що вільне падіння - це прояв тяжіння, закони якого він вивів із законів планетарного руху Кеплера. У 1687 р І. Ньютон опублікував закон тяжіння в «Математичних засадах натуральної філософії»:

$$b = G \frac{m_1 m_2}{l^2}$$

де b - сила гравітаційного тяжіння; G - гравітаційна стала; l - відстань між масами m_1 і m_2 , що взаємно притягуються.

Значні досягнення в області вивчення тяжіння та руху тіла в центральному полі (Гюйгенс, 1673) дали поштовх дослідженням фігур рівноваги рідини, що обертається. Використовуючи різні підходи, Ньютон (1687) і Гюйгенс (1690) визначили фігури рівноваги рідкої однорідної Землі, виявивши при цьому ефект полярного стиснення. За Ньютоном, ця фігура є еліпсоїд обертання, на поверхні якого сила тяжіння повинна зростати від екватора до полюсів. Гюйгенс зробив важливий висновок, що на поверхні рідкого тіла, яке знаходиться в рівновазі, результуюча сила перпендикулярна цій поверхні.

Після класичних робіт Архімеда (287 - 212 рр. до н.е.) і С. Стевина (1548 - 1620) дослідження в області гідростатики були продовжені в 18-м столітті Л. Ейлером (1707 - 1783), К. Маклореном (1698 - 1746) і П. Буге (1698 - 1758). Буге вводить поняття рівної поверхні та поширює своє дослідження на фігуру рівноваги тіла, що обертається, що складається з концентричних шарів. Роботи

А.К. Клеро (1713 - 1765) заклали основи для геодезичного використання вимірювань сили тяжіння. У книзі «Теорія фігури Землі» [6] він наводить доказ формули тяжіння Ньютона і формулює теорему, названу згодом теоремою Клеро. Теорема справедлива для рівневого сфероїда або еліпсоїда обертання та не вимагає яких-небудь припущень про розподіл густини усередині тіла. Вона пов'язує стиснення зі значеннями сили тяжіння на полюсі і екваторі. Отже, стиснення еліпсоїда можна визначити з вимірів сили тяжіння на двох різних широтах за умови, що екваторіальний радіус еліпсоїда відомий. Він сформулював гравіметричний метод вищої геодезії, що дозволяє визначити геометричні параметри фігури Землі за вимірюваннями сили тяжіння.

У геофізиці важливе значення має диференціальне рівняння Клеро, що визначає стиснення шарів рівної густини в шаруватих фігурах, які перебувають в рівновазі.

Завдяки, в основному, заслугам французьких математиків Ж.Л. Лагранжу (1736 - 1813), П.С. Лапласу (1749 - 1827), А.М. Лежандру (1752 - 1833) і С.Д. Пуассону (1741 - 1840), в цей період було завершено створення математичного апарату для гравіметрії.

1.1.2. Маятникові вимірювання та їх застосування в геодезії і геофізиці (17 – 18 ст.)

Тривалий час, навіть в значній частині 20-го століття гравіметричні дані, необхідні для геодезії і геофізики, отримували за допомогою маятникових вимірювань.

Залежність сили тяжіння від широти пункту підтверджена французькими дослідниками спостереженнями під час градусних вимірювань в Лапландії (1736 – 1737, П.Л. Мопертюї) і в Перу (1735 – 1744, П. Буге і С.М. Ла Кондамін). Маятникові прилади на цій ранній стадії розвитку гравіметрії представляли собою наближення до математичного маятника. Буге [7] спостерігав в Андах залежність сили тяжіння від висоти та знайшов важливу для геофізики поправку за приведення сили тяжіння до рівня моря.

Точність приблизно $\pm 10^{-5}g$ отримали Ж.Ш. Борда і Дж. Д. Кассіні де Тюрі [8] під час високоточного експерименту в Паризькій

астрономічній обсерваторії. Результати вимірювань з нитковим маятником (платинова куля діаметром 36 мм на нитці довжиною 3,8 м) використовувалися для порівняння довжини секундного маятника на широті 45° з новою одиницею довжини – метром. Період коливань визначали методом збігів, запропонованим Р. Бошковичем (1711 – 1787). Метод передбачав визначення моментів одночасного проходження через положення рівноваги двох маятників: гравіметричного та секундного.

У перші десятиліття XIX ст. розвиваються нові методи вимірювань, зростає число пунктів і розширюються площі зйомок з транспортабельними приладами.

У 1811 р Дж. Боненбергер в Німеччині описує принцип оборотного маятника, а англієць Х. Кетер [9] створює перший прилад для польових робіт. Оборотний маятник Кетера має бронзову штангу з двома призмами; відстань між лезами призм 1 м. На штанзі жорстко укріплений вантаж масою 1 кг, і є рухливий вантаж масою 32 г. Переміщуючи останній, домагаються ізохронності коливань маятника щодо обох осей. Після успішної демонстрації в Лондоні (похибка вимірювання близько 35 мГал) цей фізичний маятник утвердився в практиці гравіметрії.

Однак, більш важливим було створення «незмінних» маятників постійної довжини. З такими приладами можна визначати приріст сили тяжіння відносно деякого початкового значення (відносні вимірювання сили тяжіння).

Для відносних вимірювань Ж.Б. Біо (1774 – 1862) використовує транспортабельний нитковий маятник Борда (довжина маятника близько 0,75 м), тоді як Кетер [10] застосовує фізичний маятник з одним лезом. Вимірювання з такими приладами виконували на численних французьких і англійських пунктах градусних вимірювань. У 1818 – 1831 рр. в англійських, французьких і російських морських експедиціях визначені значення сили тяжіння на узбережжях і на островах у всіх областях земної кулі з похибкою приблизно 5 мГал.

Подальший розвиток абсолютних гравіметричних визначень пов'язаний з ім'ям астронома Ф.В. Бесселя (1784 – 1846). Поряд з глибокими дослідженнями в області теорії оборотного маятника та джерел помилок Бессель удосконалює нитковий маятник. Якщо у

ниткового маятника можуть бути дві осі коливань, лінійні вимірювання зводяться до вимірювання відстані між цими осями. Спостереження в Кенігсберзі та Берліні показали переваги цього приладу (похибка близько 10 мГал). Однак використовувався він лише кілька разів [11, 12].

Близько 1830 р маятникові вимірювання припиняють і відновлюють лише в 1862 р за планом робіт «Середньоєвропейського градусного вимірювання» та створених пізніше організацій.

Оскільки до цього часу отримані гравіметричні дані для територій з більшою довжиною по широті, виконуються перші обчислення стиснення Землі та визначення сили тяжіння на поверхні еліпсоїда за теоремою Клеро. У 1799 р. французький вчений П. Лаплас [13] отримує величину стиснення близько 1:330 за 15 значеннями сили тяжіння. Для більш точного формулювання крайової задачі фізичної геодезії (визначення фігури Землі та її зовнішнього гравітаційного поля за вимірюваннями сили тяжіння на поверхні Землі) набули великого значення інтегральні теореми К.Ф. Гауса (1777 – 1855) і Дж. Гріна (1793 – 1841). Гаус [14] пропонує вважати математичною фігурою Землі еквіпотенціальну поверхню, що збігається з поверхнею Світового океану. Пізніше Дж. Б. Лістинг [15] називає цю поверхню геоїдом. Особливу важливість мала робота англійського математика та фізика Дж. Г. Стокса (1819 – 1903). Він довів, що не існує єдиного розв’язку оберненої задачі теорії потенціалу, тобто визначення розподілу мас усередині Землі за її зовнішньому гравітаційному полю. Ця задача – дуже важлива в геофізиці. Інтегральна формула Стокса дозволяє визначати форму геоїда за значеннями сили тяжіння. Свое використання ця формула отримала лише через сто років, коли для поверхні Землі було відомо досить багато гравіметричних даних.

З середини XVIII ст. і в XIX ст. розвивався геофізичний напрямок використання вимірювань сили тяжіння, який заснований на теорії гравітаційного поля та аналізі результатів маятникових спостережень. Спочатку він полягав у визначенні маси Землі або середньої густини Землі, а також гравітаційної постійної. Для цих цілей проводили як польові, так і лабораторні експерименти.

Буге на основі маятникових вимірювань в Перу встановлює співвідношення між густиною гірських порід в Андах і середньою густиною Землі. Сабін [16] приходить до висновку про можливість оцінити розподіл мас у верхніх шарах Землі за вимірюваннями сили тяжіння. Визначення середньої густини виконували Дж. Б. Ері [17] в шахті вугільних копальнь в Дурхамі (середня густина 6570 кг/м^3) і Р. фон Штернек [18] в шахті глибиною 1000 м в Прибрамі, Чехія (5770 кг/м^3). Велике значення і зараз має визначення гравітаційної постійної з крутильними вагами. Конструкція Дж. Мінела (1724 – 1793) була заснована на взаємному притяганні мас, закріплених на горизонтальному стрижні, і наявних поруч з ними зовнішніх мас. Г. Кавендіш (1731 – 1810) використовував вдосконалений прилад Мічела і виконав успішне визначення гравітаційної сталої ($6,75 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{с}^2$) та середньої густини Землі (5450 кг/м^3) [19]. Ф. фон Іоллі [20] запропонував для визначення середньої густини метод зважування, який в подальшому використовувався неодноразово.

Вивчення аномалій сили тяжіння та напряму прямовисної лінії поблизу гір призвело до створення теорії ізостації, фундаментальної теорії геофізики. Ще Леонардо да Вінчі (1452 – 1519) вказував на рівноважний стан видимих земних мас. Термін «Ізостазія» введений в 1889 р американським геологом К.Є. Деттоном. Відповідно до цієї теорії видимі надлишки мас (гори) і недостатність мас (океани) компенсуються змінами густини або товщини земної кори так, що на певній глибині компенсації настає гідростатична рівновага.

Ухилення прямовисної лінії, отримані Дж. Еверестом на півдні Гімалаїв, стали підставою для розробки відповідних теорій, опублікованих в 1885 р англійським астрономом Дж.Б. Ері (1801 – 1892) і архідияконом Дж.Х. Праттом (1809 – 1871), які служили в Калькутті. Виявилось, що величини цих відхилень менше величин, обчислених з урахуванням впливу топографічних мас [17, 22].

Створене в 1862 р товариство «Середньоевропейський градусний вимір» стимулювало подальшу діяльність в області гравіметрії. Спочатку, незважаючи на успішні спостереження з незмінними маятниками, тривають і удосконалюються переважно абсолютні вимірювання сили тяжіння.

Відповідно до рекомендацій Бесселя, Дж. Репсольд створив в Гамбурзі транспортабельний прилад з оборотним маятником

(латунний маятник з відстанню між лезами ножів 1 м), який починаючи з 1862 р використовували в багатьох країнах. У Франції використовується прилад, створений фірмою Brunner Bros, з розробок Х. Де-Форж (метровий і півметровий маятники). У 1875 р американським дослідником К.С. Пірсом виявлено явище співхитання штатива, яке залежне від жорсткості основи. Ці прилади були складні в використанні, та їх застосування не призвело ні до підвищення точності (помилка ± 10 мГал), а ні до помітного збільшення продуктивності. У підсумку в 1884 р Гельмерт мав визначення з секундними маятника лише на 122 пунктах, включаючи і попередні спостереження.

Наприкінці ХІХ ст. для вимірювання приростів сили тяжіння переважно використовують маятникові прилади, створені австрійським дослідником Р. фон Штернеком. Прирости визначають за зміною періоду коливань маятника з незмінною довжиною від пункту до пункту.

У той час використовувалися 25-см латунні маятники. Стало можливим поступово підвищувати точність визначення приростів сили тяжіння від $\pm 10 - 20$ мГал до ± 5 мГал за час спостережень на пункті від півдоби до доби. Державні геодезичні організації виконали ряд великих національних програм вимірювань сили тяжіння. У 1912 р було вже відомі близько 2500 значень сили тяжіння, хоча розподіл гравіметричних пунктів по поверхні Землі і не був рівномірним.

Перехід до відносних вимірювань сили тяжіння вимагав високоточного визначення її абсолютних значень. Ф.Р. Гельмерт (1843 – 1917) спочатку використовував значення сили тяжіння на австрійському фундаментальному пункті Військового географічного інституту у Відні (Віденська гравіметрична система). Після того як Гельмерт істотно переробив теорію оборотного маятника, Ф. Кюнєн і Ф. Фуртвенглер в 1898 – 1904 рр. виконали нові абсолютні вимірювання сили тяжіння в Потсдамі. Результати цих спостережень стали основою Потсдамської гравіметричної системи, прийнятої в 1909 р.

Крім розробки гравіметричної системи, а також глобальних і регіональних гравіметричних зйомок на континентах, абсолютно

необхідними для вирішення задач геодезії та геофізики є вимірювання сили тяжіння на океанах.

У 1899 р в Норвегії Х. Мон застосовує метод визначення сили тяжіння на вимірах з гіпсометром (термометром, який працює на точці кипіння) і ртутним барометром. У 1901 – 1909 рр. О. Геккер з Потсдамського геодезичного інституту виконує більше 250 вимірювань в експедиціях по Атлантичному, Індійському та Тихому океанах, а також по Чорному морю. Використавши ці дані, він зміг показати, що на океанах також існує ізостатична компенсація, за винятком областей глибоководних западин.

Використання великої кількості гравіметричних даних по земній кулі, що накопичилися до кінця XIX ст. вимагало детальних досліджень щодо питання про редукцію сили тяжіння на рівень моря. Гельмерт [22, 23] вносить фундаментальний внесок для вирішення цього питання. Використавши майже 1400 значень аномалій у вільному повітрі, Гельмерт [24] отримав стиснення еліпсоїда 1: 298,3, виключивши дуже непередставницькі острівні пункти. Отримана за результатами досліджень формула для нормальної сили тяжіння (1901 р.) після приведення до Потсдамської системи широко використовувалася в перші десятиліття 20 ст.

1.1.3 Спостереження з крутильними вагами та гравіметрами та їх застосування в прикладній геофізики (перша половина 20 ст.)

Для вивчення детальної структури гравітаційного поля велике значення мали роботи по створенню угорським вченим Р. фон Етвешом (1848 – 1919 рр.) крутильних терезів, придатних для польових робіт [25, 26]. Якщо спостереження кута горизонтального повороту крутильних терезів Кавендіша дають лише параметри кривизни рівневих поверхонь, то прилад Етвеша дозволяє визначати горизонтальний градієнт сили тяжіння, оскільки пробні маси знаходяться на різній висоті.

У першому десятилітті 20 в. в Угорщині проводилися великі за обсягами спостереження з крутильними вагами, які показали, що

радіус кривизни рівневих поверхонь сильно змінюється (від 3 до 200 тис. км) та що за допомогою крутильних терезів можна виявити зміни густини мас поблизу денної поверхні.

На початкових етапах розвідки нафтових родовищ геофізичними методами характерно широке застосування крутильних терезів. В. Швейдар [27] ставить перші вимірювання на сольовому куполі в Північній Німеччині та розробляє методи редукування результатів за вплив топографічних мас. Він розробляє також крутильні терези з фотографічною реєстрацією, які потім стала випускати фірма «Асканія» в Берліні. Компанії, виконують геофізичні дослідження, використовуючи крутильні терези для вивчення сольових куполів в рівнинному районі Північної Німеччини, та починаючи з 1922 р на узбережжі Мексиканської затоки в США. У 1922 році корпорація Amerada Petroleum під керівництвом Еверетта де Гольє виконує зйомку нафтоносного району Шпіндл Топ в Техасі, яка виявила додатну аномалію сили тяжіння над соляним штоком. Майже до 1940 р. крутильні терези використовуються для виявлення неглибоко розташованих, а, в подальшому, і більш глибоких соляних куполів. До 1930 року в США експлуатуються 125 приладів.

Починаючи з 1920 р істотно були вдосконалені відносні маятникові вимірювання з приладами «Штернек». Спостереження стали проводити за «двомаятниковою схемою» в вакуумі з інварними або кварцовими маятниками; трудомісткий астрономічний контроль годин був замінений прийомом сигналів за часом. Коливання маятників або моменти їх збігів з коливаннями маятника годин реєстрували фотографічним методом. Помилка вимірювань пристроїв сили тяжіння зменшилася до $\pm 1 - 2$ мГал.

Проте спостереження з маятниковими приладами та крутильними вагами залишалися все настільки ж дорогими, так як роботи тривали на кожному пункті від однієї до шести годин. Через високу чутливість до впливу топографічних мас крутильні терези можна використовувати лише в рівнинній місцевості для зйомки одиночних структур. Для швидкої зйомки великих площ були створені статичні гравіметри. У них спостерігають положення рівноваги пробної маси в полі сили тяжіння, що компенсується іншою силою, зазвичай, пружною деформацією, а в деяких випадках також силою скручування нитки. За зміною довжини або кута

повороту, отриманими зі спостережень з приладом на двох пунктах, можна отримати приріст сили тяжіння, якщо відомий калібрувальний коефіцієнт.

Теоретичні та практичні основи цього методу були відомі давно. Р. Гук (1635 – 1702) 1678 р сформулював закон пружності, а пружинні ваги використовувалися з кінця XVII ст. С.Д. Пуассон і О.Л. Коші (1789 – 1857) внесли істотний внесок в розробку теорії пружності. Вже в 1833 р. Дж. Гершель (1792 – 1871) запропонував використовувати пружинні терези для вимірювання сили тяжіння [28], однак розробка таких приладів стала можливою лише після успіхів матеріалознавства та техніки високоточних вимірювань. У 1930 – 1950 рр. було сконструйовано близько 30 моделей різних статичних гравіметрів, але лише мала частина з них була виготовлена в великій кількості та використана на практиці.

Ще в 1918 р Дж. Ізинг приступив до конструювання та обмеженому застосуванню вертикального зворотного маятника, що був укріплений на горизонтальній крутильній нитці. У 1930 р Ф. Хольбек і П. Леже використовують динамічний метод вимірювань, заснований на спостереженні коливань зворотного маятника з плоскою пружиною. Ваги важелів з пружиною, створені О.Х. Труманом в 1930 р, використовуються з 1932 р нафтовою компанією Humble Oil Company. Першим приладом, який був виготовлений у великій кількості, були пружинні ваги з ножовою опорою, побудовані А. Шлезенером в 1934 р по розробкам Ст. фон Тіссена. Вперше в 1932 р Харлей описує вимірювальну систему з лінійною характеристикою. Точність визначення сили тяжіння, досягнута з цими першими приладами, складає $\pm 0,2-0,5$ мГал. Принцип довгоперіодичного вертикального сейсмометра, запропонований в 1934 р Л. Дж. Б. Ла Костом, дозволив створити найбільш вдалий прецизійний гравіметр, який застосовується з 1939 р. Гравіметр з кварцовою пружиною, розроблений Семом П. Уорденом, з 1948 р масово застосовується при геофізичних дослідженнях. А Граф в 1938 р розробляє ваги з вертикальною пружиною, а в 1942 р - крутильні пружинні ваги; обидва прилади виготовляються фірмою «Асканія» в Берліні. Вони також знайшли широке застосування. У 1938 р А. Хойт конструє ваги з вертикальною гвинтовою пружиною, що широко використовуються

компанією Gulf Oil Company на узбережжі Мексиканської затоки в США приблизно до 1960 р. Похибка вимірів з цими більш сучасними приладами становить $\pm 0,05-0,2$ мГал. І, нарешті, відзначимо газовий гравіметр, який розроблявся Х. Хаальком починаючи з 1931 р. В ньому компенсація сили тяжіння здійснювалася тиском повітря.

Приблизно до 1939 року в розвідці нафтових родовищ статичний гравіметр майже повністю замінив крутильні ваги. Час спостережень на пунктах скоротився тепер до 10-30 хвилин. Крім великих зйомок приватних компаній (в 1945 році на території США працювало близько 170 гравіметричних бригад) гравіметричні зйомки продовжували або поновлювали також і державні організації. Їх завдання полягало в створенні опорної гравіметричної мережі і в систематичному дослідженні геологічних структур і природних ресурсів геофізичними методами.

Завдяки піонерським роботам Ф.А. Венінг-Мейнеса стали можливі більш інтенсивні гравіметричні зйомки океанів. У 1921 р він створив двомаятниковий прилад для вимірювань на рухомій основі. Цей прилад був удосконалений до тримаятникового для спостережень на борту зануреного підводного човна (глибина 30 - 80 м). З 1923 по 1960 р Нідерланди, США, Франція, Італія і СРСР здійснили експедиції, в яких визначили понад 5000 маятникових пунктів ($\pm 3 - 10$ мГал).

У першій половині 20 століття число гравіметричних пунктів істотно збільшилося. Н.Ф. Журавльов [29] використовував для визначення стиснення земного еліпсоїда більше 10000 пунктів, що, однак, були розподілені нерівномірно по поверхні Землі.

Подальше поширення глобальної гравіметричної мережі було продовжено маятниковими зв'язками між національними фундаментальними пунктами з пунктом абсолютних вимірювань в Потсдамі. Нові абсолютні вимірювання з оборотними маятниками (± 1 мГал), виконані Національним бюро стандартів у Вашингтоні та Національною фізичною лабораторією в Теддінгтоні (Великобританія), виявили, що значення сили тяжіння в Потсдамі завищено.

Теоретичні досягнення були в геодезичному та геофізичному напрямках гравіметрії. Це відомі теоретичні роботи по ізостазії,

виконані Дж. Ф. Хейфордом [30], В. Боуї [31], В.Х. Хейсканеном [32] і Ф.А. Венинг-Мейнесом [33], а також виведення за гравіметричними даними нових величин коефіцієнтів у формулах для нормальної сили тяжіння, в тому числі для тривісного еліпсоїда [34]. Міжнародна асоціація геодезії в 1930 р рекомендувала формулу сили тяжіння для нормального поля рівневого еліпсоїда [35, 36]. Ухвалою геоїда гравіметричним методом займався Г. Джеффріс [37]. Перші обчислення фігури геоїда за гравіметричними даними виконані в 1934 р Хірвоненом [38]. Теоретичні основи прикладної гравіметрії заклали в 1930 - 1940 рр. Неттлтон [39], Хаммер [40], Хаальк [41], Юнг [42] та інші.

З 1940 р при зйомці континентального шельфу використовують донні гравіметри, які опускають на дно моря. З 1957 р стали застосовувати морські гравіметри [43, 44], а вимірювання на підводних човнах вже стають застарілими. У 1959 р починаються випробування таких приладів на літаках, хоча практичне використання в розвідувальній геофізиці знайшли лише вимірювання на вертольотах. Розробка та удосконалення гравітаційних градієнтометрів (варіометрів) для літаків і супутників не завершена. Починаючи з 1960-х рр. створюються свердловинні гравіметри, призначені для розвідувальної геофізики.

Розвиток гравіметрії починаючи з 1945 р характеризується наступними досягненнями в галузі приладобудування:

- розробка прецизійних статичних гравіметрів (точність стаціонарних спостережень $\pm 10^{-8} \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$, польових $\pm 10^{-7} \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$);
- створення стаціонарних і транспортабельних балістичних приладів того ж рівня точності;
- створення морських гравіметрів.

Застосовуючи гравіметр Уордена, Буллард [45] показав, що пружинними гравіметрами можна вимірювати великі прирости сили тяжіння. Термостатичні гравіметри з металевою пружиною працювали з точністю $\pm 0,01\text{-}0,05$ мГал. До них відносяться гравіметри фірми «Асканія» з чутливою системою у вигляді крутильних пружинних ваг, що має лінійну характеристику, а також астатовані гравіметри Вестерн, Північна Америка та гравіметри Ла Коста - Ромберга, засновані на принципі сейсмометра.

З 1945 р завдяки вдосконаленню колишніх і розвитку нових теорій, а також можливості обробки даних на ЕОМ використання поліпшених гравіметричних даних в геодезії та геофізиці стало більш інтенсивним.

У геодезії для встановлення світової геодезичної системи координат [46] продовжувалось уточнення фігури геоїда за гравіметричними даними [47, 48]. Завдяки теоретичним дослідженням Молоденського [49] виникають нові стимули в області визначення фізичної поверхні Землі за гравіметричними даними без будь-яких гіпотез про внутрішню будову Землі. У практику входить метод статистичної інтерполяції для передбачення параметрів гравітаційного поля в невивчених областях [50, 51]. Розробка методу середньоквадратичної колокації [52] розширює його до загального метода спільного використання геодезичних даних для визначення параметрів гравітаційного поля. Ще один розв'язок, який враховує дискретність гравіметричних даних, запропоновано Бьерхаммаром [53].

1.1.4. Створення гравіметричних мереж, геодезичні і геофізичні результати (друга половина 20 ст., початок 21 ст.)

Аж до 1970 р різні організації виконують абсолютні вимірювання сили тяжіння з оборотним маятником. Як і припускав Гійє [54], успіхи в вимірах коротких інтервалів часу дозволили виконати експерименти з вільним падінням пробної маси [55]. В перших експериментах в якості падаючого тіла використовувалися калібровані за довжиною стрижени і отримана точність $\pm 1 - 2$ мГал. Одночасні вимірювання відстаней і часу за допомогою інтерферометра Майкельсона [56, 57] дозволили підвищити точність до рівня $\pm 0,1$ мГал; перший транспортабельний прилад успішно використовувався при створенні світової гравіметричної мережі. Метод симетричного руху тіла, випробуваний Куком [58], зменшив ефект гальмування в газовому середовищі. Гравіметричний прилад, заснований на принципі вільного падіння тіла, прийнято тепер називати «абсолютним гравіметром». На рис. 1.1 показано, що за три

століття точність вимірювань в гравіметрії збільшилася на 4 - 5 порядків.

Нові можливості вимірювальних приладів стимулювали створення гравіметричних мереж і розвиток гравіметричних зйомок.

Мореллі [60] і Хірвонен [61] оцінили дані, що були проведені для земної кулі до другої світової війни. Вони виявили часті розбіжності і дуже нерівномірний розподіл гравіметричних пунктів. Використовуючи маятниковий прилад Галф і гравіметри Вордена в ході виконання програми Інституту Вудс Хола і Вісконсинського університету (США), Дж. П. Буллард створив в 1948-1960 рр. світову опорну гравіметричну мережу [62].

Починаючи з 1950 р здійснюється широкомасштабне оновлення національних гравіметричних мереж. Спочатку виконували маятникові гравіметричні визначення, пов'язуючи їх з абсолютним значенням сили тяжіння в Потсдамі.

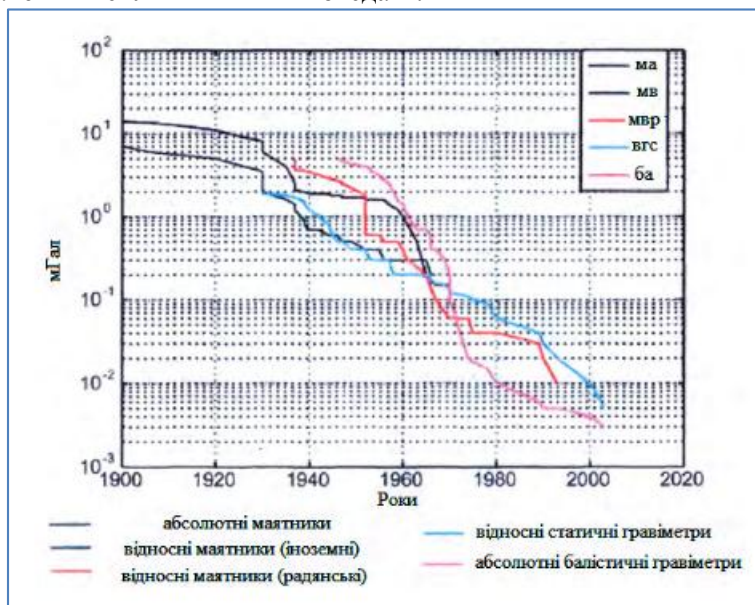


Рис. 1.1 Зменшення похибок гравіметричних приладів з часом за [59]

Починаючи з 1958 р аналіз збурень орбіт штучних супутників Землі дозволяє отримати інформацію про довгохвильову частину земного гравітаційного поля. Вже на самій ранній стадії цей метод дозволив отримати величини полярного стиснення та асиметрії півкуль [63, 64] більш точно, ніж за наземними даними. Великого значення набуває спільна обробка супутникових і наземних даних [65].

У геофізиці, починаючи з 1960 р. завдяки впровадженню ЕОМ, істотно розширюються можливості моделювання розподілу мас в тілі Землі на основі гравіметричних даних. Стало простіше оцінювати вплив топографічних мас і збурюючих мас земної кори, а за залишковими аномаліями сили тяжіння шляхом інтегрування або диференціювання обчислювати інші характеристики поля з мінімальними додатковими витратами. Підбір моделей розподілу мас в тілі Землі, що відповідають гравіметричним даним, здійснюється послідовними наближеннями з використанням чисельних і аналітичних методів [66, 67].

Застосування методів спектрального аналізу [68, 69] відкриває нові можливості в інтерпретації потенціальних полів. Зрозуміло, неоднозначність в розв'язку оберненої задачі гравіметрії не може бути дозволена вдосконаленням методів обчислень [70]. Сучасні методи геолого-геофізичної інтерпретації використовують різноманітні дані та орієнтовані на оптимальне використання інформації, що міститься в них. Локальні та регіональні аномалії сили тяжіння мають важливе значення для прикладної геофізики і геофізичних зйомок, а великомасштабні особливості гравітаційного поля містять інформацію про глибинні маси. Ці особливості і вносять основний внесок в розробку геодинамічних моделей, зокрема, при вивченні тектоніки літосферних плит.

Надалі активізувалася міжнародна робота по створенню світової гравіметричної мережі. Міжнародна гравіметрична стандартизаційна мережа (МГСС-71) заснована в 1971 р. здебільшого на абсолютних вимірах сили тяжіння з балістичними гравіметрами і відносних вимірах з гравіметрами Ла Коста - Ромберга [71]. Поправка в Потсдамську гравіметричну систему склала близько -14 мГал. З 1975 р мережа МГСС-71 удосконалюється завдяки новим спостереженням з балістичними

приладами та пружинними гравіметрами. Одночасно проводяться спроби створити систему більш високого рівня точності на основі декількох постійних абсолютних станцій.

З початку 1970-х рр. нові зйомки відносять до системи МГСС-71 і часто поєднують абсолютні та відносні вимірювання.

З 1975 р в геодезії починають застосовувати інерційні геодезичні системи. Ці системи можна використовувати також для згущення гравіметричної зйомки.

До 1987 року база гравіметричних даних Міжнародного гравіметричного бюро містить вже близько 3,5 млн пунктів. Понад 11 млн значень зберігається в базі даних Агентства оборонного картографування США, частина з них недоступна для широкого користування системою із зазначених причин.

Гравіметрична вивченість Землі за наземними і морськими гравіметричними зйомками до середини 80-х років XX ст. була дуже нерівномірною, а в даний час гравіметричними зйомками покриті значні площі як на континентах, так і на морях та океанах.

Наведемо загально узагальнені відомості про загальну картину гравіметричної вивченості початку 21 сторіччя [72, 59].

Гравіметрична вивченість держав Європи переважно покрита детальними гравіметричними зйомками, але для деяких країн (колишня Югославія, Албанія) взагалі немає матеріалів гравіметричних зйомок або дуже мало цих даних (Греція). Складено карту аномалій Буге Міжнародним гравіметричним бюро у масштабі 1:10 000 000 на територію Західної Європи та Північну Африку.

Гравіметрична вивченість держав Азії є дуже нерівномірною. Так, гравіметричні зйомки інтенсивно проводять у більшій частині території країн (Індія, Японія, Сирія, Ірак), водночас у багатьох державах Азії залишаються невивченими високогірні області Тибету та Гімалаїв, а також території Південного Афганістану.

За останні роки є значний прогрес у розвитку гравіметричних зйомок на Африканському континенті. Але гравіметрична вивченість держав Африки є дуже неоднорідною. Найкраще вивчена північно-західна частина Африканського континенту, менш вивчені північно-східні та південно-східні райони Африки.

Гравіметрична вивченість Північної Америки більш однорідна, ніж Азії і Африки. На території США і більшої частини Канади є

складені гравіметричні карти масштабу 1:250 000. Порівняно слабше вивчені Аляска, західні та північні райони Канади. Слабко вивчені значні території Мексики і Центральної Америки. Держави Південної Америки також вивчені дуже слабо. У значному ступені покриті гравіметричним зніманням лише Аргентина, Чилі й Уругвай.

Достатньо рівномірно вивчена територія Австралії та акваторія її шельфу. Більша частина території суходолу покрито детальними зйомками.

Вивченням гравітаційного поля Антарктиди та прибережних районів океану займались у багатьох країнах світу. Гравіметричними вимірюваннями займались у колишньому СРСР, США, Японія, Англія, Австралія, Франція, Нова Зеландія, Бельгія, Чилі. Загалом в Антарктиді, за даними таких досліджень, створено близько восьми тисяч гравіметричних пунктів.

Гравіметричні дослідження у Світовому океані проводили спеціалісти США, колишнього СРСР, Японії, Австралії, Нідерландів, Канади, Англії, Італії, Данії і багатьох інших держав. На акваторії Світового океану найкраще вивченим є Атлантичний океан. За осередненими аномаліями за трапеціями $1^{\circ} \times 1^{\circ}$ у північній і центральній частинах океану майже немає невивчених областей. Гірше вивчена південна частина океану, особливо у самих південних широтах. Складені гравіметричні карти в трьох редукціях - аномаліях у вільному повітрі, Буге та ізостатичних.

В Індійському океані достатньо добре вивчені лише акваторії північної півкулі, у південній півкулі прокладені лише окремі гравіметричні маршрути. На акваторію Індійського океану складена гравіметрична карта масштабу 1:5 000 000 для геолого-геофізичного атласу Індійського океану. Також опублікована гравіметрична карта осереднених аномалій Буге за трапеціями $1^{\circ} \times 1^{\circ}$.

Гравіметрична вивченість Тихого океану істотно покращена за останні роки. Добре вивчена північна частина океану, дещо гірше вивчена центральна частина і тільки прокладені окремі маршрути надводних гравіметричних вимірювань у південних областях океану.

Суттєвим доповненням гравіметричної вивченості Світового океану, які отримані за безпосередніми морськими гравіметричними

вимірюваннями, слугує інформація про гравітаційне поле з використанням даних супутникової альтиметрії. За такими спостереженнями визначені аномалії у вільному повітрі для трапецій 15'x15', отриманих у Міжнародному гравіметричному бюро за даними із ШСЗ «Seasat» і «Geos-3» для акваторій Світового океану, обмеженими паралелями 72° північної широти і 60° південної широти, а також з використанням геодезичних програм ШСЗ «Geosat» і «ERS-1».

У досупутниковий час гравітаційне поле було відоме з високою точністю тільки в деяких регіонах світу й отримане за допомогою наземних і аерогравітаційних зйомок. Сьогодні детальність поля прискорення вільного падіння для потреб геодезії, геофізики і океанографії оцінюється величиною 1 мГал для гравіметричних аномалій, а відповідна точність висот геоїда (квазігеоїда) від 1 до 2 см. Отже, потреба в точному визначенні гравітаційного поля Землі є очевидною.

На початку 80-х років знову зростає інтерес до авіаційних гравіметричних зйомок. Тут слід виділити роботи, що проводилися в США Naval Research Laboratory (JM Brozena, MF Peters), а в Канаді - кафедрою Geomatics Engineering Університету Калгарі (K. P. Schwartz).

У ці роки відбувається осмислення можливостей супутникової навігаційної системи GPS, як засобу високоточного позиціонування. Морські гравіметри (в основному Іла Коста - Ромберга) допрацьовуються під розширений динамічний діапазон прискорень, що виникають при авіаційних зйомках. Використовуються досягнення в мікропроцесорній техніці; приладобудуванні, особливо в частині інерційних систем навігації; методах обробки інформації. Розширюється міжнародне співробітництво, в проекти авіаційної гравіметрії залучаються вчені різних країн світу: Канади, США, Японії, Німеччини, Англії, Нідерландів, Франції, Фінляндії.

На початку 90-х років відбулася якісна зміна в авіаційній гравіметрії. Почався активний етап розробки та впровадження в практику промислових авіаційних гравіметричних систем. Це було викликано повноцінним розгортанням високоточної супутникової навігаційної системи GPS з достатнім числом навігаційних супутників, що рівномірно покривають земну поверхню;

досягненнями в мікропроцесорній техніці, що дозволили вирішити багато проблем вдосконалення чутливих елементів гравіметричних комплексів, систем реєстрації і синхронізації інформаційних потоків; якісно новими можливостями персональних комп'ютерів; появою нових можливостей приладової інтеграції інерційних систем навігації з гравіметрами нового покоління; підтримкою гравіметричних проектів на державному рівні та активним залученням приватних інвестицій.

1.1.5 Сучасний стан гравіметричної вивченості України

Побудова нових гравіметричних мереж у різних країнах стало необхідними завдяки появі Міжнародної стандартної гравіметричної мережі (IGSN-71), підвищенні вимог до точності і надійності мереж, можливості використовувати нові абсолютні та відносні прилади, нові методики вимірювань, а також зростання інтересу до моніторингу часових вимірювань прискорення вільного падіння тощо [59].

Державна гравіметрична мережа України є основою для виконання гравіметричних досліджень, які спрямовані на вивчення гравітаційного поля та зовнішньої фігури Землі та їхніх змін з плином часу, виконання інших наукових і народногосподарських завдань та метрологічного забезпечення гравіметричних зйомок. Вона слугує єдиною гравіметричною системою на території України. Високоточну державну гравіметричну мережу ділять на Державну фундаментальну гравіметричну мережу (ДФГМ) і Державну гравіметричну мережу 1-го класу (ДГМ-1).

До початку 60-х років XX ст. в Україні існувало лише три маятникові пункти опорної гравіметричної мережі I класу, які були визначені Центральним науково-дослідним інститутом геодезії і картографії (ЦНДГІК) СРСР. Ці пункти перебували в підвальних приміщеннях фундаментальних будівель міст Полтава, Харків і Одеса.

Надалі в зв'язку з появою нових, точніших гравіметрів, упродовж 1965 - 1970 років Інститут фізики Землі АН СРСР на території СРСР побудував опорну гравіметричну мережу I класу, яка

на території України, охоплювала вищезгадані пункти плюс опорний пункт в аеропорту «Жуляни» міста Київ. Мережа складалася із системи замкнутих полігонів, прив'язаних до маятникових пунктів, та мала прямі зв'язки з пунктом «Москва» (клас А) - головним опорним пунктом СРСР. Середня квадратична похибка передачі абсолютних значень прискорення сили тяжіння (ПСТ) на пунктах становила $\pm 0,035$ мГал [73]. Останній раз роботи зі створення в Україні Державної опорної гравіметричної мережі I класу (ДГМ-I класу) проводилось у 1979-1983 роках.

Державна гравіметрична мережа України як складова гравіметричної мережі СРСР залучала до свого складу гравіметричні мережі I, II, III класів. Наявна гравіметрична мережа України I класу складалася із 17-ти основних пунктів, одного вихідного фундаментального гравіметричного національного пункту Полтава та 37-ми рядових пунктів.

Наразі державна гравіметрична мережа I класу країни, створена ще за часів існування СРСР, оцінюється зі середньою квадратичною похибкою значення прискорення вільного падіння пунктів приблизно в 30 мкГал. Зауважимо, що пункти державної гравіметричної мережі II класу не забезпечують за точністю обґрунтування гравіметричної зйомки масштабу 1: 50 000 і більше. На початку XXI ст. у зв'язку з масовим запровадженням супутникових технологій визначення місцеположення географічних об'єктів місцевості, а особливо з розвитком методів GPS нівелювання, які дають можливість визначати висоти над рівнем моря, виникла потреба побудови високоточної моделі поверхні квазігеоїду для всієї території України на базі достовірної й точної гравіметричної інформації. [73, 74].

Для певної території України на даний час існує невідповідність гравіметричної мережі за якістю й щільністю пунктів, що не дає можливості в межах європейських проектів здійснити її ув'язку з нівелірними мережами сусідніх країн, побудувати модель квазігеоїду сантиметрової точності. Тільки за умови поєднання високоточного гравіметричного вимірювання на базі зйомок масштабу 1:50 000 та більше з супутниковими геодезичними спостереженнями можна побудувати нову, інтегровану у світову, систему геодезичного забезпечення країни [75, 76].

Упровадження в практику гравіметричних робіт абсолютних балістичних гравіметрів високої точності й супутникових технологій для визначення просторових геодезичних координат зумовлює необхідність модернізації мережі на новому рівні точності.

В роботах українських вчених, що присвячені гравіметрії:

- висвітлені питання теорії і практики вирішення інтерпретаційних завдань потенціальних полів;
- розглянуті класичні задачі для геологічної інтерпретації гравірозвідувальних польових вимірювань;
- описані методи інтерпретації гравітаційних і магнітних аномалій, аналітичні методи інтерпретації гравірозвідувальних аномалій;
- приділена увага для вирішення прямих і обернених задач гравіметрії в обраних класах розв'язку, зокрема, кульових, матеріальних стрижневих, блочно побудованих, тривимірних «зіркових» тіл класу Тихонова, Стрітенського, а також класів контактних поверхонь, горизонтально шаруватої моделі [77-98].

Методи інтерпретації гравітаційних спостережень і теоретичні основи розвідувальної гравіметрії викладені в працях Н.М.Нікіфорова, Б.В. Нумерова, Г.А. Гамбурцева, Б.А. Андрєєва, А.К. Маловичко і ін. вчених. На основі цих досліджень вирішені задачі геологічного тлумачення гравітаційних аномалій.

Розрахунок гравітаційного ефекту тіл заданої форми, визначення накладення форми, розмірів тіла за результатами гравіметричних вимірювань розглядаються в роботах Г.А. Гамбурцева, Д.С. Мікова, К.Ф. Тяпкіна, А.К. Маловичко.

Поділ гравітаційного ефекту декількох тіл, вираження одних характеристик поля через інші, трансформації поля наводяться в працях О.М. Тихонова, Н.Г. Клушина.

Залученню апарату функції комплексної змінної для інтерпретації гравітаційних аномалій присвячені роботи С.В. Шалаєва, В.Н. Страхова,

Використання методів інтегральних перетворень, а також теорії випадкових функцій розглядаються в роботах К.В. Гладкого, Н.Т. Клушина, С.С. Серкєрова, Л.А. Халфина.

У методику комплексної інтерпретації результатів гравітаційних і геологічних досліджень внесли роботи С.І. Суботіна, А.Д. Архангельського, В.В. Фединського, Д.Н. Година, Е.Е. Фотіаді, Б.А. Андрєєва.

А.І. Кобрунов був продовжувачем ідей А.Н. Тіхонова. Ними розроблені теоретичні основи розв'язку обернених задач гравірознавства.

1.2. ЗАКОН ВСЕСВІТНЬОГО ТЯЖІННЯ. ГРАВІТАЦІЙНА СТАЛА G

Відповідно до закону всесвітнього тяжіння, що був відкритий наприкінці XVII ст. Ньютоном, всі тіла притягаються одне до одного з силою, яка пропорційна їхній масі та обернено пропорційна квадрату відстані між ними [99]. Якщо маси зосереджені в нескінченно малому об'ємі (точкові маси), закон Всесвітнього тяжіння має вигляд:

$$F = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1.1)$$

де G – гравітаційна стала ($G = 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$); m_1 і m_2 – маси, що взаємодіють; r – відстань між точками.

Коефіцієнт G – одна з фундаментальних констант фізики, механіки та астрономії. Із законів Кеплера можна виразити маси всіх планет через масу Сонця. Однак, щоб знайти масу Сонця і, відповідно, маси інших планет, необхідно знати гравітаційну сталу. Взагалі кажучи, знання цієї сталої дозволяє розрахувати силу взаємодії будь-яких тіл.

Чисельне значення гравітаційної сталої залежить від системи одиниць, в якій визначаються сили, маси та відстані. Її значення знайдено експериментально за допомогою вимірювання сили гравітаційного притягання між двома тілами з відомими масами, розташованими на заданій відстані одне від одного. Для тіл незначних розмірів ця сила істотно мала; з цієї причини величина гравітаційної сталої залишалася невідомою протягом більш ніж двох століть. У 1792 році Кавендішем ця проблема була вирішена за допомогою крутильних терезів. Раніше той же самий підхід був

застосований Кулоном при вивченні сил електростатичного притягання і відштовхування. Ваги Кавендіша складаються з двох невеликих сфер однакової маси m (рис. 1.2), що розташовані на протилежних кінцях легкого горизонтального стрижня, підвішеного за середину на вертикальній нитці (кварцовій нитці). Маленьке дзеркало, розміщене на нитці, відбиває промінь світла на шкалу. При використанні ваг дві відносно великі сфери масою M , виготовлені зазвичай зі свинцю, підносять до мас m . Сили гравітаційного притягання між малою та великою сферами утворюють пару, яка закручує нитку та дзеркало разом з нею. Разом з тим, промінь світла переміщується по шкалі. Пружна сила нитки компенсує зовнішню силу, так що

$$\vec{F}L = \mu\Phi,$$

де $\vec{F}$ – сила взаємодії між масами m і M , L – довжина стрижня, μ – коефіцієнт пружності нитки, Φ – кут закручування.

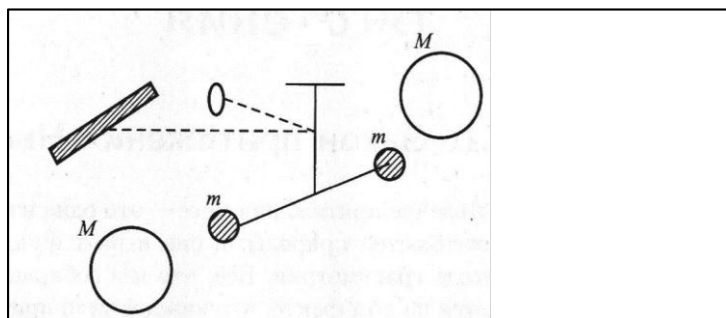


Рис. 1.2 Ілюстрація закону притягання Ньютона (дослід Кавендіша) за [99]

При використанні дуже тонкої нитки відхилення променю світла може бути достатньо великим для вимірювання гравітаційних сил, що залежать від невідомої сталої G , з досить великою точністю. Звичайно, для цього потрібно звести до мінімуму різні завади, такі, як вплив зарядів на поверхні мас. Вираз для $\vec{F}$ передбачає, що сферичні маси взаємодіють як частинки, і це припущення буде доведено пізніше. Розрахуємо силу гравітаційного притягання між малою і великою сферами у вагах Кавендіша для оцінки величин в

цьому експерименті за умови, $m = 10^{-3}$ кг, $M = 0,5$ кг, а відстань між їх центрами 0,05 см. Тоді

$$\vec{F} = \frac{6,67 \times 10^{-11} \times 10^{-3} \times 0,5}{25 \times 10^{-4}} = 0,13 \times 10^{-10} \text{ Н.}$$

Звичайно ж, це екстремально мала величина, з цієї причини визначення гравітаційної сталої з високою точністю вимагає досить складних експериментів. Протягом останніх двохсот років було проведено багато вимірів цієї сталої, проте з достатньою надійністю визначені тільки три цифри після коми. При цьому похибка визначення складає три одиниці останнього знаку. Виміри Кавендіша зробили величезний внесок в розробку теорії тяжіння та при оцінці маси Землі.

Повертаючись до рівняння (1.1), зазначимо, що сила $\vec{F}$ є векторною величиною, оскільки вона має цілком визначену величину та напрямок. (рис.1.3).

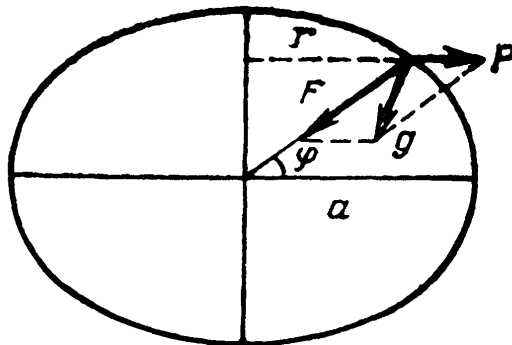


Рис. 1.3. Визначення сили тяжіння

Точка m_1 притягує точку m_2 , що віддалена від неї на відстань r , з силою F , яка направлена по прямій від точки m_2 до точки m_1 та прикладеної до точки m_2 . Відповідно, точка m_2 так само притягує точку m_1 з силою F , що прикладена до m_1 та направлений від m_1 до m_2 .

Будемо вважати, що відрізок r направлений від точки, що притягує, до точки, яка притягується. В цьому випадку вектор $\vec{F}$

завжди має різний напрямок з вектором $\vec{r}$. Саме цим пояснюється знак «мінус» перед виразом сили притягання.

Вираз для сили притягання можна представити у векторній формі:

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (1.2)$$

Взаємодія між усіма небесними тілами підпорядковується закону Всесвітнього тяжіння, саме завдяки ньому визначається порядок руху планет навколо Сонця та взаємне притягання всіх мас Землі.

1.3. СИЛА ТЯЖІННЯ ТА ЇЇ СКЛАДОВІ. НАПРУЖЕНІСТЬ ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ

Якщо силу віднести до одиничної маси $m_1 = 1$, то точкова маса $m_1 = m$ буде притягувати цю одиничну масу з силою

$$\vec{g} = -G \frac{m}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (1.3)$$

Ця сила чисельно дорівнює прискоренню, яке створюється притяганням маси m на відстані r .

У випадку притягання одиничної маси масою, що складається з окремих точок, вираз (1.1) набуває вигляду:

$$\vec{g} = -G \sum_i \frac{m_i}{r_i^2} \frac{\vec{r}_i}{r_i}. \quad (1.4)$$

а в випадку неперервного розподілу мас сума замінюється інтегралом

$$\vec{g} = -G \int_{\tau} \frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} dm, \quad (1.5)$$

який обчислюється по об'єму τ , що займають збурюючі маси.

Величина $\vec{g}$ характеризує напруженість сили притягання.

У кожній точці поля Землі можна визначити відношення сили, що діє на точкове тіло, до маси цього тіла. Це відношення не залежить від речовини тіла та дорівнює прискоренню, що надається силою притягання в даній точці поля:

$$g = -G \frac{M}{R^2}, \quad (1.6)$$

де M – маса Землі; R – відстань від центру Землі до точки, що притягується.

Крім сили притягання, на маси Землі діє відцентрова сила, яка викликана добовим обертанням Землі навколо своєї осі. Вона пропорційна радіусу обертання та квадрату кутової швидкості ω :

$$\vec{P} = \vec{\rho}\omega^2 m. \quad (1.7)$$

Як і в випадку з силою притягання, віднесем цю силу до одиничної маси та отримаємо напруженість відцентрової сили, або відцентрове прискорення $\vec{\rho}\omega^2$. Сума напруженості сили притягання та напруженості відцентрової сили і є силою тяжіння, або точніше – напруженістю сили тяжіння:

$$\vec{g} = -G \int_{\tau} \frac{1}{r^2} \vec{r} dm + \vec{\rho}\omega^2. \quad (1.8)$$

Це свідчить про те, що кожній точці простору на поверхні Землі або поблизу неї можна поставити в відповідність єдино можливе, незалежне від маси, яка зазнає впливу дії, значення напруженості поля сили тяжіння g . Цей простір називається гравітаційним полем Землі. В гравіметрії за давно прийнятою термінологією кажуть про силу тяжіння, маючи на увазі напруженість силового поля Землі.

За одиницю прискорення сили тяжіння в системі СІ прийнято вважати прискорення, що розвиває тіло масою 1 кг під дією сили 1 Н, і має розмірність $[m \cdot c^{-2}]$. В практиці гравіметричних досліджень, в першу чергу, польових використовується позасистемна одиниця «мілігал» (1 Гал=1 см·с⁻², 1 мГал=1·10⁻³ Гал). В останні роки в зв'язку з використанням сучасних автоматизованих переносних гравіметрів та істотним підвищенням точності гравіметричних зйомок використовується ще більш дрібна одиниця сили тяжіння – мікрогал (1 мкГал=1·10⁻⁶ Гал=1·10⁻⁸ м·с⁻²).

Середнє значення сили тяжіння на поверхні Землі складає 979,7 Гал. Повна зміна сили тяжіння від екватора до полюса складає близько 5,2 Гал ($g_e=978.0$ Гал, $g_p=983,2$ Гал). Тоді відносна величина зміни сили тяжіння складає:

$$\beta = \frac{g_p - g_e}{g_e} = \frac{1}{189} \quad (1.9)$$

Сила притягання значно перевищує дію відцентрової сили та визначає, в основному, величину та напрямок сили тяжіння (рис.1.3), відношення максимального значення відцентрової сили (на екваторі) до мінімального значення сили тяжіння (на екваторі) складає $\frac{\omega^2 a}{g_e} = \frac{1}{288}$, приймаючи кутову швидкість

$$\omega = \frac{2\pi}{86164,1} = 0,729212 \cdot 10^{-4},$$

де 86164,1 – число середніх секунд в зоряній добі, більшу напіввісь Землі $a=6\,378\,245$ м за Красовським, $g_e=978030$ за Гельмертом. Відцентрова сила змінюється від нуля на полюсах, до значення $\omega^2 a \approx 3,4$ Гал на екваторі. Вона направлена від осі обертання Землі та перпендикулярно до неї. Таким чином, відцентрова сила P зменшує силу тяжіння на величину $\omega^2 a \cos \varphi$, де φ – широта точки спостереження. Зміна відцентрової сили, в основному, визначає нормальну зміну напруженості гравітаційного поля від екватора до полюсів. Крім того, слід враховувати вплив стискання Землі, що також збільшує напруженість поля біля полюсів.

Крім цих двох постійно діючих складових, на силу тяжіння впливає ще ряд факторів, в першу чергу, притягання Місяця та Сонця. Їхній вплив відносно незначний і носить, переважно, періодичний характер. Проте при високоточних гравіметричних дослідженнях, при розбивці опорних сіток спостережень та при детальних гравіметричних зйомках, коли вишикувані аномалії складають одиниці або частки мілігала, цими чинниками не можна нехтувати та необхідно враховувати. Про їхнє врахування піде мова в наступних розділах.

1.4. ВАГА

Вага тіла – сила, з якою тіло діє на горизонтальну підставку або на вертикальний підвіс внаслідок гравітаційного тяжіння до Землі. При цьому передбачається, що тіло нерухомо щодо опори або підвісу. Нехай тіло лежить на нерухомому щодо Землі горизонтальному столі. Це визначення відноситься до системи відліку, пов'язаної з підставкою або підвісом. Воно відповідає практиці визначення ваги в земних умовах на пружинних вагах.

На тіло діють сила тяжіння $F_T = mg$, спрямована вертикально вниз, і сила $F_y = N$, з якою опора діє на тіло. Силу N називають силою нормального тиску або силою реакції опори. Сили, що діють на тіло, врівноважують один одного: $F_{Ty} = F = -N$. Відповідно до третього закону Ньютона тіло діє на опору з деякою силою P , що

дорівнює по модулю силі реакції опори і спрямованої в протилежну сторону:

$$P = - N.$$

Силу P називають вагою тіла.

Якщо тіло нерухомо висить на пружинних вагах, то роль сили реакції опори (підвісу) грає пружна сила пружини. За розтягування пружини можна визначити вагу тіла і рівну йому силу тяжіння тіла Землею. Для визначення ваги тіла можна використовувати також і ваги важелів, порівнюючи вагу даного тіла з вагою тягарців на рівноплечому важелі. Зрівноваживши ваги важелів шляхом зрівнювання ваги тіла сумарною вагою гирь, ми одночасно досягаємо рівності маси тіла сумарною масі гирь, незалежно від значення прискорення вільного падіння в даній точці земної поверхні. Наприклад, при підйомі в гори на висоту 1 км показання пружинних ваг змінюються на 0,0003 від свого значення на рівні моря. При цьому рівновага ваг зберігається. Тому ваги важелів є приладом для визначення маси тіла шляхом порівняння з масою гирь (еталонів).

Якщо зважується тіло, що рухається горизонтально щодо поверхні Землі, і його рух прямолінійний і рівномірний, наприклад, у вагоні поїзда, то результат буде той же, що і при зважуванні на земній поверхні.

У всіх інерційних системах відліку вага тіла одна і та ж, і у випадку вакууму чисельно дорівнює силі тяжіння. За третім законом Ньютона, вага у відсутності сили, що виштовхує, дорівнює за величиною і протилежна за напрямком силі нормальної реакції горизонтальної підставки (або силі натягу вертикального підвісу). У свою чергу, згідно з другим законом Ньютона, ця сила дорівнює за величиною і протилежна за напрямком силі тяжіння, тобто під дією цих сил тіло покоїться або рухається прямолінійно і рівномірно.

Таким чином, вага тіла за величиною дійсно збігається з силою тяжіння в інерційних системах відліку.

Однак ці дві сили не можна ототожнювати, тобто вага тіла - це сила, прикладена до підставки або підвісу з боку тіла, тоді як сила тяжіння прикладена до тіла з боку Землі. В неінерційній системах відліку вага тіла різниться від сили тяжіння за величиною.

Певно, має сенс розрізняти:

- **Силу притягання** тіл до Землі за законом всесвітнього тяжіння. Ця сила притягання не залежить від обертання Землі і від того, покоїться або рухається дане тіло в полі тяжіння Землі;

- **Силу тяжіння** – це різниця між силою притягання і відцентровою силою інерції. Спостережуване на Землі прискорення вільного падіння повідомляється тілам силою тяжіння. Лише нехтуючи відцентровою силою інерції в порівнянні з силою притягання, можна вважати, що прискорення вільного падіння дорівнює прискоренню сили притягання. На полюсі відцентрова сила інерції дорівнює нулю і сила тяжіння дорівнює силі притягання; на екваторі різниця між цими силами має максимальне значення;

- **Вагу тіла**, тобто силу, з якою тіло діє на опори, що перешкоджають його вільному падінню. Для тіла, що знаходиться в спокої, вага дорівнює силі тяжіння. Вага тіла з'являється тільки в тому випадку, якщо тіло змушене рухатися з прискоренням, відмінним від прискорення вільного падіння. Це можливо, якщо на тіло, крім сили притягання, діють і інші сили. ***Вагою тіла є та сила, з якою дане тіло діє на інші тіла, що перешкоджають його вільному руху в полі притягання.*** Якщо ж тіло рухається тільки під дією сили притягання, то воно є невагомим (при цьому траєкторія руху може бути будь-якою: прямолінійною, параболічною, еліптичною або круговою).

Для того, щоб в полі тяжіння Землі дане тіло рухалося з прискоренням ***a***, відмінним від ***g***, до нього має бути додана з боку інших тіл додаткова сила ***N***, яка задовольнить умові:

$$N + F = ma.$$

Тоді вага тіла, а саме сила, з якою дане тіло діє на інші тіла, буде дорівнювати:

$$P = -N = mg - ma = m(g - a). \quad (1.10)$$

Якщо тіло покоїться або рухається прямолінійно і рівномірно, то $a = 0$ і $P = mg$. Якщо тіло вільно рухається в полі тяжіння по будь-якій траєкторії і в будь-якому напрямку, то $a = g$, $P = 0$, і тіло буде невагомим.

При будь-якому русі тіла в гравітаційному полі іншого тіла завжди діє сила притягання. Вага ж з'являється тільки в тому

випадку, коли на дане тіло, крім сили тяжіння, діють ще й інші сили, внаслідок чого тіло змушене знаходитися в спокої або рухатися з прискоренням, відмінним від g .

1.5. НЕВАГОМІСТЬ

Коли тіло покоїться в полі притягання Землі на горизонтальній площині, на нього діють сила тяжіння та чисельно рівна їй, але протилежно спрямована сила – реакція опори. В результаті в тілі виникають внутрішні зусилля у вигляді взаємних тисків часток одна на одну. Людський організм сприймає такі внутрішні зусилля як звичний стан вагомості. З'являються ці внутрішні зусилля за рахунок дії реакції опори.

З формули (1.10) видно, що якщо $a < g$, то вага тіла P , що знаходиться в ліфті, який рухається прискорено (рис. 1.4) менше сили тяжіння. Якщо $a > g$, то вага тіла змінює знак.

Це означає, що тіло притискається не до підлоги, а до стелі кабіни ліфта ("від'ємна" вага).

Нарешті, якщо $a = g$, то $P = 0$. Тіло вільно падає на Землю разом з кабіною. Такий стан називають невагомістю.

Невагомість - стан тіла, коли його вага дорівнює нулю, тобто такий стан механічної системи, при якому гравітаційне поле, що діє на систему, не викликає тисків частинок системи один на одного. Будь-яке тіло, що вільно падає, та рухається тільки під дією сили тяжіння, знаходиться в стані невагомісті.

При русі космічного корабля навколо Землі його прискорення дорівнює прискоренню сили тяжіння (прискорення вільного падіння), тобто супутник знаходиться в стані вільного падіння. Тому сила тиску космонавта на опору дорівнює нулю. Для тренувань космонавтів стан невагомісті створюється на нетривалий час під час контрольованого вільного падіння літака.

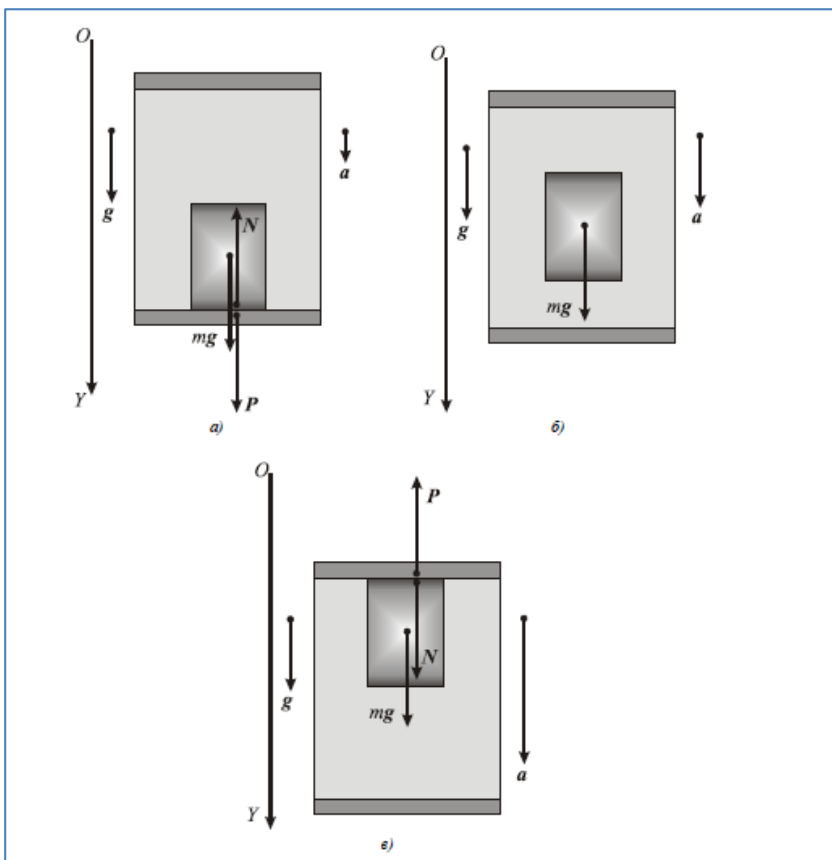


Рис. 1.4 Вага тіла, що знаходиться в ліфті, який рухається прискорено Вектор прискорення направлений вертикально вниз.

а – $a < g$, $P < mg$, б – $a = g$, $P = mg$ (невагомість), в – $a > g$, $P < 0$

1.6. КОСМІЧНІ ШВИДКОСТІ

Штучні супутники Землі (ШСЗ) рухаються за межами земної атмосфери, і на них діють тільки сили тяжіння з боку Землі. Залежно від початкової швидкості траєкторія космічного тіла може бути різною. Розглянемо випадок руху ШСЗ по навколоземній орбіті,

близькій до кругової. Вони здійснюють польоти на висотах близько 200 – 300 км, і можна наближено прийняти відстань R до центру Землі рівним її радіусу R_3 . Тоді нормальне прискорення супутника, яке передається йому силами тяжіння, приблизно дорівнює прискоренню вільного падіння g .

Якщо якийсь об'єкт (наприклад, ШСЗ) обертається по круговій орбіті на висоті, яка дуже мала в порівнянні з радіусом Землі, то його швидкість називають першою космічною швидкістю. Це найменша швидкість, яку треба передати тілу для перетворення його в супутник Землі.

Рух супутника можна розглядати як вільне падіння, подібне руху снарядів або балістичних ракет. Різниця полягає лише в тому, що швидкість супутника настільки велика, що радіус кривизни його траєкторії перевищує радіус Землі.

Фактично значення першої космічної швидкості залежить від висоти h над Землею. На тіло масою m , що рухається на висоті h над Землею, за законом всесвітнього тяжіння, діє сила:

$$F = G \frac{Mm}{(R+h)^2}, \quad (1.11)$$

де M і R – маса і радіус земної кулі.

В даному випадку прискорення вільного падіння грає роль нормального прискорення тіла, що рухається по круговій орбіті навколо Землі (супутника). З другого закону Ньютона:

$$F = \frac{mv_1^2}{R+h}. \quad (1.12)$$

Тоді перша космічна швидкість за відсутності атмосфери дорівнюватиме круговій швидкості:

$$v_1 = \sqrt{G \frac{M}{R+h}} = \sqrt{g(R+h)}, \quad (1.13)$$

$$v_1 = \sqrt{gR} = \sqrt{9,80665 \cdot 10^{-3} \cdot 6,371032 \cdot 10^3} \approx 7,91 \frac{\text{км}}{\text{с}}. \quad (1.14)$$

При обчисленнях використані середній радіус Землі та нормальне значення прискорення вільного падіння. Рухаючись з такою швидкістю, супутник облітав би Землю за час:

$$T_1 = \frac{2\pi R_c}{v_1} = 84 \text{хв. } 12 \text{с}. \quad (1.15)$$

Насправді період обертання супутника по круговій орбіті поблизу поверхні Землі трохи перевищує вказане значення через відмінності між радіусом *реальної орбіти ШСЗ* і радіусом Землі.

Для супутників, що рухаються по кругових траєкторіях на значній відстані від Землі, земне тяжіння слабшає, воно обернено пропорційне квадрату радіусу r траєкторії. Тоді швидкість супутника v знаходиться з умови:

$$\frac{v^2}{r} = g \frac{R_c^2}{r^2}, \quad v = \sqrt{g R_c} \sqrt{\frac{R_c}{r}} = v_1 \sqrt{\frac{R_c}{r}}, \quad (1.16)$$

$$\frac{v_0}{v_1} = \sqrt{\frac{R_1}{R_0}}, \quad (1.17)$$

де v_0 – швидкість обертання по орбіті R_0 , а v_1 – швидкість обертання по орбіті R_1 . При $h=0$ $v_1 \approx 7,91 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1}$; для висоти 300 км $v_1 \approx 7,7 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1}$; а для висоти 20 000 км $v_1 \approx 3,9 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1}$.

Зауважимо, що при запуску штучного супутника його початкова швидкість повинна бути спрямована по дотичній до земної поверхні. Період обертання T супутника:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{v_1} \sqrt{\frac{r}{R_3}} = \frac{2\pi R_c}{v_1} \frac{r^{\frac{3}{2}}}{R_c} = T_1 \frac{r^{\frac{3}{2}}}{R_c}, \quad (1.18)$$

де T_1 – період обертання супутника на навколоземній орбіті.

Період обертання супутника зростає зі збільшенням радіуса орбіти. Якби Земля була однорідним шаром, і не існувало б атмосфери, то супутник рухався б по орбіті, площа якої зберігає незмінну орієнтацію в просторі щодо системи нерухомих зірок. Елементи орбіти в цьому випадку визначаються законами Кеплера. Так як Земля обертається, то при кожному наступному обороті супутник рухається над різними точками земної поверхні. Знаючи трасу супутника за один який-небудь оборот, неважко передбачити його положення в усі наступні моменти часу. Для цього необхідно врахувати, що Земля обертається із заходу на схід з кутовою швидкістю приблизно 15 градусів на годину. Тому на наступному обороті супутник перетинає ту ж широту на захід на стільки градусів, на скільки Земля повернеться на схід за період обертання супутника.

Через опір земної атмосфери супутники не можуть довго рухатися на висотах нижче 160 км. Мінімальний період обертання

на такій висоті по круговій орбіті дорівнює приблизно 88 хв. За цей час Земля обертається на 22,5 градуси. На широті 50 градусів цьому куту відповідає відстань в 1400 км. Отже, можна сказати, що супутник, період обертання якого 88 хв., на широті 50 градусів буде спостерігатися при кожному наступному обороті приблизно на 1400 км на захід, ніж на попередньому.

Однак такий розрахунок дає достатню точність прогнозів лише для кількох оборотів супутника. Якщо мова йде про значні проміжки часу, то треба брати до уваги відміну зоряної доби від 24 годин. Оскільки один оборот навколо Сонця відбувається Землею за 365 діб, то за одну добу Земля навколо Сонця описує кут приблизно в 1 градус (точніше, 0,99) в тому ж напрямку, в якому обертається навколо своєї осі. Тому за 24 години Земля обертається щодо нерухомих зірок не на 360 градусів, а на 361 і, отже, робить один оборот не за 24 години, а за 23 години 56 хвилин. Тому траса супутника за широтою зміщується на захід не на 15 градусів на годину, а на 15,041 градусів.

Супутникові орбіти вибираються виходячи з можливостей і призначення приладів, які розміщені на супутнику. Орбіти розрізняються по висоті над поверхнею Землі та по орієнтації площини обертання супутника відносно Землі. Двома найбільш поширеними типами орбіт є геостаціонарні орбіти та полярні орбіти.

Неважко підрахувати, що при радіусі r орбіти, що дорівнює приблизно $6,6 R_c$, період обертання супутника виявиться рівним 24 годинам. Супутник з таким періодом обертання, запущений в площині екватора, буде нерухомо висіти над деякою точкою земної поверхні. Такі супутники використовуються в системах космічного радіозв'язку. Орбіту з радіусом $r = 6,6 R_c$ (35 800 км) називають геостаціонарною.

Більшість дослідницьких і розвідувальних супутників в даний час літає по полярним орбітах. Це означає, що супутник летить на північ над однією стороною Землі, пролітає поблизу полюса, а потім летить на південь на другій половині орбіти. Полярні орбіти істотно нижче, ніж геостаціонарні. Багато з таких супутникових орбіт є також сонячно-синхронізованими так, що супутники пролітають над обраним об'єктом в один і той же час. Це забезпечує приблизно однакові умови освітленості поверхні Землі в один і той же час року

впродовж декількох років. Половину орбіти, по якій супутник летить в північному напрямку, називають висхідною орбітою, а іншу половину – низхідною.

Перша космічна швидкість – найменша початкова швидкість, яку потрібно повідомити тілу біля поверхні Землі, щоб воно стало штучним супутником Землі. Будемо поступово збільшувати початкову швидкість супутника. Тоді його орбіта прийме форму еліпса. Найближчу до Землі точку орбіти (точку, в якій супутник відділяється від останнього ступеня ракети-носія) називають перигеєм, а найвіддаленішу – апогеєм. Зі збільшенням швидкості запуску ексцентриситет орбіти зростає, та велика піввісь прямує до нескінченності. Еліптична орбіта вироджується в параболічну.

Швидкість руху по параболі відносно Землі прийнято називати другою космічною швидкістю. Це найменша швидкість, яку потрібно передати тілу, щоб його орбіта в полі тяжіння стала параболічною:

$$v = \sqrt{2gR_c} \approx 11,186 \frac{\text{км}}{\text{с}}. \quad (1.19)$$

Для того щоб покинути межі Сонячної системи, тіло повинно подолати ще й сили тяжіння до Сонця. Необхідна для цього швидкість запуску тіла з поверхні Землі – третя космічна швидкість v_3 . При запуску в напрямку орбітального руху Землі v_3 мінімальна і становить $16,653 \frac{\text{км}}{\text{с}}$. При запуску в напрямку, протилежному напрямку руху Землі, v_3 $73 \frac{\text{км}}{\text{с}}$. Можна обчислити початкову швидкість, яку необхідно надати тілу щодо Землі, щоб воно впало на Сонце. У цьому випадку швидкість тіла відносно Сонця буде дорівнювати нулю, а відносно Землі – $31,816 \frac{\text{км}}{\text{с}}$. Цю швидкість іноді називають четвертою космічною швидкістю.

1.7. ПРИСКОРЕННЯ СИЛИ ТЯЖІННЯ ТА ПОТЕНЦІАЛ СИЛИ ТЯЖІННЯ

Відомо, що векторні поля, вихори яких дорівнюють нулю, називаються безвихровими або потенціальними. Це важливий клас фізичних полів, яким притаманні певні властивості. Ці властивості розглянемо на прикладі потенціалу сили тяжіння.

Гравітаційне поле Землі є потенціальним, тобто таким, в якому кожній точці простору навколо Землі відповідає деяка неперервна, що має неперервні похідні, функція. Похідні цієї функції по напрямкам дорівнюють проекціям сили тяжіння на ці напрямки. Ця функція називається потенціалом.

За визначенням потенціал сили тяжіння W є сума потенціалу притягання V та потенціалу відцентрової сили U :

$$V = G \int \frac{dm}{r}, \quad U = \frac{\omega^2}{2} \rho^2,$$

і тоді:

$$W = G \int \frac{dm}{r} + \frac{\omega^2}{2} \rho^2, \quad (1.20)$$

Зміна потенціалу при переміщенні маси з однієї точки в будь-яку іншу дорівнює роботі, яка витрачається на цей перенос:

$$dW = F ds, \quad (1.21)$$

де F – напруженість поля;

ds – переміщення маси.

Функція, представлена рівнянням (1.20), задовольняє визначенню потенціалу. Це легко довести. Розглянемо рис. 1.5. З нього видно, що

$$r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2, \quad (1.22)$$

$$\rho^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2, \quad (1.23).$$

Тоді похідні по напрямкам x , y і z дорівнюють:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= -G \int \frac{\partial r}{\partial x} \frac{dm}{r^2} + \omega^2 \rho \frac{\partial \rho}{\partial x}, \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= -G \int \frac{\partial r}{\partial y} \frac{dm}{r^2} + \omega^2 \rho \frac{\partial \rho}{\partial y}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = -G \int \frac{\partial r}{\partial z} \frac{dm}{r^2} + \omega^2 \rho \frac{\partial \rho}{\partial z},$$

В рівняннях (1.24)

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \cos \cos (F, x), \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \cos \cos (P, x), \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \cos \cos (F, y), \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \cos \cos (P, y), \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \cos \cos (F, z), \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0.$$

$\cos \cos (F, z)$ - направляючі косинуси притягання F та відцентрової сили P .

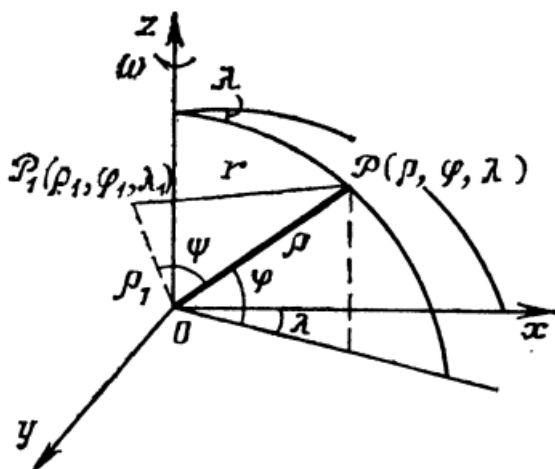


Рис. 1.5. Визначення потенціалу сили тяжіння [118]

Тоді рівняння (1.24) можна представити у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= F \cos \cos (F, x) + P \cos \cos (P, x) = F_x + P_x, \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= F \cos \cos (F, y) + P \cos \cos (P, y) = F_y + P_y, \\ \frac{\partial W}{\partial z} &= F \cos \cos (P, z) = F_z, \end{aligned} \quad (1.26)$$

F_x, F_y, F_z, P_x, P_y - проекції напруженості сили притягання та відцентрової сили відповідно.

Якщо маса переміщується з точки A в довільному напрямку в точку B , здійснюючи елементарне переміщення ds , то повний приріст потенціалу визначається за формулою:

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz, \quad (1.27)$$

де

$$\begin{aligned} dx &= ds \cos \cos (s, x), \\ dy &= ds \cos \cos (s, y), \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$dz = ds \cos \cos (s, z).$$

Беручи до уваги (1.28) і (1.26), отримаємо

$$dW = Fds[\cos \cos (F, x) \cos \cos (s, x)(F, y) \cos \cos (s, y) + \cos \cos (F, z) \cos \cos (s, z)].$$

Враховуючи, що $\cos \cos (F, x) \cos \cos (s, x)(F, y) \cos \cos (s, y) + \cos \cos (F, z) \cos \cos (s, z) = \cos \cos (F, s)$,
отримаємо

$$\frac{dW}{ds} = F \cos \cos (F, s) = F_s. \quad (1.29)$$

З цієї властивості потенціалу випливають два важливих наслідки, які пояснюють фізичну сутність введеного поняття. З рівняння (1.29) слідує, що приріст потенціалу є робота по переміщенню матеріальної точки в полі сил тяжіння. У випадку, коли точка переміщується в напрямку, що є ортогональним напрямку дії сили $\vec{F}$, $\cos \cos (F, s) = 0$, $dW = 0$. Взявши інтеграл від останнього виразу, отримаємо:

$$W = \text{const} = C. \quad (1.30)$$

Останнє рівняння є рівнянням деякої поверхні, в будь-якій точці якої, сила спрямована по нормалі до неї. Робота матеріальної точки при переміщенні по цій поверхні дорівнює нулеві ($dW = 0$). На матеріальну точку, розташовану на цій поверхні, не діють дотичні складові сили, оскільки сила нормальна до неї і, відповідно, точка знаходиться у рівновазі. Ця поверхня є поверхнею рівноваги рідини; саме за нею встановлюється рівень рідини. Така поверхня називається рівневою поверхнею, або екіпотенціальною, внаслідок незмінності на ній потенціалу. Якщо в рівнянні (1.30) задавати різні значення сталих, то отримаємо сімейство рівневих поверхонь, для яких сусідні рівневі поверхні ніколи не торкаються одна одної та не перетинаються.

1.8. ЕКВІПОТЕНЦІАЛЬНІ (РІВНЕВІ) ПОВЕРХНІ

Розглянемо випадок переміщення точки вздовж лінії дії сили $\vec{F}$.
Тоді

$$\cos \cos (\vec{F}, s) = 1, \quad ds = \frac{dW}{F}. \quad (1.31)$$

В цьому рівнянні ds – переміщення, перпендикулярне рівневій поверхні; dW – приріст потенціалу при переході від однієї рівневої поверхні до іншої, що є нескінченно близькою.

Ці дві нескінченно близькі поверхні визначаються рівняннями:

$$W = C, \quad W_1 = C + dW.$$

Згідно з рівнянням (1.31) відстань між двома нескінченно близькими поверхнями рівня обернено пропорційна діючій силі. Простір, в якому діє сила $\vec{F}$, визначено як поле сил. Напрямки дії сил називаються силовими лініями, а величину сили $\vec{F}$ в кожній точці – напруженістю поля. Рівневі поверхні розташовуються тим густіше, чим більше напруженість поля.

Оскільки на кожній рівневій поверхні потенціал є величиною сталою, то його приріст при переході матеріальної точки з однієї рівневої поверхні на іншу є постійна величина, що не залежить від положення точки на цій поверхні. Звідси слідує, що приріст потенціалу не залежить від шляху переміщення матеріальної точки, а є лише функцією положення кінцевих точок переміщення.

Одна з важливих властивостей отримала назву теореми Лапласа. Згідно цієї теореми для точки, що знаходиться зовні мас, які притягають, сума других похідних потенціалу притягання по осям декартових координат дорівнює нулеві:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (1.32)$$

Теорема Лапласа просто доводиться прямим диференціюванням потенціалу притягання. Рівняння для потенціалу точкової маси $V = \frac{Gm}{r}$ при диференціюванні по координатам x, y, z приводить до наступних виразів:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -G \frac{m}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x}, \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= -G \frac{m}{r^2} \frac{\partial r}{\partial y}, \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= -G \frac{m}{r^2} \frac{\partial r}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Значення похідних $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z}$ знайдемо з використанням рівняння (1.22):

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x} &= -\frac{\xi-x}{r}, \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= -\frac{\eta-y}{r}, \\ \frac{\partial r}{\partial z} &= -\frac{\varsigma-z}{r}.\end{aligned}\tag{1.34}$$

Використовуючи рівняння (1.33) та (1.34) отримаємо рівняння перших похідних потенціалу притягання

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= Gm \frac{\xi-x}{r^3}, \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= Gm \frac{\eta-y}{r^3}, \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= Gm \frac{\varsigma-z}{r^3}.\end{aligned}\tag{1.35}$$

Відповідним диференціюванням знайдемо другі похідні:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= Gm \left[-3 \frac{\xi-x}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{1}{r^3} \right] = Gm \left[3 \frac{(\xi-x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right], \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= Gm \left[-3 \frac{\eta-y}{r^4} \frac{\partial r}{\partial y} - \frac{1}{r^3} \right] = Gm \left[3 \frac{(\eta-y)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right], \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= Gm \left[-3 \frac{\varsigma-z}{r^4} \frac{\partial r}{\partial z} - \frac{1}{r^3} \right] = Gm \left[3 \frac{(\varsigma-z)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right].\end{aligned}\tag{1.36}$$

Додавши відповідно праві та ліві частини рівнянь (1.36), отримаємо:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= Gm \left\{ \frac{3}{r^5} [(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\varsigma-z)^2] - \right. \\ &\left. \frac{3}{r^3} \right\} = 0\end{aligned}\tag{1.37}$$

У випадку, коли точка, що притягається знаходиться всередині мас, які притягаються, рівняння Лапласа для потенціалу притягання перетворюється в рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi G\sigma,\tag{1.38}$$

де σ – густина речовини.

Коли ми розглядаємо не потенціал притягання, а потенціал сили тяжіння

$$W = \frac{Gm}{r} + \frac{\omega^2}{2} \rho^2,$$

то тоді, рівняння Лапласа (1.32) набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 2\omega^2,\tag{1.39}$$

а рівняння Пуассона (1.38)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi G\sigma + 2\omega^2. \quad (1.40)$$

Рівняння (1.39) та (1.40) легко отримати, якщо замість потенціалу притягання двічі продиференціювати по декартовим координатам потенціал сили тяжіння.

Тоді похідні потенціалу відцентрової сили

$$U = \frac{\omega^2}{2} \rho^2 = \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) \text{ представляються}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \omega^2 x, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \omega^2 y, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \omega^2, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \omega^2, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Основні властивості потенціалу притягання

1. потенціал V і його перші похідні – однозначні, неперервні і кінцеві функції координат точки, що притягується, в усьому просторі зовні гравітуючих мас;

2. потенціал V – функція регулярна, тобто на нескінченності вона прямує до нуля

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V = 0;$$

3. при віддаленні від мас, що притягують M , добуток ρV прямує до значення

$$\lim_{r \rightarrow \infty} rV = GM$$

4. в кожній точці за межами мас, які притягаються, потенціал задовольняє рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (1.41)$$

5. В кожній точці всередині мас, які притягуються, справедливе рівняння Пуассона

$$\Delta V = -4\pi G\delta, \quad (1.42)$$

де δ – густина мас, які оточують точку.

Формула (1.41) є частковим випадком рівняння (1.42) при $\delta=0$.

$$W(x, y, z) = V(x, y, z) + U(x, y) \quad (1.43)$$

Часткові похідні від функції W по координатам x, y, z дорівнюють складовим сили тяжіння g_x, g_y, g_z :

$$\frac{\partial W}{\partial x} = g_x; \frac{\partial W}{\partial y} = g_y; \frac{\partial W}{\partial z} = g_z; \quad (1.44)$$

Таким чином, за скалярну функцію поля приймається функція W , яка називається *потенціалом сили тяжіння*. В фізичному розумінні це енергія, яку потрібно витратити, щоб перемістити в полі сили тяжіння тіло одиничної маси із точки спостереження у нескінченність. Потенціал має максимальне значення в центрі Землі і неперервно спадає по мірі віддалення від нього.

Нехтуючи потенціалом відцентрової сили, можна стверджувати, що потенціал сили тяжіння для точки, яка розташована на земній поверхні, має вигляд:

$$W_1 = G \frac{M}{r} . \quad (1.44)$$

Якщо прийняти до уваги, що в будь-якій іншій точці, що розташована на продовженні земного радіуса r , потенціал дорівнює:

$$W_2 = G \frac{M}{r + \Delta r} , \quad (1.45)$$

то виконується рівність:

$$\Delta W = W_2 - W_1 = fM \left(\frac{-\Delta r}{r(r + \Delta r)} \right) . \quad (1.46)$$

Якщо $\Delta r \rightarrow 0$, то

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \Delta W = -f \frac{M \Delta r}{r^2} = -g \Delta r . \quad (1.47).$$

З рівняння (1.47) можна отримати, що $g = -\frac{dW}{dr}$, тобто прискорення сили тяжіння є перша похідна потенціалу сили тяжіння в напрямку до центра Землі. В фізичному розумінні потенціал - є робота, що витрачається при русі точкової маси, що притягається на відрізок Δr : $|dW| = g \Delta r$. При переміщенні точки в напрямку, що ортогональний до діючої сили маємо:

$$(g, \Delta r) = 90^\circ, \cos(g, \Delta r) = 0 \quad i \quad dW = 0, \quad W = const . \quad (1.48)$$

Це рівняння деякої поверхні, у будь-якій точці якої сила тяжіння спрямована по нормалі до неї. Надаючи функції W різні значення, одержимо родину еквіпотенціальних поверхонь, тобто поверхонь рівного потенціалу, що у гравіметрії називають еквіпотенціальними поверхнями. Однією з них є поверхня, що збігається з рівнем води у Світовому океані в спокійному стані, яка названа *геоїдом*. Вона характеризує фігуру Землі.

1.9. ГЕОЇД

Рівняння (1.30) представляє множину рівневих поверхонь, кожна з яких окремо можна отримати, надаючи певні значення сталій C . Таким чином можна побудувати рівневу поверхню, що співпадає з поверхнею деякої ідеальної Землі.

Скористаємося формулою для потенціалу (1.20)

$$W = G \int \frac{dm}{r} + \frac{\omega^2}{2} \rho^2.$$

Прирівнюючи потенціал сталій C , отримаємо сімейство рівневих поверхонь

$$G \int \frac{dm}{r} + \frac{\omega^2}{2} \rho^2 = C.$$

Скористаємося сферичною системою координат. Тоді

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \varphi,$$

де r – геоцентрична відстань

$$G \int \frac{dm}{r} + \frac{\omega^2}{2} r^2 \cos^2 \varphi = C. \quad (1.49)$$

Виберемо C таким чином, щоб останнє рівняння відповідало б Землі. Для цього досить отримати співпадіння поверхні (1.49) хоча б в одній точці з поверхнею Землі. В якості такої точки візьмемо довільну точку екватору на рівні океану. Тоді

$$\varphi = 0, \quad r = a,$$

звідки

$$C = G \left[\int \frac{dm}{r} \right]_{r=a} + \frac{\omega^2}{2} a^2.$$

Підставляючи це значення C в рівняння (1.20), отримаємо

$$G \int \frac{dm}{r} + \frac{\omega^2}{2} \rho^2 = G \left[\int \frac{dm}{r} \right]_{r=a} + \frac{\omega^2}{2} a^2, \quad (1.50)$$

рівняння рівневої поверхні, яка досить близька до поверхні Землі на рівні океану. Ця поверхня називається геоїдом. Підінтегральна функція лівої частини рівняння (1.50) розгортається в нескінченний ряд та інтегрується почленно. Якщо в отриманому ряді утримати лише члени порядку квадрата стиснення (перші три члени), то отримаємо рівняння сфероїда (поверхня, яка дуже близька до еліпсоїду).

Значення сили тяжіння на поверхні такого геоїду знаходять, виконуючи диференціювання потенціалу (1.20) по напрямку нормалі. Оскільки нормаль не входить в зазначене рівняння потенціалу, диференціювання проводиться по радіусу. При цьому допускається помилка порядку квадрату стиснення. Радіус-вектор земного еліпсоїду не відхиляється від нормалі більше, ніж на $11''$, що приблизно відповідає помилці в 10^{-5} . Поняття геоїда вперше було введено в 1873 році німецьким геодезистом Лістингом, як рівневої поверхні, яка представляє фігуру Землі. Саме слово «геоїд» в перекладі з грецької означає Земле подібний, який близький за формою до Землі.

Геоїд – це рівнева поверхня, що співпадає на океанах з незбуреним рівнем води і продовжена під континенти таким чином, що сила тяжіння в будь-якій точці цієї поверхні направлена по нормалі до неї. В силу цієї властивості геоїд є поверхнею рівноваги. Геоїд проходить поблизу від загального земного еліпсоїду, іноді піднімаючись над ним, іноді занурюючись під нього, проте всюди залишається випуклим.

Геоїд – це наступний крок наближення до істинної фігури Землі після земного еліпсоїду (рис. 1.6.), хоча першим наближенням в представленнях про фігуру Землі було представлення її у виді кулі. Відтоді як Ньютоном було встановлено та доведено стиснення Землі її почали представляти в вигляді еліпсоїду зі стисненням $\alpha = \frac{a-b}{a}$, де a – велика, b – мала напіввісі земного еліпсоїду.

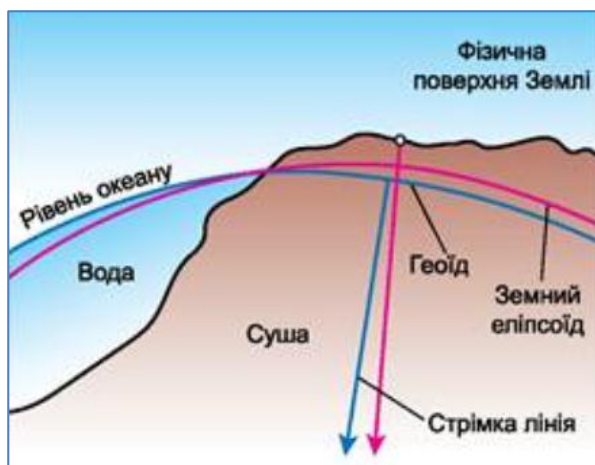


Рис. 1.6. Схематичне представлення геоїду

Перехід від кулі до еліпсоїду став істотним наближенням апроксимуючої поверхні до істинної поверхні Землі. Це відповідало наближенню до правильної поверхні Землі на 20 км (різниця між полярною та екваторіальною напіввісями). Тепер, коли Земля представляється еліпсоїдом, при правильній орієнтації його в надрах Землі, найбільші відхилення його від істинної фігури Землі визначаються рельєфом – відхиленням фізичної поверхні Землі від еліпсоїду. Врахування цих відхилень істинної фігури Землі від ідеальної – еліпсоїду, прийнято вважати наступним наближенням в представленнях про фігуру Землі.

Введення поняття геоїду не наближає до істинної фігури Землі, а іноді і віддаляє. В тих місцях, де висоти геоїду від'ємні, геоїд віддалений від фізичної поверхні Землі далі, ніж еліпсоїд. На океанах геоїд дуже наближений до фізичної поверхні Землі – рівню моря. Лінійна міра відхилень геоїда від еліпсоїда складає десятки метрів та не перебільшує 200 м. Як основний недолік геоїду слід виділити неправильність його форми. Тому на відміну від еліпсоїду для нього неможливо записати прості геометричні співвідношення, і це унеможливило його використання при вирішенні прикладних геодезичних задач. Проте геоїд є поверхнею від якої проводиться відлік висот. Висоти визначають відносно рівня моря. При цьому

вважають, що рівень всіх морів однаковий та співпадає з поверхнею геоїда. Ця думка є невірною. Рівні морів неоднакові, та початок відліку висот проводиться відносно деякої умовної точки (реперу), яка звичайно співпадає з середнім за багато років рівнем океану.

Геоїд є дуже зручною поверхнею відносності для всіх вимірних значень сили тяжіння. В дійсності, виміряні на різних висотах значення сили тяжіння важко порівнювати між собою. Виконуючи редукцію їх на поверхню геоїда, ми приводимо їх до одного рівня та отримуємо можливість співставляти їх одне з одним.

1.10. НОРМАЛЬНЕ ГРАВІТАЦІЙНЕ ПОЛЕ ЗЕМЛІ

Реальне гравітаційне поле Землі математично є дуже складним. Це насамперед пов'язано з тим, що Земля має складну форму зовнішньої поверхні, а також складну внутрішню будову. Густина порід змінюється від поверхні Землі до її центра та в горизонтальному напрямі. Тому реальне гравітаційне поле Землі ділять на дві частини, нормальне та аномальне. Нормальне гравітаційне поле представляють простою моделлю, яка близька до реальної Землі. Аномальні гравітаційні поля пов'язані неоднорідністю внутрішньої будови Землі, сучасними геодинамічними процесами, що відбуваються у надрах Землі, різкими змінами густин як у вертикальному, так і латеральному напрямках, тощо. Модель гравітаційного поля прийнято називати нормальним гравітаційним полем. За фігуру такої «теоретичної» Землі приймають еліпсоїд обертання, поверхня якого є рівневою. Цей еліпсоїд називають рівневим еліпсоїдом. При підборі рівневого еліпсоїда необхідно, щоб задовольнялися такі умови:

1. Центр рівневого еліпсоїда збігається з центром мас Землі, а його головна вісь інерції збігається з віссю обертання Землі.
2. Рівневий еліпсоїд обертається з такою самою кутовою швидкістю ω , що й реальна Земля.
3. Маса рівневого еліпсоїда дорівнює масі реальної Землі.
4. Зональні гармонічні коефіцієнти другого порядку для рівневого еліпсоїда та реальної Землі повинні збігатися:

$$I_2^e = I_2^3.$$

5. Нормальний потенціал U_0 сили тяжіння на поверхні

рівневого еліпсоїда повинен дорівнювати реальному потенціалу W_0 сили тяжіння на рівневій поверхні, яка проходить через початок відліку висот.

Отже, сталі ω, I_2, GM та U_0 є основними, які визначають Нормальну Землю. Їх називають фундаментальними геодезичними сталими, які характеризують Нормальну Землю. До них належать такі величини: велика піввісь рівневого еліпсоїда a (замість нормального потенціалу U_0), геоцентрична гравітаційна стала GM зональний коефіцієнт I_2 , кутова швидкість обертання Землі ω .

На XVII Генеральній Асамблеї Міжнародного геодезичного і геофізичного союзу в Канберрі (грудень 1979 р) була прийнята геодезична референційна система 1980р (GRS 1980), яка визначає основні параметри глобального, найкращим чином апроксимуючого Землю еліпсоїда. В GRS 1980 були вибрані такі чотири незалежні константи:

$$\begin{aligned} a &= 6378137 \text{ м}, \\ GM &= 3986005 \cdot 10^8 \text{ м}^3 \text{ с}^{-2}, \\ I_2 &= 108263 \cdot 10^{-8}, \end{aligned}$$

$$\omega = 7292115 \cdot 10^{-11} \text{ с}^{-1}.$$

Відзначимо, що задається геоцентрична гравітаційна стала GM , яка включає атмосферу Землі. Гравітаційна стала G відома з точністю до чотирьох значущих цифр, а значення GM – з точністю до семи значущих цифр.

Для екіпотенціального (рівневого) еліпсоїда можуть бути знайдені всі інші сталі: стиснення α , ексцентриситет e , екваторіальна сила тяжіння γ_e і нормальний потенціал рівневого еліпсоїда U_0 :

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,003352810681 = 1/298,2572221, \\ e^2 &= 0,006694380023, \\ \gamma_e &= 9,7803267715 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}, \\ U_0 &= 6263686,0850 \cdot 10^2 \text{ м}^2 \text{ с}^{-2}. \end{aligned}$$

Наведемо також допоміжні безрозмірні величини та їхні значення:

$$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM} = 0,003449786,$$

$$\beta = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e} = 0,005302440.$$

Нормальну силу тяжіння γ визначимо як похідну від нормального потенціалу U за напрямком зовнішньої нормалі n до рівневої поверхні

$$\gamma = -\frac{\partial U}{\partial n}. \quad (1.51)$$

Враховуючи, що кут між нормаллю n до $U = const$ і радіус-вектором ρ не перевищує $11'$, можна вважати, що

$$\gamma = -\partial U / \partial \rho.$$

Визначимо тепер значення нормальної сили тяжіння γ_0 на поверхні рівневого еліпсоїду $U = U_0$. Для знаходження сталої U_0 використаємо наближене значення потенціалу сили тяжіння, яке одержують із розкладання його в ряд за сферичними функціями:

$$U_0 = \frac{GM}{\rho} + \frac{G(A_m - C)}{\rho^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) + \frac{GMq}{2a^3} \cdot \rho^2 \sin^2 \theta. \quad (1.52)$$

Після диференціювання по радіус-вектору одержимо:

$$\gamma = -\frac{\partial U_0}{\partial \rho} = \frac{GM}{\rho^2} + \frac{3G(A_m - C)}{\rho^4} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) + \frac{GMq}{a^3} \cdot \rho \sin^2 \theta. \quad (1.53)$$

При $\rho = a$ з точністю до малих величин першого порядку

$$\gamma_0 = \frac{GM}{a^2} \left[1 + \alpha - \frac{3}{2} q + \left(\frac{5}{2} q - \alpha \right) \cos^2 \theta \right]. \quad (1.54)$$

Після розкладання потенціалу в ряд та утримання членів порядку квадрату стиснення, отримуємо залежність між силою тяжіння та широтою місцерозташування. Ця залежність відноситься до фігури Землі у виді сфероїду, або з тим же ступенем точності, еліпсоїду.

Якщо $\theta = 0$ полярна постійна γ_p визначається

$$\gamma_p = \frac{GM}{a^2} (1 + q),$$

а при $\theta = \frac{\pi}{2}$ – екваторіальна постійна

$$\gamma_e = \frac{GM}{a^2} \left(1 + \alpha - \frac{3q}{2} \right)$$

Після нескладних перетворень одержимо

$$\beta = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e} = \frac{5}{2} q - \alpha, \quad (1.54)$$

$$\gamma_0 = \gamma_e(1 + \beta^2 \sin^2 B - \beta_1 \sin^2 2B), \quad (1.55)$$

$$q = \frac{\omega^2 a}{\gamma_e}, \quad \beta_1 = \frac{\alpha^2}{8} + \frac{1}{4} \alpha \beta, \quad \theta = 90^\circ - B.$$

Ці формули були одержані у XVIII столітті французьким математиком Клеро. Перша формула теореми Клеро (1.55) встановлює закон змінення нормальної сили тяжіння на поверхні Землі. Друга формула теореми Клеро з членами другого порядку записується у вигляді:

$$\alpha + \beta = \frac{5}{2}q - \frac{17}{14}\alpha q, \quad (1.56)$$

де q визначається за формулою:

$$q \approx \frac{\omega^2 \alpha^3}{f M}. \quad (1.57)$$

З (1.56) може бути обчислено стиснення еліпсоїду α :

$$\alpha = \frac{\frac{5}{2}q - \beta}{1 + \frac{17}{14}q}. \quad (1.58)$$

В своїй роботі Клеро, спираючись на закон Всесвітнього тяжіння, вивів основні співвідношення, що пов'язують форму Землі з розподілом сили тяжіння на ній. В теоремі Клеро було зроблено передбачення, що Земля є тілом обертання, яке мало відрізняється від сфери не тільки за формою, але й за розподілом мас, тобто моменти інерції відносно будь-якої осі, що лежить в площині екватора, рівні.

На початку XX століття (1928 р.) Мінео одержав формулу нормальної сили тяжіння для тривісного еліпсоїда

$$\gamma = \frac{(a\gamma_a \cos^2 \lambda + b\gamma_b \sin^2 \lambda) \sin^2 \varphi + c\gamma_c \sin^2 \varphi}{\sqrt{(a^2 \cos^2 \lambda + b^2 \sin^2 \lambda) \cos^2 \varphi + c^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (1.59)$$

а в 1929р – італійські вчені-геодезисти Сомільяна та Піцетті одержали замкнуту формулу для нормальної сили тяжіння γ на двовісному еліпсоїді

$$\gamma = \frac{a\gamma_e \cos^2 B + b\gamma_p \sin^2 B}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}. \quad (1.60)$$

У цих формулах a, b, c – параметри тривісного еліпсоїда, $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_c$ – нормальна сила тяжіння за напрямом головних осей і відповідно a, b – параметри рівневого еліпсоїда обертання, B – геодезична широта пункту. Розкладаючи в цій формулі знаменник в ряд, та відкидаючи члени вищих порядків, легко прийти до

результатів та формул, отриманих Клеро. Формула (1.58) називається формулою розподілу нормальної сили тяжіння. Коефіцієнти формули γ_e, β, β_1 визначають за експериментальними даними про гравітаційне поле Землі. Найбільш широке застосування набули формули Гельмерта (1901 – 1909 р.р.) та формула Кассініса. Гельмерт використав дані для 1603 гравіметричних пунктів, розташованих на материках у північній півкулі

$$\gamma_0^{1909} = 9,78030(1 + 0,005302 \sin^2 B - 0,0000070 \sin^2 2B) \quad (1.61)$$

Формула Кассініса (1885 – 1964 р.р.)

$$\gamma_0^{1930} = 9,78049(1 + 0,0052884 \sin^2 B - 0,0000059 \sin^2 2B) \quad (1.62)$$

відповідає параметрам еліпсоїда Хейфорда, які були прийняті в 1930 р. (Стокгольм) Міжнародною угодою, і через те її назвали Міжнародною. Сила тяжіння у формулах Гельмерта і Кассініса виражена в Потсдамській системі, що вимагає для γ_0 ввести поправку -14 мГал. Для переходу від формули Кассініса до формули Гельмерта існує залежність

$$\gamma_0^{1909} = \gamma_0^{1930} - (19,0 - 13 \cdot 2 \sin^2 B + 1,076 \sin^2 2B) \text{ мГал} \quad (1.63)$$

Формула нормальної сили тяжіння для геодезичної референційної системи 1980 року має вигляд

$$\gamma_0 = 9,7803266(1 + 0,0053024 \sin^2 B - 0,00000585 \sin^2 2B) \text{ мс}^{-2}$$

1.11. ДРУГІ ПОХІДНІ ПОТЕНЦІАЛУ СИЛИ ТЯЖІННЯ. ОДИНИЦІ ВИМІРЮВАННЯ ДРУГИХ ПОХІДНИХ

Для геологічної інтерпретації гравіметричних даних крім значень Δg_a використовують другі, а іноді і треті похідні гравітаційного потенціалу.

Існує шість других похідних гравітаційного потенціалу по осям x, y, z , що позначаються $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}$, а в більш

прийнятому виді $W_{xx}, W_{yy}, W_{zz}, W_{xy}, W_{xz}, W_{yz}$. Безпосередньо вимірюють W_{xy}, W_{xz}, W_{yz} і різницеве значення $W_{\Delta} = W_{yy} - W_{xx}$. Інші похідні другого і третього порядків можуть бути обчислені за значеннями відомих величин Δg і других похідних гравітаційного потенціалу.

Другі похідні гравітаційного потенціалу вимірюють за допомогою спеціальних приладів – гравітаційних варіометрів і градієнтометрів. Гравітаційні варіометри визначають чотири параметри, а саме $-W_{xy}, W_{xz}, W_{yz}$ і $W_{\Delta} = W_{yy} - W_{xx}$, градієнтометри – W_{xz}, W_{yz} .

Одиницею вимірювання других похідних є величина $1 \cdot 10^{-9} \text{ с}^{-2}$, що називається етвешем (Е) на честь угорського фізика та математика Лоранда Етвьоша – засновника варіометричного методу.

Виміряні значення других похідних гравітаційного потенціалу є їх абсолютними значеннями в точці спостереження, яка приймається за початок координат. Розташування координатних осей приймається таким чином: вісь z – вертикально та вона співпадає з внутрішньою нормаллю до еквіпотенціальної поверхні, що проходить через точку спостереження, осі x і y – в площині, що є дотичною до цієї еквіпотенціальної поверхні. Вісь x спрямована на південь. Тоді,

$$W_z = \frac{\partial W}{\partial z} = g, W_{xz} = \frac{\partial g}{\partial x} = g_x, W_{yz} = \frac{\partial g}{\partial y} = g_y, W_{zz} = \frac{\partial g}{\partial z} = g_z \quad (1.64)$$

Кожна з других похідних характеризує швидкість зміни першої похідної потенціалу, тобто зміну напруженості, яка припадає на одиничну відстань в даному напрямку. Отже, другі похідні W_{xz}, W_{yz}, W_{zz} є градієнтами сили тяжіння по відповідним координатним осям. Похідні W_{xz} і W_{yz} називають горизонтальними градієнтами сили тяжіння (рис 1.8), W_{zz} – вертикальним градієнтом. Геометрична сума векторів W_{xz} і W_{yz} визначається вектором $\vec{G} = \frac{\partial g}{\partial s}$ і називається повним горизонтальним градієнтом сили тяжіння. Напрямок і величина цього вектору визначається з рівнянь:

$$\tan \alpha = \frac{W_{yz}}{W_{xz}} \quad (1.65)$$

$$G = \sqrt{W_{xz}^2 + W_{yz}^2} \quad (1.66)$$

Вектор $\vec{G}$ вказує напрямок найбільшої зміни сили тяжіння. Якщо спроектувати вектор $\vec{G}$ на будь-який напрямок з азимутом A , то отримаємо складову сили тяжіння (рис .1.5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial l} &= \frac{\partial g}{\partial s} \cos \cos (A - \alpha) = \\ &= \frac{\partial g}{\partial s} \cos \cos A \cos \cos \alpha + \frac{\partial g}{\partial s} \sin \sin A \sin \sin \alpha \\ &= \frac{\partial g}{\partial x} \cos \cos A + \frac{\partial g}{\partial x} \sin \sin A \end{aligned}$$

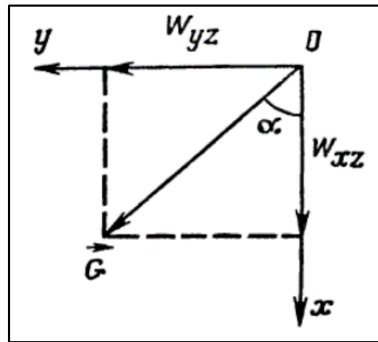


Рис. 1.7. Горизонтальні градієнти сили тяжіння та повний горизонтальний градієнт

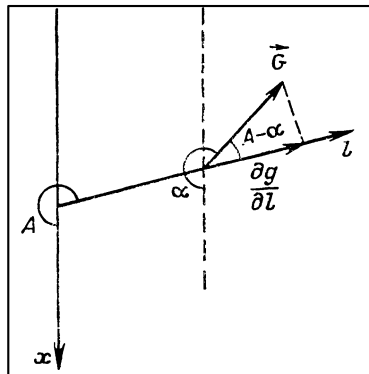


Рис. 1.8. Визначення градієнту сили тяжіння по профілю спостережень

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial l} &= \frac{\partial g}{\partial s} \cos \cos (A - \alpha) == \frac{\partial g}{\partial s} \cos \cos A \frac{\partial g}{\partial s} \sin \sin A \sin \sin \alpha = \\ \frac{\partial g}{\partial x} \cos \cos A + \frac{\partial g}{\partial x} \sin \sin A \end{aligned} \quad (1.67)$$

Інші значення похідних W_{xz} і W_{yz} можна отримати, якщо представити їх наступним чином:

$$\begin{aligned} W_{xz} &= \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} g_x, \\ W_{yz} &= \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} g_y. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Тобто ці похідні можна розглядати ще і як похідні по вертикалі складових сили тяжіння g_x і g_y .

1.12. КРИВИЗНИ ТА ЇХНЯ РОЛЬ В ГРАВИМЕТРІЇ

Для того, щоб зрозуміти фізичний зміст других похідних потенціалу по x і y вводиться поняття кривизни поверхні.

Якщо поверхня задана рівнянням $z = f(x, y)$, то її кривизна визначається за формулою:

$$\frac{1}{\rho_\varphi} = r \cos^2 \varphi + 2s \sin \sin \varphi \cos \cos \varphi + q \sin^2 \varphi, \quad (1.69)$$

де ρ_φ – радіус кривизни в азимуті перерізу φ , в якому визначається кривизна;

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \quad q = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \quad (1.70)$$

Поверхня, на якій розглядається потенціал і його похідні, задана рівнянням $W = C$. Це є рівнева поверхня потенціалу W .

Якщо знайти значення r, s, q для W та підставити їх у рівняння (1.69), то кривизну поверхні можна виразити через другі похідні потенціалу.

Нехай поверхня задана рівнянням $W(x, y, z) = C$.

Вважаючи $z = f(x, y)$ та отримуючи повні похідні від W по x і y та їхні другі похідні, отримаємо:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Звідки отримаємо:

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{g} W_{xx};$$

$$q = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{g} W_{yy};$$

$$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{g} W_{xy}.$$

Підставляючи значення r , q , s в рівняння (1.69), визначимо кривизну поверхні

$$\frac{1}{\rho_\varphi} = -\frac{1}{g} (W_{xx} \cos^2 \varphi + W_{xy} \sin 2\varphi + W_{yy} \sin^2 \varphi). \quad (1.71)$$

Розглянемо перерізи в меридіані та першому вертикалі:

В першому випадку $\varphi = 0$,

$$\frac{1}{\rho_M} = -\frac{1}{g} W_{xx}; \quad (1.72)$$

а в другому – $\varphi = \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{1}{\rho_N} = -\frac{1}{g} W_{yy}. \quad (1.73)$$

Віднявши почленно праві та ліві частини рівнянь (1.72) і (1.73), отримаємо:

$$W_{yy} - W_{xx} = W_\Delta = g \left(\frac{1}{\rho_M} - \frac{1}{\rho_N} \right), \quad (1.74)$$

де ρ_M і ρ_N – радіуси кривизни в перерізах меридіану та першого вертикалу.

Ці перерізи називаються головними нормальними перерізами поверхні. Таким чином, різниця других похідних потенціалу W_Δ визначає різницю кривизни двох головних нормальних перерізів, а саме, відхилення поверхні від сферичності, а змішана похідна W_{xy} – напрямок головних нормальних перерізів відносно довільно обраної системи осей xu .

Використовуючи формулу (1.71), знайдемо два взаємно перпендикулярних перерізи, що проходять під кутами φ_0 і $\varphi_0 + \frac{\pi}{2}$ до осі x . Різниця цих двох перерізів буде

$$\frac{1}{\rho_{\varphi_0}} - \frac{1}{\rho_{\varphi_0 + \frac{\pi}{2}}} = -\frac{1}{g} (W_\Delta \cos \cos 2\varphi - 2W_{xy} \sin \sin 2\varphi). \quad (1.75)$$

Головні нормальні перерізи, для яких кривизна $\frac{1}{\rho_\varphi}$ є максимальною або мінімальною величиною, можна знайти з розв'язку наступного рівняння:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{\rho_{\varphi}} = -\frac{1}{g} (W_{\Delta} 2 - 4W_{xy} \cos \cos 2\varphi) = 0. \quad (1.76)$$

Звідки отримаємо

$$\tan \tan 2\varphi_0 = 2 \frac{W_{xy}}{W_{\Delta}} \quad (1.77)$$

У випадку, коли екстремум функції W_{Δ} дорівнює нулю в точці спостереження, то виконується рівність:

$$\frac{1}{\rho_{min}} - \frac{1}{\rho_{max}} = 0. \quad (1.78)$$

Тобто екіпотенціальна поверхня, яка проходить через точку спостереження, має сферичну форму.

При великих значеннях W_{Δ} ($\varphi_0 \approx 0$) різниця кривизн стає суттєвою, що може бути обумовлено лише відповідним розподілом мас різної густини під точкою спостереження.

З рівняння (1.78) можна отримати наступні співвідношення:

$$R \cos \cos 2\varphi_0 = W_{\Delta}, \quad R \sin \sin 2\varphi_0 = -2 W_{xy},$$

$$R = \sqrt{W_{xy}^2 + W_{\Delta}^2} \quad (1.79)$$

Розглянуті співвідношення між похідними гравітаційного потенціалу не є одиничними, існують і інші співвідношення. Важливим є той факт, що будь-який елемент гравітаційного поля g або будь-яка похідна гравітаційного потенціалу може бути обчислена, якщо відомий розподіл якого-небудь іншого елемента поля на нескінченній площині.

1.13. НОРМАЛЬНІ ЗНАЧЕННЯ ДРУГИХ ПОХІДНИХ ПОТЕНЦІАЛУ СИЛИ ТЯЖІННЯ

Другі похідні нормального потенціалу сили тяжіння визначають градієнти нормальної сили тяжіння та кривизну рівневих поверхонь та силових ліній нормального поля. Градієнти кривизни U_{Δ} і U_{xy} на поверхні Нормальної Землі можна визначити, якщо використати головні радіуси кривизни еліпсоїда M і N :

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{\frac{3}{2}}},$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}$$

Тоді

$$U_{\Delta} = \gamma \left(\frac{1}{M} - \frac{1}{N} \right),$$

а $U_{xy}=0$ через те, що нормальна сила тяжіння від довготи не залежить. Утримуючи члени порядку e^2 , одержимо

$$U_{\Delta} = \frac{\gamma - e^2(1 + \cos 2B)}{2N}. \quad (1.80)$$

Вертикальний градієнт U_{zz} нормальної сили тяжіння визначають через кривизни головних нормальних перерізів

$$U_{zz} = \gamma \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N} \right) + 2\omega^2. \quad (1.81)$$

З точністю до членів порядку e^2

$$U_{zz} = \frac{\gamma}{a} (2 + e^2 - 2e^2 \sin^2 B) + 2\omega^2.$$

Вертикальний градієнт нормальної сили тяжіння дуже мало залежить від широти. Якщо представити Землю однорідною кулею і нехтувати її добовим обертанням, то

$$U_{zz} = \frac{\partial \gamma}{\partial z} = \frac{2GM}{R^3} = \frac{2\gamma}{R}. \quad (1.82)$$

На поверхні Землі при $R = 6371$ км

$$U_{zz} = 0.3086 \text{ мГал/м} \quad (1.83)$$

Горизонтальний градієнт нормальної сили тяжіння в меридіональному напрямі

$$U_x = \frac{\partial \gamma}{\partial z} = \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma}{\partial B}, \quad (1.84)$$

де $dx = R dB$ – елемент дуги меридіана. Тоді похідна

$$U_{xz} = \frac{\gamma e \beta}{R} \sin 2B \quad (1.85)$$

визначається на підставі виразу $\frac{\partial \gamma}{\partial B} = \gamma_e \beta \sin 2B$

Горизонтальний градієнт $U_{yz} = 0$ через те, що нормальна сила тяжіння не залежить від довготи. Підставляючи в вирази (1.44, 1.46, 1.49) чисельні значення сталих, одержимо

$$\begin{aligned} U_{\Delta} &= 5,12(1 + \cos \cos 2B), \\ U_{xz} &= -8,11 \sin \sin 2B, \\ U_{zz} &= 0.3086(1 - 0,00142 \sin^2 B), \end{aligned} \quad (1.86)$$

$$U_{xy} = 0,$$

$$U_{yz} = 0.$$

де коефіцієнти виражені в етвешах.

1.14. АНОМАЛІЇ СИЛИ ТЯЖІННЯ

Аномалія сили тяжіння різниця між вимірним (спостереженим) значенням сили тяжіння $g_{\text{сп}}$, яке віднесене до деякої поверхні порівняння, та його нормальним або теоретичним, що обчислюється за відомими формулами нормального значення сили тяжіння, тобто:

$$\Delta g = g_{\text{сп}} - \gamma_0. \quad (1.87)$$

Вимірне значення сили тяжіння отримують за результатами абсолютних або відносних спостережень при проведенні різноманітних гравітаційних зйомок. Якщо вимірне та нормальне значення сили тяжіння віднесені до однієї точки, то таку обчислену аномалію сили тяжіння називають “чистою”. У випадку, коли ці значення сили тяжіння відносять до різних точок простору, то тоді отримують “змішану” аномалію сили тяжіння.

При обчисленнях аномалій сили тяжіння вводять різні поправки (редукції) у вимірне або нормальне значення сили тяжіння. В залежності від того, які поправки (редукції) вводять, розрізняють різні види аномалій. Вони представляються у вигляді гравіметричних карт або картах ізоаномал. Згідно з внесеними поправками розрізняють аномальні гравіметричні карти:

1. у вільному повітрі;
2. в повній і неповній топографічних редукціях;
3. редукції Буге;
4. редукції Гленна та інших.

Згідно з існуючими Міжнародними стандартами гравіметричні спостереження виконують на суші, на поверхні та дні моря, у свердловинах і шахтах, а також у повітрі та космічному просторі. Очевидно, для таких пунктів спостереження необхідно обчислити аномалії сили тяжіння, але перш за все потрібно їх знати на фізичній поверхні Землі.

Розглянемо основні аномалії, які використовуються при

інтерпретації даних гравіметричних вимірювань для вивчення локальних геологічних об'єктів.

1. Аномалія у вільному повітрі. При цьому відбувається приведення нормального значення до точки спостереження та утворюється різниця між спостереженим і приведеним нормальним значеннями:

для наземних спостережень:

$$\Delta g_{\text{в.п.}} = g_{\text{сп.}} - \gamma_0 + \frac{2\gamma}{R} H = g_{\text{сп.}} - \gamma_0 + 0,3086H; \quad (1.88)$$

для спостережень на рівні моря ($H = 0$)

$$\Delta g_{\text{в.п.}} = g_{\text{сп.}} - \gamma_0.$$

При геофізичній інтерпретації гравіметричних вимірювань певний інтерес викликає притягання локальних геологічних об'єктів. Через те із спостережених значень сили тяжіння знімають вплив притягання видимих топографічних мас, розміщених між рівнем моря та фізичною поверхнею Землі. Якщо вплив топографічних мас прийняти рівним притяганням плоскої пластини нескінченного простягання та виправити цією ж поправкою спостережене значення сили тяжіння, то тоді обчислену аномалію називають аномалією Буге. Ці топографічні маси, які подані у вигляді плоскої пластини, називають проміжним шаром. Тоді аномалію Буге представляють у виді:

$$\Delta g_{\text{Б}} = \Delta g_{\text{в.п.}} - 2\pi G \delta H^y$$

або

$$\Delta g_{\text{Б}} = g - \gamma_0 + \delta g_p + 0,3086H^y - 2\pi G \delta H^y, \quad (1.89)$$

де: δg_p – поправка за рельєф,

δ – густина проміжного шару.

За формулою (1.89) обчислюють аномалії Буге для пунктів, які розташовані на суші. Сума поправок

$$\delta g_{\text{Б}} = -2\pi G \delta H^y + 0,3086H^y$$

називається поправкою (редукцією) Буге. Якщо спостереження виконані в морських умовах, тоді для обчислення аномалії Буге у виміряне значення сили тяжіння вводять поправку, яка враховує дефект мас, що притягують, внаслідок того, що густина земної кори відрізняється від густини морської води. Ця поправка додається, і її обчислюють за формулою:

$$2\pi G(\delta - \delta_{\text{в}})h, \quad (1.90)$$

де: δ – густина земної кори,

$\delta_{\text{в}}$ – густина морської води,

h – глибина моря.

Аномалію Буге на морі одержують, якщо до аномалії у вільному повітрі додати цю поправку

$$\Delta g_{\text{Б}} = \Delta g_{\text{в.п.}} + 2\pi G(\delta - \delta_{\text{в}})h. \quad (1.91)$$

При обчисленні аномалій Буге для пункту, розміщеного в свердловині (шахті), враховують притягання шару товщиною h , розміщеного вище точки спостереження A_4 , а потім виключають притягання проміжного шару товщиною $H^{\gamma} - h$. Формула для обчислень має вигляд:

$$\Delta g_{\text{Б}} = \Delta g_{\text{в.п.}} + 2\pi G\delta h - 2\pi G\delta(H^{\gamma} - h), \quad (1.92)$$

або

$$\Delta g_{\text{Б}} = \Delta g_{\text{в.п.}} + 4\pi G\delta h - 2\pi G\delta H^{\gamma}. \quad (1.93)$$

При спостереженнях на борту літака висота точки спостереження A_5 над поверхнею нормальної Землі (при $\xi = 0$) буде

$$H^{\gamma} + h$$

де: h – висота літака над поверхнею Землі.

Отже, аномалію Буге обчислюють за формулою

$$\Delta g_{\text{Б}} = \Delta g_{\text{в.п.}} - 2\pi G\delta H^{\gamma}. \quad (1.94)$$

1.15. ЗВ'ЯЗОК МІЖ ПОХІДНИМИ ГРАВІТАЦІЙНОГО ТА МАГНІТНОГО ПОТЕНЦІАЛІВ

Цей зв'язок виражається теоремою Пуассона та представляється наступним чином:

$$U = \frac{\vec{j}}{G\sigma} \cdot \frac{\partial V}{\partial \vec{i}} \quad (1.95)$$

де U – магнітний потенціал тіла;

V – потенціал його притягання;

$\vec{j}$ – намагніченість для всього об'єму тіла;

$\vec{i}$ – напрямок намагніченості.

Тоді складова напруженості магнітного поля за яким-небудь напрямком s має вигляд:

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\vec{j}}{G\sigma} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial s \partial \vec{i}} = \frac{\vec{j}}{G\sigma} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial i} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial i} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial i} \right] \quad (1.96)$$

Введено компоненти намагніченості $\vec{j}$ по координатним осям:

$$\begin{aligned} A &= \vec{j} \frac{\partial x}{\partial i} = \vec{j} \cos(i; x) \\ B &= \vec{j} \frac{\partial y}{\partial i} = \vec{j} \cos(i; y) \\ C &= \vec{j} \frac{\partial z}{\partial i} = \vec{j} \cos(i; z), \end{aligned} \quad (1.97)$$

і приймаючи s таким, що послідовно співставляється з напрямком координатних осей, отримаємо наступні вирази складових:

$$\begin{cases} X = \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{G\sigma} [AV_{xx} + BV_{xy} + CV_{xz}], \\ Y = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{G\sigma} [AV_{yx} + BV_{yy} + CV_{yz}], \\ Z = \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{G\sigma} [AV_{zx} + BV_{zy} + CV_{zz}], \end{cases} \quad (1.98)$$

де $V_{xx} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ і т.і. – скорочені позначення других похідних потенціалу притягання, аномальні значення яких, як вже було відзначено в підрозділі про аномальні і нормальні значення других похідних гравітаційного потенціалу, тотожні зі значеннями відповідних похідних гравітаційного потенціалу W . Тому в подальшому в наведених формулах змінюємо V на W .

При інтерпретації гравітаційних і магнітних аномалій досить часто розглядається випадок двовимірної задачі, коли маси, що створюють аномалії, мають форму циліндрів, які нескінченно витягнуті паралельно осі y . В такому випадку гравітаційна аномалія не змінюється вздовж осі y , а саме $W_{yx}=W_{yy}=W_{yz}=0$ і тоді з системи рівнянь (1.98) отримаємо:

$$\begin{cases} X = H = \frac{1}{\gamma\sigma} [AV_{xx} + CV_{xz}], \\ Z = \frac{1}{\gamma\sigma} [AV_{zx} + CV_{zz}] \end{cases} \quad (1.99)$$

складова Y відповідно дорівнює нулеві.

У цьому випадку рівняння Лапласа набуває вигляду:

$$W_{xx} + W_{zz} = 0, \quad (1.100)$$

а рівняння кривизни W :

$$W_{\Delta} = W_{yy} - W_{xx} = -W_{xx} = W_{zz}. \quad (1.101)$$

Враховуючи рівняння (1.100) і (1.101), систему рівнянь (1.98) можна представити наступним чином:

$$\begin{cases} X = H = \frac{1}{G\sigma} [-AW_{\Delta} + CW_{xz}], \\ Z = \frac{1}{G\sigma} [AW_{zx} + CW_{\Delta}]. \end{cases} \quad (1.102)$$

У випадку вертикальної намагніченості тіла, тобто $A = 0, C = j$, маємо:

$$\begin{cases} H = \frac{j}{\gamma\sigma} W_{xz}, \\ Z = \frac{j}{\gamma\sigma} W_{\Delta}. \end{cases} \quad (1.103)$$

Знаючи, що $W_{zz} = -(W_{xx} + W_{yy})$ і враховуючи рівняння (1.100) і (1.101) останню формулу з системи (1.103) можна представити у вигляді:

$$Z = \frac{j}{\gamma\sigma} W_{zz}. \quad (1.104)$$

Якщо $\vec{j} = \text{const}$ і $\vec{i} = \text{const}$, тобто для однорідно намагніченого тіла постійної густини, складові напруженості магнітного поля H і Z є відповідно пропорційними до величини других похідних гравітаційного потенціалу W_{xz} і W . Крім того, складова Z цьому випадку також вважається пропорційною до вертикального градієнта сили тяжіння W_{zz} .

Особливістю магнітного потенціалу, яка відрізняє його від гравітаційного, є те, що для тіла кінцевих розмірів цей потенціал безмасовий, тобто повна магнітна маса тіла завжди дорівнює нулеві: додатна магнітна маса $+m$ в одному полюсі компенсується від'ємною магнітною масою $-m$ в другому полюсі намагніченого тіла. Тому формальна аналогія в виразах складових напруженості магнітного і гравітаційного полів є лише в тих випадках, коли припускається, що один кінець (полюс) намагніченого тіла віднесений на нескінченність, а тіло, що збудує гравітаційну аномалію, має, навпаки, кінцеві розміри. Для прикладу, магнітна дія нескінченного довгого намагніченого стрижня, один кінець якого (полюс) знаходиться на нескінченно великій глибині, можна формально ототожнити з гравітаційним ефектом точкової маси, що співпадає просторово з верхнім полюсом намагніченого стрижня.

Проведемо порівняння аналітичних виразів гравітаційного потенціалу і його похідних для точкових мас з відповідними характеристиками магнітного поля для диполя:

Характеристика поля	Гравітаційне поле	Магнітне поле
Потенціал	$V = -G\sigma \frac{1}{r} v$	$U = -\frac{1}{4\pi} j \frac{Z}{r^3}$
Напруженість (перша похідна)	$V_z = g = G\sigma \frac{Z}{r^3} v$	$U_x = H = \frac{1}{4\pi} j \frac{3xZ}{r^5}$
Друга похідна потенціалу	$V_{xz} = -\gamma G \frac{3xZ}{r^5} v$	

В наведених співвідношеннях: G - гравітаційна стала, σv - маса тіла, $jv = p_m$ - його магнітний момент.

Якщо формули співставити між собою то легко помітити, що характеристики гравітаційного і магнітного полів описуються аналогічними (за винятком коефіцієнтів) математичними виразами. Проте, як видно з співвідношень значення магнітного потенціалу і його похідних, вони в більшій мірі залежать від відстані до джерела, ніж відповідні характеристики гравітаційного поля. Так, магнітний потенціал має подібний аналітичний вираз з напруженістю гравітаційного поля, тобто з першою похідною гравітаційного потенціалу. Перша похідна магнітного потенціалу H математично аналогічна градієнту сили тяжіння V_{xz} - другий похідний гравітаційного потенціалу.

Практична цінність виведених залежностей полягає у тому, що представляється можливим використовувати при розрахунках гравітаційних характеристик ті формули, які виведені для обрахунків магнітних аномалій і навпаки.

2. РЕДУКЦІ СИЛИ ТЯЖІННЯ

2.1. НЕОБХІДНІСТЬ ТА СЕНС ВВЕДЕННЯ РЕДУКЦІЙ

Вимірювання сили тяжіння проводять у різних умовах: на поверхні Землі, на морі, у горах, в шахтах, свердловинах і т. інш. [98]. Спостережені значення сили тяжіння залежать, в першу чергу, від положення точки на земній поверхні – координат і висоти, в другу чергу, від денного рельєфу. На величину вимірюваного поля впливають:

- зміна густини в надрах,
- географічне положення,
- висота пункту спостереження,
- рельєф навколишнього місцевості.

Якщо значення g та γ задані на одній поверхні, їх різниця $\Delta g = g - \gamma$ називається чистою аномалією. Так як вимірювання проводяться на фізичній поверхні Землі, яка лише в океані близька до геоїду, а γ обчислюється на поверхні відносності то, необхідно привести обидві величини до однієї поверхні.

Для порівняння гравіметричних даних їх необхідно привести до однакових умов. Таку процедуру називають редукуванням. Практично немає різниці проводити редукування спостереженого значення сили тяжіння на еліпсоїд і на ньому порівнювати його з нормальним значенням і отримувати аномалію або, навпаки, нормальне значення приводити до фізичної поверхні Землі та на ній створювати аномалію. В обох випадках необхідно знання геодезичних висот, тобто відстаней точок фізичної поверхні Землі від еліпсоїду, для якого визначено нормальне поле та закон зміни в одному випадку дійсного значення сили тяжіння на шляху між точками поверхонь, в іншому – нормального.

В геодезичній гравіметрії, де вивчається форма Землі при фактично існуючому розподілі мас, в основному застосовується редукція за висоту, яка є єдино необхідною. Всі інші відомі в гравіметрії поправки приводять до порушення основних умов теорії фігури Землі, наприклад к порушенню загальної маси Землі або появі додаткових мас над геоїдом.

В гравірозвідці, яка спрямована на вирішення задач геологічного тлумачення аномалій, такі порушення не настільки суттєві, а в деяких випадках навіть не відчутні. Основною метою при вирішенні таких задач є виділення гравітаційного ефекту густинних неоднорідностей гірських порід, відокремлюючи аномалії від прояву всіх інших факторів, що безпосередньо не пов'язані з геологічною будовою ділянки. Для цього необхідно вилучити всі другорядні ефекти, наприклад, вплив мас, що створюють рельєф місцевості (топографічна редукція), вплив геологічних мас між точкою спостереження та поверхнею відносності в передбаченні однорідності цих мас в даній області (поправка за проміжний шар або Буге та ін.).

Топографічна поправка або поправка за рельєф вводиться майже в усіх випадках, за винятком рівнинних ділянок, де її величини незначні. Хоча точність сучасних автоматизованих гравіметрів дозволяє за результатами зйомок використовувати і такі величини.

При геологічній інтерпретації гравіметричних даних найбільше застосовується редукція Буге, що складається з редукції у вільному повітрі та поправки за проміжний шар. За наявності на ділянці робіт яскраво виражених форм рельєфу місцевості до поправки за проміжний шар повинна бути додана поправка за рельєф областей, що близько примикають до неї. Останню редукцію часто називають неповною топографічною редукцією на відміну від повної топографічної редукції, коли враховується вплив мас, що складають рельєф місцевості по всій Землі.

Рідше використовується редукція Прєя, проте вона необхідна при морських підводних спостереженнях, коли необхідно розрахувати силу тяжіння на поверхні моря з урахуванням мас, під якими проводилося спостереження. Суть редукції полягає у введенні поправки, що переносить притягання шару, який розташований над точкою, в притягання шару, розташованого над нею. Ця поправка дорівнює подвоєному притягання проміжного шару.

Існує також велика кількість інших редукцій або поправок спостережених значень сили тяжіння, що направлені на послаблення або зняття гравітаційного ефекту, який викликаний відомою або передбачуваною неоднорідністю земної кори. По суті ці редукції представляють одну з форм кількісної геологічної інтерпретації

гравіметричних спостережень, яка застосовується для врахування впливу відомих факторів, що створюють аномальне гравітаційне поле.

2.2. РЕДУКЦІЯ У ВІЛЬНОМУ ПОВІТРІ

Редукція у вільному повітрі, або редукція Фая, полягає в приведенні нормального значення сили тяжіння при утворенні аномалії до точки приведення. Якщо відомі висоти над рівнем моря та висоти геоїда, то таке редукування до точки спостереження може бути виконано точно. В більшості випадків, коли або висоти геоїду невідомі, або не приймаються до розрахунків, редукування проводиться від точки до точки на певну висоту H .

Розглянемо Землю в виді кулі (рис. 2.1) та припустимо, що сила тяжіння, яка відома в точці B на поверхні кулі, має бути перенесена, редукована на висоту H над поверхнею кулі в точку A .

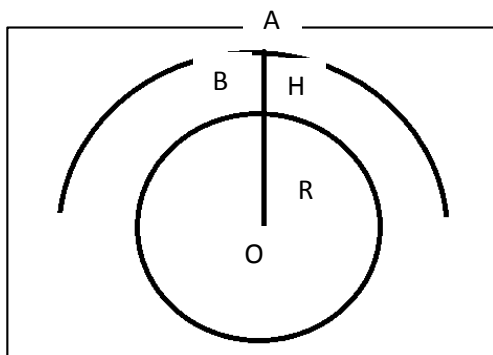


Рис. 2.1. Пояснення до виводу формули редукції в вільному повітрі за [98]

Притягання кулі на точку B , що розташована на її поверхні, буде

$$\gamma_0 = -G \frac{M}{R^2}.$$

Притягання на точку A , що розташована на висоті H над поверхнею кулі, відповідно дорівнює

$$\gamma = -G \frac{M}{(R+H)^2}.$$

Відповідно маємо зміну сили тяжіння при переході від точки B до точки A

$$\begin{aligned}\delta g &= \gamma - \gamma_0 = -G \frac{M}{R^2} + G \frac{M}{(R+H)^2} = -GM \left[\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+H)^2} \right] = \\ &= -\frac{GM}{R^2} \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{H}{R}\right)^2} \right].\end{aligned}$$

Знаменник дробу розгорнемо по формулі бінома Ньютона та, нехтуючи членами, що містять $\left(\frac{H}{R}\right)^2$, отримаємо

$$\delta g = -2 \frac{\gamma}{R} H.$$

Якщо підставити середні значення для всієї Землі $\gamma_{\text{сер.}} = 9,7977 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ і $R = 6371 \text{ км}$, отримаємо

$$\delta g = -2 \frac{\gamma}{R} H = -0,3086H. \quad (2.1)$$

Чисельне значення нормального градієнта g становить 3086 Е. Поправка за зміну нормальної сили тяжіння з висотою (поправка Фая) має вигляд:

$$\delta g_{\text{ф}} = -0,3086H \quad (2.2)$$

де H підставляють в метрах; величину поправки отримують у мГал. Поправка враховує зміну g в залежності від відстані до центру Землі, але не враховує маси які розташовані вище рівня моря, тому її називають поправкою у вільному повітрі.

Величину

$$\Delta g = g_{\text{спос.}} - \gamma_0 + 0,3086H \quad (2.3)$$

називають аномалією сили тяжіння в редукції Фая або редукцією у вільному повітрі. Редукцію Фая використовують при вивченні фігури Землі, тому що в цьому випадку зберігається повна маса Землі.

Таким чином, аномалії сили тяжіння з редукцією у вільному повітрі (Фая) відображають, з одного боку, неоднорідність за густиною гірських порід під точками спостережень, з іншого – вплив зовнішніх мас, обумовлений різницею висот точок спостереження над рівнем моря. В числовому відношенні значення другого фактору прямо пропорційне висоті точки спостереження над рівнем моря та може досягати десятків мілігал, тобто в ряді випадків значно

перевишувати гравітаційний ефект, викликаний неоднорідністю густини всередині земної кори. Тому, на ділянках, де відзначені великі зміни, наприклад в декілька сотень метрів, аномалії пов'язані зі значною різницею висот точок спостережень, сильно спотворюють або повністю перекривають гравітаційний вплив неоднорідностей густини земної кори.

2.3. ПОПРАВКА ЗА ДЕННИЙ РЕЛЬЄФ МІСЦЕВОСТІ

Ця поправка дає можливість врахувати вплив притягання всіх форм зовнішнього рельєфу та привести значення сили тяжіння в даній точці спостереження до такого, яке б було, якби над точкою розташовувався рівний шар без виступів та западин.

Поправка за денний рельєф завжди зменшує спостережене значення сили тяжіння незалежно від того, чи є поблизу точки спостереження височина або западина. Розглянемо рис. 2.2.

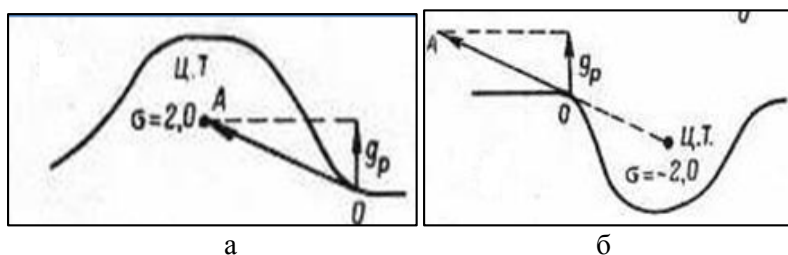


Рис. 2.2. Схеми дії додатних (а) і від'ємних (б) форм рельєфу за [98]

Наявність надлишкових мас (рис. 2.2.а), що розташовані вище точки спостереження, викликає додаткову силу, направлену до цих мас. Вертикальна складова цієї сили зменшить значення g . Дефіцит мас (рис. 2.2.б) також зменшить величину g відносно того її значення, яке б мала мати ця величина у випадку рівномірного заповнення масами всієї області, що розташована нижче точки спостережень.

Наявність нерівної місцевості навколо точки спостереження, коли вплив цих неоднорідностей стає відчутним, вимагає введення

поправки за рельєф. Введення у виміряне значення сили тяжіння поправки за денний рельєф обов'язкове при застосуванні будь-яких редукцій. В протилежному випадку (коли ці поправки відчутні) нехтування ними приводить до спотворення аномального гравітаційного поля, яке створюється невидимими підземними масами, за рахунок зовнішніх, видимих сил.

Слід відзначити, що вплив рельєфу місцевості спадає пропорційно квадрату відстані. Тому навіть вплив не дуже віддалених незначних неоднорідностей денного рельєфу виявляється мало відчутним.

Для врахування впливу оточуючого рельєфу застосовують різноманітні способи розрахунків відповідної редукції. З цією метою фізичну поверхню Землі апроксимують набором тіл правильної геометричної форми: призм, пірамід, паралелепіпедів та ін. Для кожного елементарного тіла обчислюється притягання в пункті спостереження. Величину поправки знаходять підсумовуванням ефектів від окремих тіл. Облік рельєфу в центральній зоні радіусом 200 м здійснюється вручну. Розрахунок поправки для області віддаленої більш, ніж на 200 м від пункту автоматизований, поправка знаходиться за допомогою цифрових моделей великомасштабних карт.

Обчислення поправок $\delta g_{\text{рф}}$ зводиться до інтегрування по об'єму V , який обмежений поверхнею рельєфу $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$ та деякою «нормальною» поверхнею (площиною, сферою, еліпсоїдом), що проходить через гравіметричний пункт. У випадку, коли «нормальна» поверхня є горизонтальною площиною $z = \text{const}$, вираз для обчислення величини поправки за вплив рельєфу, обчислюється

$$\delta g_{\text{рф}}(x, y, z) = G\sigma \iiint_V \frac{(\zeta - z)d\xi d\eta d\zeta}{R^3}, \quad (2.4)$$

де x, y, z – прямокутні координати пункту спостережень, G – гравітаційна стала, σ – густина гірських порід проміжного шару, ξ, η, ζ – координати елемента маси, який враховується, $R = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$, – відстань між елементом маси та гравіметричним пунктом, V – повний об'єм топографічних мас. В циліндричній системі координат з центром в пункті спостереження величина $\delta g_{\text{рф}}$ визначається виразом

$$\delta g_{\text{рф}} = G\sigma \iiint_V \frac{\rho \xi}{(\rho^2 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}} d\rho d\varphi d\xi, \quad (2.5)$$

де ρ, φ, ξ – циліндричні координати елемента маси об'єму V , що розташований на сферичній поверхні Землі.

Таким чином, величина поправки визначається шляхом розв'язку прямої задачі гравіметрії від різних форм рельєфу, що є відхиленнями від плоского або сферичного шару. Як відомо, пряма задача гравіметрії при відомих геометричних параметрах об'єкту, що збурює, та відомій густині має єдиний розв'язок. Рельєф апроксимується набором елементарних тіл, вплив яких обчислюється аналітично, а потім підсумовується.

Специфіка розв'язку прямої задачі гравірозвідки полягає в тому, що вимагає для високоточного обчислення поправки $\delta g_{\text{рф}}$ завдання вельми густої сітки висотних позначок поблизу розрахункової точки та допускає розрідження цієї сітки по мірі віддалення від неї. В зв'язку з цим, область рельєфу, вплив якого розраховується, підрозділяється на декілька зон, що не перетинаються, для яких з різною детальністю проводиться опис рельєфу місцевості. Звичайно, ці зони називаються «центральна», «ближня», «середня» та «дальня». Вибір розмірів зазначених зон відбувається у відповідності з методикою обчислень, яка використовується, характером рельєфу місцевості, необхідною точністю обчислень і т.інш.

Заслуговує уваги підхід до обчислення поправок за вплив рельєфу, який прийнятий в північноамериканському стандарті редукування (New standards..., 2005). В ньому пропонується трирівнева процедура обчислення $\delta g_{\text{рф}}$; перша частина поправки, яка є відповідальністю виконавця робіт, використовує топографічну інформацію, що отримана інструментально в польових умовах в радіусі 100 м від пункту; друга – використовує локальні дані про висоти з високою точністю (крупномасштабні топографічні карти) до відстані 895 м від пункту спостереження; остання частина використовує цифрові дані рельєфу для зони від 895 м до 166,7 км, які спираються на 15'', 1', або 3' сітки, та враховують кривизну Землі при відстані більше 14 км від гравіметричного пункту. Для перших двох зон (рівнів) рельєф апроксимується сегментованими кільцями

(аналог палеткових методів), для третьої – вертикальними призмами.

На сьогодні активно за кордоном та частково в Україні обмірковуються головним чином питання підготовки цифрових моделей рельєфу (ЦМР), різні способи прискорення обчислювального процесу, враховуючи великі розміри сучасних ЦМР, а також обчислення поправок за вплив рельєфу на сферичній Землі.

2.4. РЕДУКЦІЯ БУГЕ

З усіх видів редукцій, які використовуються при геологічній інтерпретації даних гравіметричних досліджень, найбільш широке застосування має редукція Буге. Вона представляє собою суму редукції за вільне повітря та поправки за притягання проміжного шару.

При цьому послідовність операцій при обчисленні редукції Буге виглядає наступною:

1. Нормальне значення γ , яке отримане шляхом розрахунків для точки з координатами, що відповідають точці спостережень, редукується до точки спостережень шляхом введення редукції у вільному повітрі, що дорівнює $0,3086H$.

2. Якщо рельєф місцевості, що оточує точку спостережень, досить нерівний, вводиться поправка за вплив рельєфу за аналітичними формулами, або розрахований за допомогою спеціалізованих програмних засобів.

3. З отриманої аномалії віднімається притягання плоского шару з відомою середньою густиною, що розташований між рівнем точки спостережень та геоїдом. Розглянемо формулу для притягання плоского шару

$$\Delta g = 2\pi G\sigma[\sqrt{z^2 + R^2} - z_2 + z_1], \quad (2.6)$$

де z_1 і z_2 – відстані від точки спостережень до нижньої та верхньої граней плоского шару; σ – густина проміжного шару.

Перетворимо формулу (2.6), а саме: покладемо $z_1 = 0$ і $z_2 = H$, винесемо за знак радикала R та розкладемо корінь квадратний в ряд за допомогою бінома Ньютона (H – висота шару над рівнем моря):

$$\delta g = 2\pi G\sigma \left[R \left(1 + \frac{H^2}{R^2} \right)^{\frac{1}{2}} - H - R \right],$$

або

$$\delta g = 2\pi G\sigma \left[R \left(1 + \frac{1}{2} \frac{H^2}{R^2} + \dots \right) - H - R \right].$$

Нехтуючи членами $\frac{H}{R}$ в степені вище квадратної, знаходимо

$$\delta g = 2\pi G\sigma \left[\frac{1}{2} \frac{H^2}{R^2} - H \right] = -2\pi G\sigma H \left[1 - \frac{H}{2R} \right]. \quad (2.7)$$

Підставляючи значення $\pi = 3,14$, $G = 6,67 \cdot 10^{-8}$, отримаємо

$$\delta g_B = 2 \cdot 3,14 \cdot 6,67 \cdot 10^{-8} \sigma H \left[1 - \frac{H}{2R} \right] = 41,8 \cdot 10^{-8} \sigma H \left[1 - \frac{H}{2R} \right].$$

Переводячи цей вираз в мілігали, отримаємо

$$\delta g_B = 0,0419 \sigma H \left[1 - \frac{H}{2R} \right], \quad (2.8)$$

або наближено, коли значення $\frac{H}{2R}$ мале

$$\delta g_B = 0,0419 \sigma H. \quad (2.9)$$

Тоді аномалія сили тяжіння в редукції Буге набере вигляду

$$\Delta g_B = g_{\text{сп.}} - \gamma_0 + 0,3086H - 0,0419\sigma H. \quad (2.10)$$

Поправка Буге дозволяє виключити вплив зовнішніх по відношенню до геоїду мас. Тому залежність аномалій Буге від висоти значно слабкіша, ніж для аномалій у вільному повітрі. Аномалії Буге в гірських місцевостях змінюються значно більш гладко, ніж аномалії у вільному повітрі.

Аномалії Буге застосовують в розвідувальній геофізиці при пошуках родовищ корисних копалин, тому що при такому редукуванні підкреслюється гравітаційний ефект густинних неоднорідностей в земних надрах. Редукування сили тяжіння в розвідувальній гравіметрії виконується для полегшення геологічного тлумачення спостережених значень g .

Редукцію Буге з поправкою за рельєф всієї Землі в цілому прийнято називати топографічною редукцією. Значення поправок Буге та неповної топографічної редукції близькі між собою, за виключенням гірських районів, де вони значно відрізняються. Введення повної топографічної редукції, що враховує вплив топографічних мас всієї Землі, практично для досить великих регіонів приводить лише до зміни аномалій на постійну величину, і

цілком істотно з точки зору геологічної інтерпретації значення не має.

При застосуванні редукції Буге величезне значення має вибір густини проміжного шару σ . У випадку, коли густина буде заниженою, числові значення аномалії Буге будуть наближатися до аномалій Фая, та може з'явитися пряма кореляція з рельєфом. У випадку завищених значень густини, навпаки, з'являються хибні аномалії, що можуть корелювати з рельєфом, проте з протилежним знаком. В такому випадку підвищенням будуть відповідати від'ємні аномалії.

Як правило за «Інструкцією з гравірозвідки» аномалії обчислюють при двох значеннях густини 2,3 та 2,67 г/см³. Хоча цілком доречним виглядає введення редукції Буге з реальною густиною проміжного шару, яку доволі просто отримати за допомогою сучасних програмних засобів.

Якщо густини гірських порід сильно змінюються на території робіт, то при розрахунках редукції Буге вводять для різних ділянок різну густину.

2.5. РЕДУКЦІЯ ПРЕЯ

Ця редукція полягає в тому, що спостережене значення сили тяжіння в точці А на фізичній поверхні Землі (рис. 2.3) редукується на геоїд без будь-якого зміщення мас, тобто редукція ніби переносить точку спостережень вглиб Землі, на глибину, що дорівнює висоті точки спостереження.

Ця редукція складається з наступних операцій:

1. Згладжування форм рельєфу шляхом введення топографічної поправки (рис. 2.3, б).
2. Зняття впливу проміжного шару введенням поправки Буге.
3. Перенос точки на рівень геоїда редукцією у вільному повітрі за відсутності проміжних мас (рис. 2.3, в).
4. Встановлення мас, знятих при врахуванні впливу проміжного шару введенням поправки Буге (пункт 2) (рис. 2.3, г).

Формула для введення поправки Прея є результатом віднімання з редукції у вільному повітрі подвійної поправки за вплив проміжного шару:

$$\Delta g_{\Pi} = 2 \frac{\gamma}{R} H - 4\pi G \sigma H \left(1 + \frac{H}{2R}\right). \quad (2.11)$$

В числовому вигляді

$$\Delta g_{\Pi} = 0,3086H - 0,0836\sigma H. \quad (2.12)$$

Редукція Прея показує зміну сили тяжіння при зануренні в глибину Землі та враховує притягання мас, що опинилися при зануренні вище точки спостереження та зменшують значення сили тяжіння.

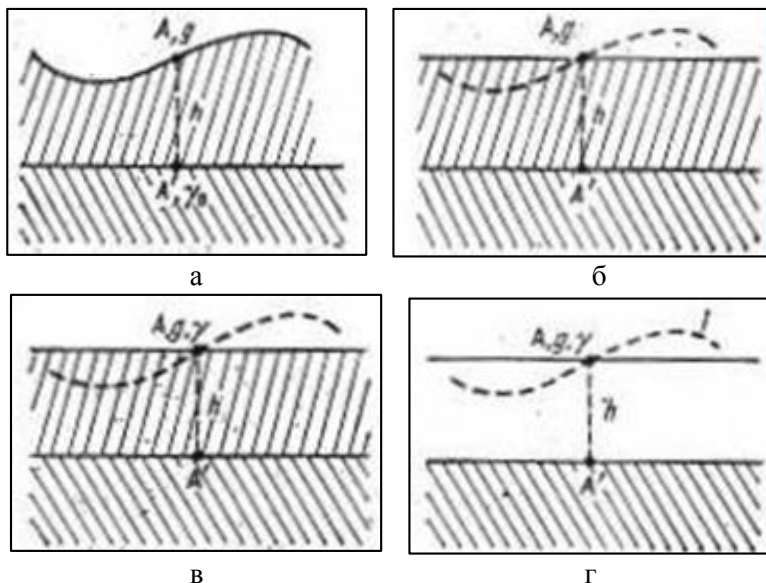


Рис. 2.3. Фізичний сенс редукцій при редукуванні на фізичну поверхню Землі за [98]: а) вихідне положення, б) згладжування форм рельєфу після введення поправки за рельєф місцевості, в) перенесення g на висоту h , г) врахування проміжного шару

Свого часу редукцією Прея користувалися, що встановити характер зміни сили тяжіння при зануренні в надра Землі. З формули (2.12) очевидно, що ця зміна залежить від величини густини σ . Було встановлено, що сила тяжіння при зануренні не змінюється при густині $\sigma = 3,7 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$. Якщо густина менша за цю величину, то сила тяжіння із зануренням збільшується, в протилежному випадку

– навпаки, зменшується. Проте це справедливо для незначних глибин, оскільки представлені формули наближені та отримані для g та R на рівні моря.

Редукція Прея вводиться для гравіметричних досліджень, що проводяться під водою або під землею. В даному випадку сила тяжіння визначається всередині мас. Вона збільшена внаслідок наближення до центру та зменшена за рахунок притягання мас, що розташовані над точкою спостережень. Останні передають елементарній масі силу, яка направлена від центру.

Спостережене значення сили тяжіння необхідно редукувати на поверхню моря, при цьому необхідно зробити приведення в вільному повітрі, а потім врахувати, що шар води, який розташований над точкою та зменшує значення g після приведення, розташовується під точкою і на ту ж саме величину збільшує значення g .

2.6. ТИМЧАСОВІ ЗМІНИ СИЛИ ТЯЖІННЯ

Сила тяжіння, а саме, її величина та напрямок, не є постійною величиною в кожній точці земної поверхні, а зазнає змін (варіацій), що викликаються:

1. дією притягання небесних тіл і, в першу чергу, Місяця та Сонця, що періодично змінюють своє положення відносно точки досліджень;

2. зміною розподілу мас Землі, що є результатом геодинамічних процесів в її надрах;

3. переміщенням атмосферних мас внаслідок метеорологічних процесів;

4. зміною рівня ґрунтових вод;

5. індустріальною діяльністю людини.

Ці зміни прийнято ділити на припливні і неприпливні.

Неприпливні зміни сили тяжіння в свою чергу ділять на:

1. періодичні;

2. неперіодичні;

3. вікові.

Періодичні припливні варіації сили тяжіння невеликого періоду, що обумовлені впливом притягання Місяця, Сонця та інших

небесних тіл, впевнено реєструються за допомогою сучасної гравіметричної апаратури. Такі припливні зміни сили тяжіння на сьогодні добре вивчені та широко використовуються для дослідження внутрішньої будови Землі [98].

До періодичних неприпливних змін сили тяжіння відносять:

1. періодичні коливання атмосферного тиску;
2. коливання рівня ґрунтових вод та вологості ґрунту;
3. сезонні випадання опадів;
4. товщина снігового покриву;
5. власні коливання Землі, обумовлені землетрусами і штормами в океані.

Перші чотири фактори прийнято ще називати метеорологічними.

Неперіодичні зміни сили тяжіння обумовлені:

1. неперіодичними коливаннями атмосферного тиску;
2. атмосферними опадами;
3. вологістю ґрунту і рівнем ґрунтових вод;
4. неперіодичними коливаннями швидкості обертання Землі;
5. землетрусами;
6. активною діяльністю вулканів;
7. діяльністю людини (розробка та експлуатація родовищ корисних копалин як горючих та і рудних, створення великих водосховищ).

Причинами вікових змін найчастіше виступають:

1. зміна гравітаційної сталої і уповільнення обертання Землі;
2. зміна положення мас у надрах Землі при виверженнях вулканів, землетрусах,
3. рух літосферних плит,
4. вікові рухи земної кори,
5. зміна фізичних властивостей Землі.

Так ще в 1938 р. Дірак передбачив вікове зменшення гравітаційної постійної G . Її величина повинна зменшуватись пропорційно віку Всесвіту тобто відносне зменшення складає $10^{-10} - 10^{-11} \text{рік}^{-1}$. Експериментального підтвердження цього висновку отримати не вдалося. Зменшення G повинно приводити до збільшення радіуса Землі на $0,1 - 1 \text{ мм/рік}$.

Вікові, періодичні та неперіодичні зміни кутової швидкості Землі супроводжуються зміною відцентрового прискорення та сили

тяжіння. Вікове зменшення кутової швидкості обертання Землі $2 \cdot 10^{-6}$ в 100 років викликано приливним тертям.

Але вікові зміни сили тяжіння на Землі поки що впевнено не зареєстровані сучасною гравіметричною апаратурою.

Сучасні гравіметричні спостереження за тимчасовими змінами сили тяжіння здійснюють за допомогою високоточних балістичних і надпровідних гравіметрів, які будуть розглянуті в наступних розділах підручника.

Так надпровідні гравіметри використовуються для вивчення довгоперіодичних змін сили тяжіння в Каліфорнійському університеті, Інституті прикладної геодезії у Франкфурті-на-Майні, Бельгійській королівській обсерваторії в Брюсселі.

Для правильного тлумачення тимчасових змін сили тяжіння необхідно одночасно з вимірюваннями g проводити вимірювання висот.

2.7. ПРИПЛИВНІ ЗМІНИ СИЛИ ТЯЖІННЯ

Положення Місяця і Сонця над даною точкою поверхні Землі періодично змінюється. Відповідно змінюється їх сила притягання, що приводить до періодичних змін величини сили тяжіння g та напрямку прямовисної лінії в точці Землі.

Виведемо формули, за якими можна визначити періодичні зміни сили тяжіння під дією притягання Місяця та Сонця. Теорія припливів для реальної Землі є дуже складною, та при розгляді елементарної теорії статичних припливів приймемо, що Земля: представлена кулею середнього радіуса R , є абсолютно твердим тілом, а Місяць і Сонце – матеріальні точки. Згідно рис. 2.4 приймемо наступні позначення:

- $OO_1 = \rho$ відстань від центра мас Землі O до небесного тіла O_1 .
- $AO_1 = \rho'$ – відстань точки A на поверхні Землі від небесного тіла O_1 .
- R – середній радіус Землі.
- z, z^1 – геоцентрична та топоцентрична зенітні відстані небесного тіла.

Сила притягання небесного світила діє на кожний елемент

маси Землі. Для точок, що повернуті до світила, притягання є більшим, ніж на протилежному боці Землі. Результируюча сила притягання є прикладена до центра тяжіння Землі та спрямована до світила. Якщо прийняти, що центр тяжіння зазнає однакового притягання, то для двох точок земної поверхні, коли небесне тіло знаходиться в зеніті та в надирі, будемо мати максимальне зменшення сили тяжіння. При добовому обертанні кожна точка земної поверхні буде двічі знаходитись в умовах, коли сила тяжіння мінімальна. Крім того, на варіації сили тяжіння впливає різна віддаленість небесного тіла від Землі.

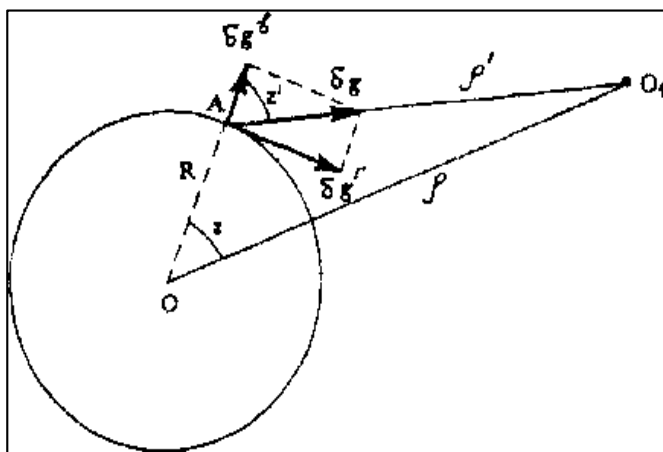


Рис.2.4 Схематичне зображення відстаней між Землею та небесним тілом за [98]

Припливний потенціал від маси небесного тіла m в пункті А буде:

$$W_A = \frac{Gm}{\rho'}, \quad (2.13)$$

де:

$$\rho' = R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \cos z, \quad (2.14)$$

або

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\rho} \left[1 + \left(\frac{R}{\rho} \right)^2 - 2 \left(\frac{R}{\rho} \right) \cos \cos z \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.15)$$

Якщо останній вираз розкласти в ряд за біномом Ньютона, то

одержимо:

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^n P_n(\cos \cos z), \quad (2.16)$$

де $P_n(\cos \cos z)$ – поліном Лежандра n порядку від $\cos z$.

Тоді вираз для потенціалу W_A можна представити

$$W_A = \frac{Gm}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^2 P_n(\cos \cos z) \quad (2.17)$$

Для відповідного потенціалу W_A визначимо вертикальну Δg^B і горизонтальну Δg^{Γ} складові припливної сили. Продиференціюємо вираз (2.17) по відповідним координатам. Тоді,

$$\delta g^B = -\frac{\partial W_A}{\partial R} = -\frac{Gm}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nR^{n-1}}{\rho^n} P_n(\cos \cos z), \quad (2.18)$$

$$\delta g^{\Gamma} = -\frac{\partial W_A}{R \partial z} = -\frac{Gm}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^{n-1}}{\rho^n} \frac{dP_n(\cos \cos z)}{dz}. \quad (2.19)$$

Розглянемо вертикальну складову припливної сили Δg^B . Якщо обмежитись третім членом розкладу, то

$$\delta g^B = -\frac{Gm}{\rho^2} \cos \cos z - \frac{GmR}{\rho^3} (3 \cos^2 z - 1) - \frac{GmR^2}{\rho^4} (5 \cos^3 z - 3 \cos \cos z) \quad (2.20)$$

У цій формулі перший член дає складову припливної сили в центрі мас Землі при $R=0$. Зміна сили тяжіння в точці A буде викликана різницею припливної сили в точках A і O . Отже:

$$\delta g^B = -\frac{GmR}{\rho^3} (1 - 3 \cos^2 z) + \frac{GmR^2}{\rho^4} \frac{3}{2} (3 \cos \cos z - 5 \cos^3 z). \quad (2.21)$$

Введемо в цю формулу середнє значення сили тяжіння для Землі, що представлена кулею, та прийнятий в астрономії горизонтальний паралакс. Тоді:

$$g = \frac{GM}{R^3}, \quad (2.22)$$

$$\sin \sin P = \frac{R}{\rho}, \quad (2.23)$$

де M – маса Землі, P – горизонтальний паралакс.

Враховуючи це будемо мати для δg^B :

$$\delta g^B = g \frac{m}{M} \sin^3 P \cdot \left[1 - 3 \cos^2 z + \frac{3}{2} \sin \sin P (3 \cos \cos z - 5 \cos^3 z) \right]. \quad (2.24)$$

Обчислимо максимальну зміну сили тяжіння за припливну зміну місячно-сонячного притягання. Відомо, що відношення мас m/M для Місяця дорівнює 0,01227, а для Сонця – 332000. Паралакс Сонця за

рік змінюється в межах 8,65" – 9,95". а паралакс Місяця змінюється в межах 53,5' – 61,6' протягом місяця.

В кожній точці земної поверхні припливна сила обернено пропорційна кубу відстані до небесного тіла та залежить від зенітної відстані небесного тіла, яку можна визначити за формулою;

$$\cos \cos z = \sin \sin \varphi \sin \sin \delta + \cos \cos \varphi \cos \cos \delta \cos \cos t, \quad (2.25)$$

$$\cos \cos t = \cos \cos (S - \alpha) = \cos \cos (S_0 - \lambda - \alpha) \quad (2.26)$$

В цій формулі:

φ – географічна широта пункту спостереження,

δ – схилення небесного тіла,

t – годинний кут небесного тіла.

Із астрономічного щорічника на момент спостереження шляхом інтерполяції одержують значення екваторіальних координат a і δ для Місяця та Сонця, а також горизонтальні паралакси Місяця і Сонця. За даними географічними координатами φ і λ даного пункту розраховують на момент спостереження $\cos \cos z$, а відтак саму поправку за вплив притягання Сонця

$$\delta g_\theta = g \frac{m_\theta}{M} \sin^2 P_\theta \left[1 - 3 \cos^2 z_\theta + \frac{3}{2} \sin \sin P_\theta (3 \cos \cos z_\theta - 5 \cos^3 z_\theta) \right] \quad (2.27)$$

та за вплив притягання Місяця

$$g_M = g \frac{m_M}{M} \sin^2 P_M \cdot \left[1 - 3 \cos^2 z_M + \frac{3}{2} \sin \sin P_M (3 \cos \cos z_M - 5 \cos^3 z_M) \right] \quad (2.28)$$

Утримуючи головний за величиною член для потенціалу припливної сили, отримаємо:

$$W = \frac{GmR^2}{2\rho^3} (3 \cos^2 z - 1) \quad (2.29)$$

Відповідні формули для приливної сили, деформації рівневої поверхні і відхилення прямовисних ліній будуть:

$$\delta g = - \frac{\partial W}{\partial R} = \frac{GmR}{\rho^3} (1 - 3 \cos^2 z) \quad (2.30)$$

$$\delta \zeta = \frac{W}{\gamma} = \frac{GmR^2}{2\gamma\rho^3} (3 \cos^2 z - 1), \quad (2.31)$$

$$\delta \vartheta = - \frac{1}{\gamma R} \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{3}{2} \frac{GmR}{\gamma\rho^3} \sin \sin 2z, \quad (2.32)$$

Використовуючи значення сталих R , Gm , і ρ проводиться оцінка

значень цих величин. Для Місяця

$$\delta g = 54,83(1 - 3\cos^2 z), \text{мкГал}$$

$$\delta \zeta = 17,8(3\cos^2 z - 1), \text{см}$$

$$\delta \vartheta = 0,0173'' \sin^2 z$$

і для Сонця

$$\delta g = 25,27(1 - 3\cos^2 z), \text{мкГал}$$

$$\delta \zeta = 8,2(3\cos^2 z - 1), \text{см}$$

$$\delta \vartheta = 0,007'' \sin^2 z$$

Граничні значення припливних змін дериват гравітаційного поля наведені в таблиці 2.1.

Граничні значення припливних змін дериват гравітаційного поля обчислені за умови, що Земля є абсолютно твердим тілом. Але насправді під дією припливних сил поверхня Землі деформується. В пружній твердій оболонці Землі виникає припливна хвиля, яка зміщує точку спостереження А від центра Землі та тим самим збільшує амплітуду варіацій зміни сили тяжіння приблизно в 1,2 рази. Отже, варіації сили тяжіння можуть досягати 0,3 мГал, варіації відхилення прямовисних ліній досягають амплітуди до 40 10-3, а варіації радіуса деформованої Землі – 56 см.

Сумарне переміщення могло б скласти 78 см. Однак Земля не є ні ідеально пружною, ні ідеально жорсткою. Реальна деформація на екваторі становить 51 см, а в наших середніх широтах приблизно 40 см. Таким чином земна поверхня неперервно пульсує.

Проте на величину g впливає пружна деформація тіла Землі. Для врахування варіацій теоретично обчислені значення виправляють шляхом множення на коефіцієнт, отриманий за результатами експериментальних спостережень. Величина коефіцієнта змінюється від 1,05 до 1,35. Коефіцієнт відображає локальні зміни механічних властивостей земних надр.

Реально спостережувані зміни сили тяжіння в часі виявляють істотні розбіжності з теоретично обчисленими $g(t)$. Ця невідповідність пов'язана з наступними причинами:

1. блоковою будовою земної кори, і як наслідок цього, різним відгуком на дію приливних сил на різних ділянках Землі;
2. у розрахунках не враховується, що Місяць і Земля обертаються навколо їх загального центру тяжіння;
3. внутрішнє ядро під дією приливних сил коливається в зовнішньому ядрі, якому притаманна понижена в'язкість.

Місячно-сонячні варіації поля в момент досягнення максимальних значень відіграють роль спускового механізму для деяких геологічних процесів: вивержень вулканів, землетрусів і т. п.

Таблиця 2.1 – Граничні значення припливних змін дериват гравітаційного поля за [98]

z	0° $\delta g_{\min}$, мкГал	90° $\delta g_{\max}$ мкГал	Коливання, МкГал	90° $\delta \zeta_{\min}$ см	0° $\delta \zeta_{\max}$ см	Коливання см	135° $\delta \vartheta_{\min}$	45° $\delta \vartheta_{\max}$	Коливання
Місяць	-109,7	+54,8	164,5	-17,8	+35,6	53,4	-0 0173	+0,0173	0,0346
Сонце	-50,5	+25,3	75,8	-82	+ 16,4	24,6	-0,0078	+0 0078	0,0156
Сумар- ний вплив	-160,2	+80,1	240,3	-26,0	+52,0	78,0	-0 0251	+0,0251	0 0502

Поправка за припливні зміни сили тяжіння в результаті гравіметричних спостережень

Результати гравіметричних спостережень повинні бути виправлені припливними поправками. Якщо необхідно врахувати припливну поправку $\delta g_{\text{пр}}$ з точністю до 10 мкГал , то використовують наближену формулу

$$\delta g_{\text{пр}} = 12g \frac{m}{m} \sin^3 p (3\cos^2 z - 1) \quad (2.33)$$

Цю поправку додають до виміряного значення сили тяжіння $g - g_{\text{вим}} + \delta g_{\text{пр}}$.

Використовуючи числові значення величин g , $\frac{m}{m}$ і P , для сумісного впливу Місяця та Сонця одержимо

$$\delta g_{\text{пр}} = [55(3\cos^2 z_\gamma - 1) + 25(\cos^2 z_\theta - 1)], \text{ мкГал.} \quad (2.34)$$

При відносних вимірюваннях прискорення сили тяжіння до величини поправки додають стале число (наприклад, 0,3 мГал), щоб поправка за припливні зміни завжди була додатною. На кожний день і час спостережень для величини $\delta g_{\text{пр}} + 0,3 \text{ мГал}$ складають графіки (див. рис. 2.5) в залежності від широти.

Так, на графіку показані зміни припливної поправки в силу тяжіння для різних широт і дат. Шляхом інтерполювання можна зняти з графіка відповідну поправку за припливні зміни сили тяжіння для проміжних широт. Крім графіків, можна використати таблиці припливних поправок на конкретну дату та час спостереження.

Поправку за місячно-сонячні припливні зміни в силу тяжіння при точних спостереженнях (порядку 1 мкГал і точніше) обчислюють для кожного гравіметричного пункту на момент спостереження за більш точною формулою:

$$\delta g = 1.2g \frac{m_\gamma}{m} \sin^3 P_\gamma \left[(3\cos^2 z_\gamma) + \frac{3}{2} \sin P_\gamma (5\cos^3 z - 3 \cos \cos z) + 1.2g \frac{m_\theta}{m} \sin^3 P_\theta (3\cos^2 z_\theta) \right] \quad (2.35)$$

Її вводять при створенні опорних гравіметричних мереж і абсолютних визначеннях, а також при вивченні неприпливних змін сили тяжіння.

$$\delta g_{\text{пр}} 10^{-5} \text{ м/с}^2$$

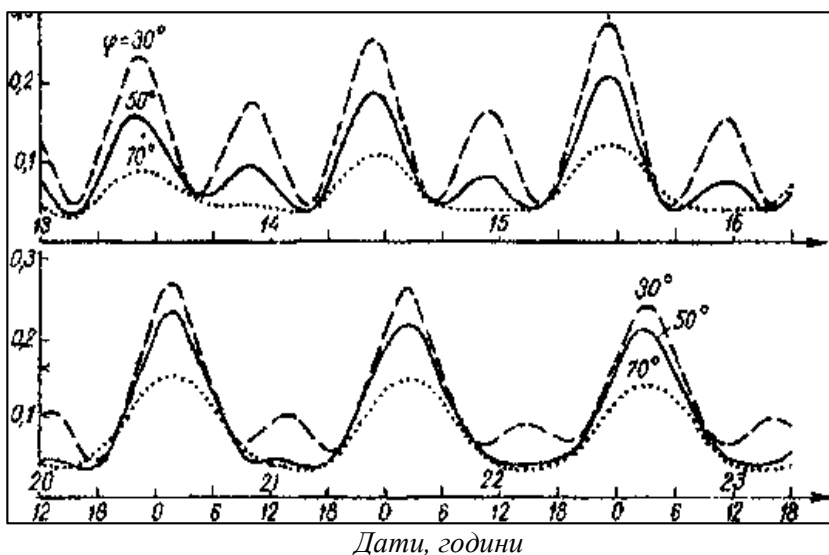


Рис.2.5. Припливні варіації сили тяжіння за [98]

Припливні зміни сили тяжіння можна спостерігати на припливних станціях з використанням статичних гравіметрів (переважно “Асканія” GS-11 і GS-12, GS-15). Точність реєстрації гравіметричних припливів цими приладами складає 1 $\mu\text{кГал}$.

Реєстрацію нахилів рівневої поверхні відносно поверхні Землі здійснюють за допомогою горизонтальних маятників або нахиломірів, сучасна точність яких складає $(1''-2'')10^{-4}$. Це означає, що з такою точністю коливаються відхилення прямовисних ліній, які викликають зміну перевищень, яку одержують із геометричного нівелювання. Перші спостереження припливних змін сили тяжіння в Україні були виконані в Полтавській гравіметричній обсерваторії з гравіметром ГРАФ-2 в 1955 році. Широкий розвиток вони одержали на початку шістдесятих років XX сторіччя, коли обсерваторія придбала два гравіметри фірми “Асканія” GS-11 і GS-12.

2.8. НЕПРИПЛИВНІ ЗМІНИ СИЛИ ТЯЖІННЯ

Для перевірки геодинамічних гіпотез і моделей Землі, для вивчення тектонічних процесів, сейсмічних явищ, вулканізму використовуються неприпливні зміни сили тяжіння в геофізиці. Дослідження неприпливних змін сили тяжіння в геодезії необхідне для вивчення зміщення центра мас Землі, зміни поверхні Землі та елементів аномального поля, стабільності інженерних споруд.

Результати порівняння високоточних повторних абсолютних вимірювань сили тяжіння дають цінну інформацію для багатьох природничих наук і підвищують впевненість результату дійсної зміни сили тяжіння.

Наведемо деякі результати досліджень впливу ряду факторів, які обумовлюють неприпливну зміну сили тяжіння.

Річний рух полюсів Землі внаслідок вільної нутації досягає за амплітудою 3". З цієї причини зміна сили тяжіння може досягати 15 мкГал за півроку. М. Парійський і М. Молоденський показали, що зміни сили тяжіння з швидкістю 1 – 2 мкГал/рік можна пояснити нерівномірним обертанням Землі.

Детальні дослідження щодо врахування впливу геофізичних факторів на деривати гравітаційного поля Землі виконав П.Д.Двуліт (табл. 2.2) [98].

Таблиця 2.2 Максимально можливий вплив геофізичних факторів на деривати гравітаційного поля

Геофізичні фактори	Прискорення сили тяжіння, мкГал	Деформація рівневої поверхні, см	Відхилення прямовисних ліній, $1 \cdot 10^{-4}$ сек. дуги
1. Атмосферні маси	10-20	2-3	5-7
2. Сніговий покрив	5-10	1-2	2-5
3. Зміни рівня ґрунтових вод	10-100	4-5	1-3

Періодичні та неперіодичні зміни рівня ґрунтових вод, зміни об'ємів води в водоймищах, артезіанських басейнах і інші гідрологічні ефекти викликають варіації сили тяжіння 7 – 8 мкГал, а в деяких випадках можуть перевищувати 0,1 мГал. Сезонні зміни рівня Світового океану викликають векторні зміщення центра мас Землі на величину порядку 2 мм, що приводить до глобальних векторних змін сили тяжіння на земній поверхні до 0,6 мкГал. Глобальні переміщення атмосферних мас Землі приводять до зміни сили тяжіння на 1,3 мкГал. Короточасні і сезонні переміщення атмосфери в регіональному і локальному масштабах викликають зміну сили тяжіння до 10 – 20 мкГал.

Сніговий покрив має сезонний характер, а зміна сили тяжіння обумовлена цим може досягати 5 – 10 мкГал.

2.9. ВІКОВІ ЗМІНИ СИЛИ ТЯЖІННЯ

Вікові зміни сили тяжіння на Землі поки що не були виявлені, але про існування їх зроблені відповідні теоретичні припущення. Причиною вікових змін сили тяжіння можуть бути вертикальні рухи земної поверхні, які зумовлені тектонічними процесами, зміною густини порід у надрах Землі внаслідок розширення речовини радіоактивним підігріванням, фазових перетворень і переміщення мас. Зміна швидкості обертання Землі впливає на зміни відцентрової сили, що приводить до зміни сили тяжіння. Зміна положення мас при виверженні вулканів, землетрусів також приводить до зміни сили тяжіння. Так, в Японії у районі активних вулканів були виявлені зміни сили тяжіння до 5 мГал, причиною яких вважали підйом магми, густина якої відрізняється від густини оточуючих порід.

Причиною вікової зміни сили тяжіння може бути вікова зміна гравітаційної сталої. Але для виявлення вікових змін сили тяжіння необхідно виконувати повторні високоточні вимірювання абсолютного значення сили тяжіння протягом тривалого часу. В зв'язку з тим, що епоха точних гравіметричних вимірювань налічує декілька десятиліть, вивчення вікових змін сили тяжіння тільки починається.

3. ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ ТЕОРІЇ СИЛИ ТЯЖІННЯ

Теорія поля сили тяжіння дозволяє нам оцінювати характеристики поля і аналізувати гравіметричні дані. Знання основ теорії необхідно і при виконанні вимірювань [99]. Надалі будемо розглядати незмінне у часі земне поле, але усе викладене справедливо і для інших небесних тіл. Вивченню поля сили тяжіння приділяється велика увага в підручниках по теорії потенціалу [65, 100, 101], а також по геодезії і геофізиці [1, 102-122].

3.1. ПОЛЕ ТЯЖІННЯ І РІШЕННЯ ПРЯМОЇ ЗАДАЧІ

У відповідності з рівнянням (1.3) сила, що діє на частинку в околиці точки A , прямо пропорційна масі $\Delta m(A)$ [Кауфман]. Уявимо собі, що ця маса зменшується. Тоді сила $d\vec{F}(A)$ також буде зменшуватися, але відношення

$$\frac{d\vec{F}(A)}{dm}$$

залишатиметься сталим і характеризувати величину g , яка називається полем тяжіння в точці A :

$$\vec{g}(A) = -G \int_V \frac{\delta(B)dV}{R^3} \vec{R}. \quad (3.1)$$

Припускаючи розподіл мас усередині об'єму V заданим, ця векторна функція $\vec{g}(A)$ залежить тільки від координат точки спостереження A та за визначенням є полем. Будемо розглядати маси в об'ємі V як джерела поля $\vec{g}(A)$. Іншими словами, ці маси створюють поле в будь-якій точці простору, і передбачається, що поле існує незалежно від того, знаходяться маси в цій точці або ні. При розміщенні елементарної маси в деякій точці A , на неї діє сила, яка дорівнює

$$\vec{F}(A) = \Delta m(A) \vec{g}(A). \quad (3.2)$$

Ця сила описує рух маси у відповідності до другого закону Ньютона. По суті, всі методи вимірювання гравітаційного поля засновані на використанні рівняння (3.2). Можна сказати, що в

кожній точці поле притягання «чекає» маси, щоб створити силу і викликати рух.

Функцію $\vec{g}$ можна інтерпретувати також зовсім іншим способом. Як впливає з другого закону Ньютона, $\vec{g}(A)$ представляє прискорення елементарної маси, викликане силою $\vec{F}(A)$. В гравіметрії, в основному, використовується концепція поля, проте іноді використовуються обидва підходи.

Оскільки взаємодія мас зазвичай не впливає на їх густину вона може бути задана. Іншими словами, густина кожної речовини є відомим параметром, що дуже важливо, оскільки це означає, що рівняння (3.2) дозволяє вирішити пряму задачу за допомогою простого інтегрування. Існують винятки, наприклад, обертання рідини, що стискається, викликає зміну її густини. Для інших геофізичних методів (в першу чергу, електророзвідка і сейсморозвідка) джерела поля зазвичай не можуть бути визначені до того, як буде розраховано поле, тому розв'язок прямої задачі вимагає розв'язку крайової задачі.

Звичайно, чудова простота розв'язку прямої задачі в полі тяжіння є виключною. Рівняння (3.1) може бути застосоване в будь-якій точці простору, включаючи і об'єм, в якому знаходяться маси. В цьому випадку відстань R може прямувати до нуля, і це природно викликає підозру, що використання рівняння (3.1) у цих випадках неправомірно. В подальшому буде доведено, що сингулярність підінтегрального виразу може бути усунена, і рівняння (3.1) дає вірне значення поля тяжіння всередині маси. Очевидно, що із зростанням відстані між точкою спостереження A і тілом вектор $\vec{R}$ практично перестає залежати від точки B . Відповідно, в межах, коли R прямує до нескінченності, ця величина може бути виведена з під знаку інтеграла, і тоді :

$$\vec{g}(A) = -G \frac{\int_V \frac{\delta(B)dV}{R^3} \vec{R} = -G \frac{m}{R^3} \vec{R}, \quad (3.3)$$

де B – довільна точка тіла, а m – його маса . Формула (3.3) показує, що незалежно від розмірів і форми на великих відстанях тіло створює приблизно таке ж поле притягання, як і елементарна частинка.

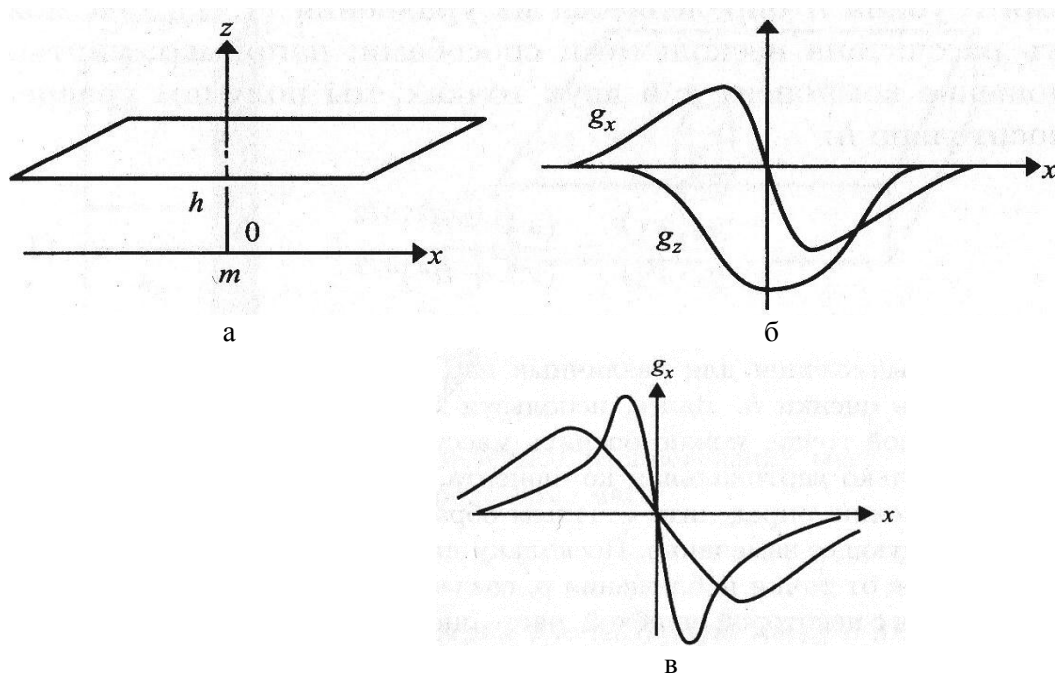


Рис. 3.1 Випадки розв'язку прямої задачі за [99]

а – елементарна маса поверхні спостережень, б – поведінка горизонтальної і вертикальної компонент поля, в – вплив положення мас

Для ілюстрації рівняння (3.3) розглянемо розв'язок прямої та оберненої задач у найпростішому з можливих випадків, коли поле створюється елементарною масою.

Припустимо, що частинка з масою $m(B)$ розташована в точці початку декартової системи координат (рис. 3.1, а), а поле спостерігається на площині $z = h$.

Тоді, як слідує з рівняння (3.3), компоненти поля тяжіння в точці $B(x, y, z)$ дорівнюють:

$$g_x(x, y, h) = -G \frac{mx}{R^3}, \quad g_y(x, y, h) = -G \frac{my}{R^3},$$

$$g_z(x, y, h) = -G \frac{mh}{R^3}, \quad (3.4)$$

оскільки

$$\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

тут $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, – одиничні вектори, спрямовані вздовж координатних осей.

Таким чином, розв'язок прямої задачі тривіальний. Зокрема, вздовж лінії, де $y = 0$ і $z = h$, маємо:

$$g_x(x, 0, h) = -G \frac{mx}{(x^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad g_y(x, 0, h) = 0,$$

$$g_z(x, 0, h) = -G \frac{mh}{(x^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Поведінка обох компонент як функцій x показано на рис. 3.1, б і може бути легко пояснена. Насамперед, горизонтальна компонента зникає над тілом, оскільки поле направлено до тіла. Також $g_x(x)$ має два екстремуми, положення яких визначається наступною умовою:

$$\frac{\partial g_x}{\partial x} = 0.$$

Обчислюючи похідну, знаходимо

$$x_e = \pm \frac{h}{\sqrt{2}}, \quad (3.5)$$

і зі зменшенням глибини частинки екстремум спостерігається при менших значеннях x , але величина поля в них зростає (рис. 3.1, в). Для від'ємних значень x горизонтальна компонента g_x додатна, і це зрозуміло, оскільки поле направлено до маси та утворює кут з віссю x менше 90° . Навпаки, при $x > 0$ цей кут перевершує 90° і компонента стає від'ємною. Ясно, що вертикальна компонента $|g_z|$ має максимум при $x = 0$ і поступово зменшується з відстанню x . На досить значних відстанях ми маємо $g_x > g_z$, що впливає з того, що поле стає майже горизонтальним.

Зауважимо, що на таких відстанях вертикальна компонента зменшується швидше, ніж R^{-2} . Розв'язок оберненої задачі також досить простий. Наприклад, якщо відома тільки компонента g_x , то її нульова величина визначає положення тіла (координату x). Водночас, глибина h визначається з рівняння (3.5), вона може бути розрахована декількома способами; наприклад, з огляду на відношення компонент x у двох точках, ми отримаємо рівняння відносно h :

$$\frac{g_x(x_1)}{g_x(x_2)} = \frac{(x_2^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}{(x_1^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.6)$$

Повторюючи ці обчислення для різних пар $g_x(x)$, можна підвищити точність оцінки h . Далі, використовуючи значення цієї компоненти в будь-якій точці, можна оцінити масу m . У разі коли відома тільки вертикальна компонента, положення і величину маси можна визначити подібним чином. Фактично це є основою відомого методу інтерпретації гравітаційних аномалій методу характерних точок.

Доречно тут зробити наступне зауваження. Оскільки будь-яке тіло, що досить віддалене від точки спостереження A , створює поле, яке відомо завжди з деякою помилкою, часто воно практично не може бути відрізнено від поля точкової частинки, і тому можна визначити тільки добуток об'єму на густину, тобто масу, а величина кожної з них окремо залишається невідомою. Це є першою ілюстрацією того факту, що обернена задача в гравіметрії, як і в інших геофізичних методах, відноситься до некоректно поставлених задач, оскільки деякі параметри тіла не можуть бути визначені.

3.2. РІЗНІ ТИПИ МАС І ЇХ ГУСТИНИ

Як вказувалося вище, рівняння (3.1) дозволяє знайти поле тяжіння скрізь, але для цього потрібно, взагалі кажучи, досить громіздке інтегрування [99]. Однак, у багатьох випадках обчислення поля $\vec{g}(A)$ можна істотно спростити.

Для початку розглянемо елементарну масу з густиною $\delta(B)$, яка займає об'єм ΔV . Будемо тепер збільшувати густину і зменшувати об'єм таким чином, щоб маса залишалася сталою.

За визначенням ці зміни не здійснюють суттєвого впливу на поле, оскільки точка спостереження A знаходиться далеко. За умови, коли $\Delta V \rightarrow 0$ і $\delta \rightarrow \infty$, ми прийдемо до математичного поняття точкової маси $m(B)$. Відповідно, її поле тяжіння визначається рівнянням (3.3). Звичайно, неможливо помістити масу в точку, і точкова маса служить тільки наближеним поданням реального тіла.

Припустимо, що елементарний об'єм представлений кубом з довжиною сторони h . Тоді при переході до точкової маси густина зростає як h^{-3} . Припустимо далі, що об'єм $V(B)$ має форму стрижня (рис.3.2, а) з поперечним перерізом

$$S = h_1 h_2$$

і відстань до точки спостереження задовольняє умовам

$$R \gg h_1 \text{ і } R \gg h_2.$$

Тоді ми можемо зменшувати елементарний об'єм $dV = h_1 h_2 dl$ і збільшувати об'ємну густину так, щоб елементарна маса не змінювалася

$$dm = \delta(B) h_1 h_2 dl,$$

тут dl – елементарне зміщення вздовж стрижня.

В межевому випадку, коли поперечний переріз стає точкою на лінії l , отримуємо розподіл маси з лінійною густиною λ :

$$\lambda(B) = \delta(B) h_1 h_2,$$

де

$$\delta(B) \rightarrow \infty \text{ і } h_1 \rightarrow 0, \quad h_2 \rightarrow 0.$$

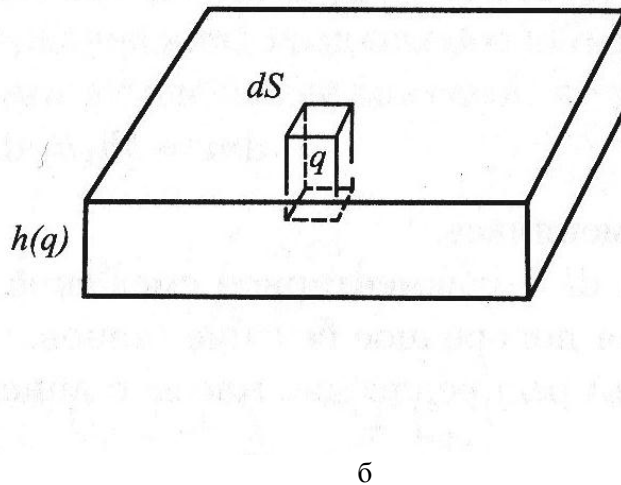
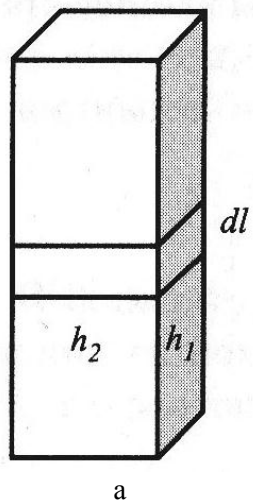


Рис.3.2. Ілюстрація різного розподілу мас за [99]
 а - лінійне розподіл мас ; б - поверхневий розподіл мас

Ясно, що $\delta(B)$ прямує до нескінченності як h^{-2} , і ми маємо інше математичне поняття маси. Відповідно, рівняння для поля тяжіння приймає наступний вигляд:

$$\vec{g}(A) = -G \int_l \frac{\lambda(B)}{R^3} \vec{R} dl \quad (3.7)$$

і об'ємне інтегрування зводиться до набагато більш простого лінійного. Нарешті припустимо, що маси розміщуються в доволі тонкому шарі, так що його товщина $h(B)$ набагато менше відстані R (рис.3.2, б).

Розглянемо елементарний об'єм $dV = h(B)dS$, маса якого дорівнює $dm = \delta B h(B)dS$. Зменшуючи тепер товщину шару із збереженням маси dm , на межі ми отримуємо поверхню з густиною $\sigma(B)$:

$$\sigma(B) = \delta(B)h(B).$$

У цьому випадку об'ємна густина прямує до нескінченності як h^{-1} , коли $h(B)$ прямує до нуля. Відповідно, вираз для поля приймає вигляд:

$$\vec{g}(A) = -G \int_S \frac{\sigma(B)}{R^3} \vec{R} dS. \quad (3.8)$$

і об'ємне інтегрування замінюється інтегруванням по поверхні.

Таким чином, поле тяжіння, створюване об'ємними, поверхневими, лінійними і точковими масами, має вигляд:

$$\vec{g}(A) = -G \left[\int_V \frac{\delta(B)}{R^3} \vec{R} dV + \int_S \frac{\sigma(B)}{R^3} \vec{R} dS + \int_l \frac{\lambda(B)}{R^3} \vec{R} dl + \sum \frac{m(B)}{R^3} \vec{R} \right] \quad (3.9)$$

Можна прийти до висновку, що *об'ємна густина прямує до нескінченності за різними законами поблизу точкових, лінійних і поверхневих мас, і це впливає на поведінку поля поблизу них.* Звичайно, рівняння (3.1) завжди дозволяє обчислити поле тяжіння $\vec{g}$. У той же час використання рівняння (3.9) у багатьох випадках значно спрощує цю процедуру.

3.3. ДВІ ФУНДАМЕНТАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ПОЛЯ ТЯЖІННЯ

Оскільки рівняння (3.1) дозволяє знайти розв'язок прямої задачі для будь-якого розподілу мас, можна сказати, що в цьому сенсі теорія гравіметрії повністю розроблена. Проте, для кращого розуміння поведінки поля сили тяжіння Землі і в деяких випадках для збільшення якості розв'язку обернених задач корисно вивчити загальні властивості поля тяжіння і ввести також поняття потенціалу.

3.3.1. Незалежність інтеграла $\int_l \vec{g} dl$ від шляху інтегрування

Це питання детально розглядається в курсі «Теорія поля», тому обчислимо інтеграл вздовж прямої лінії, зображеної на рис. 3.3, а. Отримаємо:

$$-Gm \int_{A_1}^{A_2} \frac{\vec{R} dl}{R^3} = -Gm \int_{A_1}^{A_2} \frac{dR}{R^2} = Gm \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right). \quad (3.10)$$

Очевидно, що інтеграл уздовж дуги кола з радіусом R , дорівнює нулю, оскільки поле $\vec{g}(A)$ перпендикулярно шляху інтегрування. Тому, як і раніше, інтеграл вздовж шляху, зображеного на рис. 3.3, б, визначається інтегралом вздовж прямої лінії.

Розглянемо тепер більш складний шлях, що показаний на (рис. 3.3, в. Інтегрування між точками A_1 і A_3 дає :

$$\int_{A_1}^{A_3} \vec{g} dl = Gm \left[\left(\frac{1}{R_{BA_3}} - \frac{1}{R_{BA_2}} \right) + \left(\frac{1}{R_{BA_2}} - \frac{1}{R_{BA_1}} \right) \right],$$

або

$$\int_{A_1}^{A_3} \vec{g} dl = Gm \left(\frac{1}{R_{BA_3}} - \frac{1}{R_{BA_1}} \right) \quad (3.11)$$

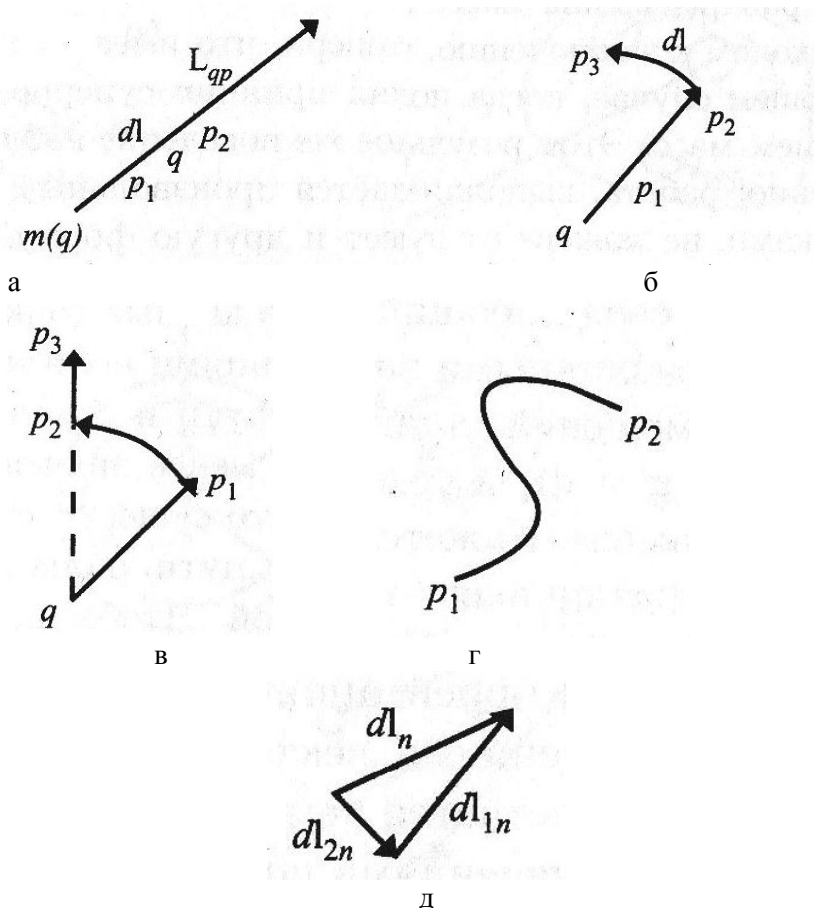


Рис. 3.3. Різноманітні шляхи інтегрування поля g за [99]

Порівнюючи рівняння (3.10) і (3.11), можна зробити висновок, що в обох випадках значення інтегралів визначаються відстанню від частинки до кінцевих точок шляху інтегрування. Узагальнимо цей результат на випадок довільного шляху (рис. 3.3, г).

Кожне елементарне зміщення може бути представлено у вигляді суми двох перпендикулярних векторів (рис. 3.3, д):

$$d\vec{l}_n = d\vec{l}_{1n} + d\vec{l}_{2n},$$

тут $d\vec{l}_{1n}$ – зміщення вздовж радіус-вектора, проведеного з точки B , а $d\vec{l}_{2n}$ – елемент дуги радіуса R_{AB} .

Отримуємо

$$\vec{g}(A)d\vec{l}_n = \vec{g}(A)d\vec{l}_{1n},$$

і інтеграл уздовж елементарного зміщення $d\vec{R}_n$ може бути записаний у вигляді:

$$\int_{A_n}^{A_{n+1}} \vec{g} d\vec{l}_n = Gm \left(\frac{1}{R_{BA_{n+1}}} - \frac{1}{R_{BA_n}} \right). \quad (3.12)$$

Беручи до уваги те, що інтервал дуже малий, інтеграл дорівнює $\vec{g} d\vec{l}_n$ і права сторона рівняння (3.12) дає значення цього добутку. Виконуючи підсумовування цих інтегралів вздовж шляху з початковою і кінцевою точками A_1 і A_2 , отримаємо:

$$\int_{A_1}^{A_2} \vec{g} d\vec{l} = Gm \left(\frac{1}{R_{BA_2}} - \frac{1}{R_{BA_1}} \right). \quad (3.13)$$

Як і в першому випадку, інтеграл визначається тільки положенням початкової та кінцевої точки, а форма і довжина шляху ніяк не впливають на його значення. Таким чином показано, що у разі одиночної елементарної маси інтеграл у рівнянні (3.13) не залежить від шляху.

Припустимо тепер, що існує довільний розподіл мас. Застосовуючи принцип суперпозиції, ми приходимо до висновку, що така ж поведінка спостерігається і в загальному випадку, коли поле створюється довільним розподілом мас.

Цей результат має і інше формулювання, а саме: **робота, що здійснюється полем сили тяжіння між двома точками, не залежить від шляху інтегрування.**

Розглянемо простий експеримент: припустимо, що відстань між точками A і B дорівнює 1 м. Перший шлях буде прямою лінією, що з'єднає ці точки. Виконуючи інтегрування скалярного добутку $\vec{g} d\vec{l}$, ми отримаємо деяке значення інтеграла. Другий шлях буде зовсім відмінним від першого і буде проходити через усі гори і океани на Землі, перш ніж досягне точки B . Протягом цього шляху ми вимірюємо поле тяжіння в кожній точці шляху і обчислюємо добуток $\vec{g} d\vec{l}$, проте підсумовування цих величин дає результат, який в точності збігається з результатом інтегрування по прямій лінії.

3.3.2. Зв'язок між потоком поля тяжіння і його джерелами (масами)

Встановимо тепер другу чудова властивість поля притягання. Як і раніше, спочатку будемо розглядати поле точкової маси $m(B)$.

За визначенням, потік поля через елементарну поверхню dS (рис. 3.4, а) дорівнює

$$\vec{g}dS = -G \frac{m}{R^3} \vec{R}dS. \quad (3.14)$$

Як відомо тілесний кут в точці B стягується поверхнею dS ,

$$\frac{\vec{R}dS}{R^3} = d\omega. \quad (3.15)$$

Таким чином, в цьому випадку потік може бути представлений у вигляді:

$$\vec{g}(A)d\vec{S} = -Gm(B)d\omega(B). \quad (3.16)$$

Зауважимо, що потік поля сили тяжіння – *суто математичне поняття*, яке не має ніякого *фізичного сенсу*. Обчислимо тепер потік через поверхню S (рис. 3.4, б). Виконуючи інтегрування, отримаємо :

$$\int \vec{g}(A)d\vec{S} = -Gm(B)\omega(B), \quad (3.17)$$

де $\omega(B)$ – тілесний кут в точці B , що стягується поверхнею S . Він може бути додатним, від'ємним або нульовим.

Розглянемо тепер найбільш цікавий випадок, коли поверхня S замкнута. Тоді, як добре відомо, тілесний кут дорівнює 4π , якщо точка B розміщується всередині об'єму V , який обмежений поверхнею S , і кут дорівнює нулю, коли B знаходиться зовні об'єму. Відповідно рівняння (3.17) може бути записано у вигляді:

$$\oint_S \vec{g}(A)d\vec{S} = 0 \quad (3.18)$$

в тому випадку, коли маса знаходиться поза об'єму V , і

$$\oint_S \vec{g}(A)d\vec{S} = -4\pi Gm(B) \quad (3.19)$$

в тому випадку, коли вона знаходиться десь всередині V (B – точка на замкнутій поверхні).

Відповідно з рівнянням (3.18) потік, що створений масою, що знаходиться поза об'єму V , дорівнює нулю незалежно від положення маси $m(B)$. Дійсно, в кожній точці поверхні маса створює поле, і скалярний добуток $\vec{g}d\vec{S}$, взагалі кажучи, відрізняється від нуля.

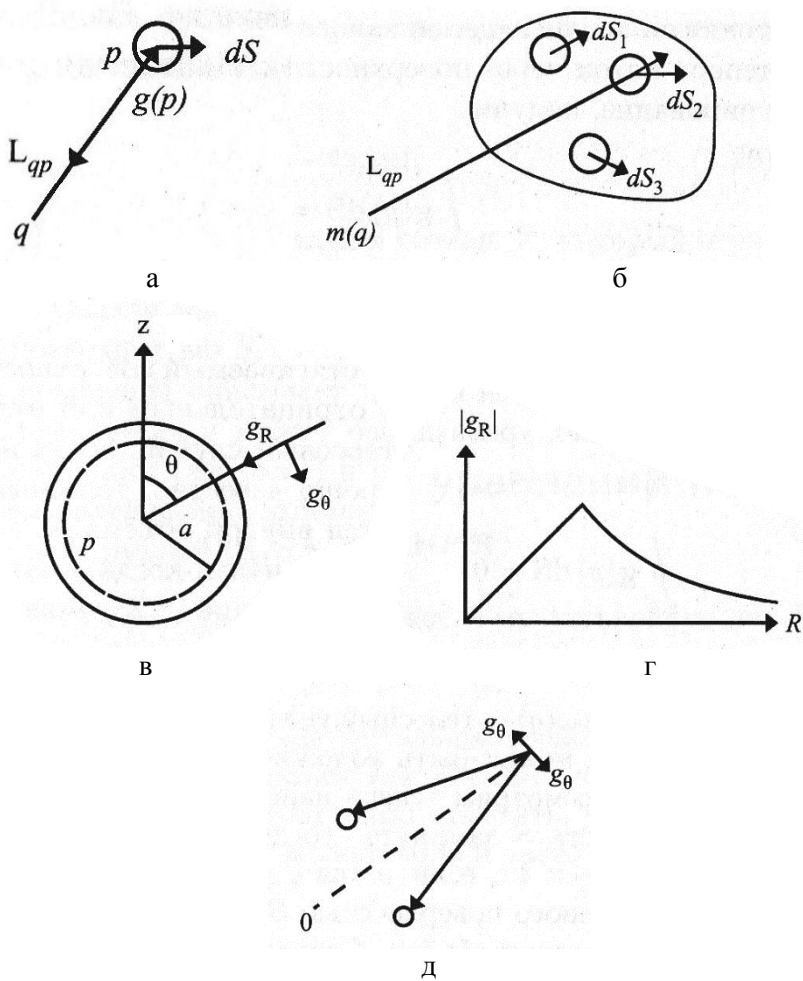


Рис. 3.4. Ілюстрація зв'язку між потоком поля тяжіння і його масами за [99]

а - потік через елементарну поверхню ;

б - потік як сума елементарних потоків;

в - компоненти поля, викликаного сферичною масою;

г - симетрія поля;

д - поле всередині і поза сферичної маси.

Однак сума цих елементарних потоків по замкнутій поверхні дорівнює нулю.

Більш того, зміна поверхні веде до зміни елементарних потоків, але їхня сума, тобто інтеграл, зникає, якщо тільки замкнута поверхня не перетинає масу.

Таким чином, потік нечутливий до мас, які є поза об'єму V . Важливо, що потік залишається тим же самим незалежно від розміщення елементарної маси, форми і розташування замкнутої поверхні, що його оточує. Знову застосовуючи принцип суперпозиції, для довільного розподілу мас отримуємо :

$$\oint_S g dS = -4\pi GM, \quad (3.20)$$

де M – повна маса, яка перебуває в об'ємі V , який обмежений поверхнею S .

Це рівняння описує другу фундаментальну властивість поля тяжіння і може розглядатися як «зв'язок» між джерелами (масами) і полем.

Необхідно відзначити, що подібне співвідношення виконується для будь-якого поля і часто називається формулою Гаусса.

3.4. СИСТЕМА РІВНЯНЬ ПОЛЯ ТЯЖІННЯ

У попередньому підрозділі ми встановили дві фундаментальні властивості поля тяжіння, обидві вони сліднують із закону притягання Ньютона і принципу суперпозиції [99].

Перша властивість – незалежність роботи поля тяжіння від шляху між двома точками – записується у вигляді

$$\int_{L_1} \vec{g} d\vec{l} = \int_{L_2} \vec{g} d\vec{l}, \quad (3.21)$$

де L_1 і L_2 – два довільних шляхи, що з'єднують одні й ті ж кінцеві точки (рис. 3.5, а).

Змінюючи напрям одного з цих шляхів, наприклад L_2 , отримуємо:

$$\int_{L_1} \vec{g} d\vec{l} = - \int_{L_2} \vec{g} d\vec{l} \text{ або } \int_{L_1} \vec{g} d\vec{l} + \int_{L_2} \vec{g} d\vec{l} = 0. \quad (3.22)$$

Оскільки ці шляхи утворюють замкнутий шлях L , рівняння (3.21) може бути переписано як

$$\oint \vec{g} d\vec{l} = 0 \quad (3.22)$$

тобто циркуляція поля тяжіння дорівнює нулю. Це означає, що силові лінії цього поля завжди відкриті, а їхні кінцеві точки розташовані або всередині мас, або на нескінченності.

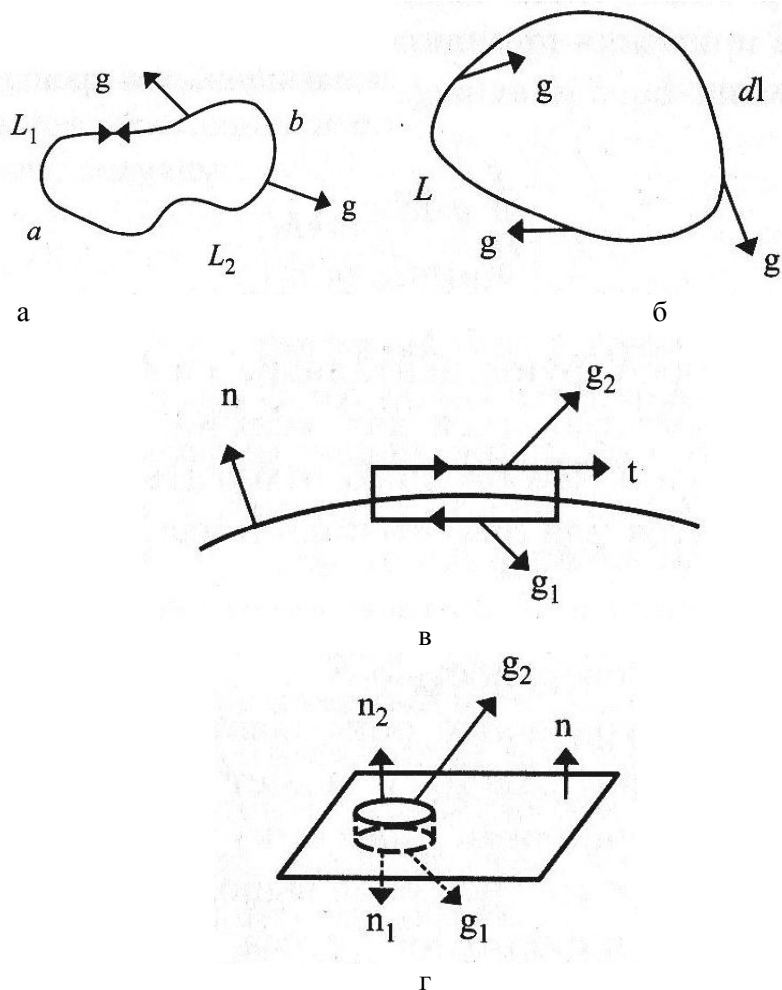


Рис . 3.5 . Ілюстрація системи рівнянь поля тяжіння
 а, б - ілюстрація рівняння (3.21); в - тангенціальна компонента
 поля на межі; г - нормальна компонента поля на межі за [99]

Друга фундаментальна властивість поля $\vec{g}$ описується рівнянням (3.20), і воно полягає в тому, що потік цього поля через будь-яку замкнену поверхню характеризує кількість маси в об'ємі V , обмеженому цією поверхнею. Обидва рівняння – (3.20) і (3.23) – являють систему рівнянь поля тяжіння в інтегральній формі:

$$\oint_L \vec{g} d\vec{l} = 0 \text{ і } \oint_S \vec{g} dS = -4\pi Gm, \quad (3.24)$$

тут m – повна маса в об'ємі V .

Оскільки ця система не містить похідних поля, вона виконується в будь-якій точці, включаючи межі середовищ з різною густиною.

Ці рівняння можуть розглядатися як зв'язки між значеннями поля $\vec{g}$ в різних точках простору, що розташовані на будь-якій відстані одна від одної, і, відповідно, вони є інтегральними рівняннями відносно поля $\vec{g}$.

Далі ми отримуємо систему рівнянь поля в диференціальній формі, тобто зв'язок між значеннями поля і густиною мас в околиці однієї і тієї ж точки.

Припустимо для початку, що ця точка регулярна і, таким чином, поле має перші похідні в цій точці. Використовуючи визначення ротора і дивергенції, ми отримаємо систему рівнянь в регулярних точках:

$$\text{rot } \vec{g} = 0, \text{ і } \text{div } \vec{g} = -4\pi G\delta, \quad (3.25)$$

де δ – об'ємна густина в точці, а в точках, де немає мас, $\text{div } \vec{g} = 0$.

Розглянемо фізичний і математичний зміст цих рівнянь. Перше рівняння ясно показує, що поле тяжіння не має вихорів і, відповідно, робота, що здійснюється цим полем, не залежить від шляху. Іншими словами, циркуляція поля дорівнює нулю. Водночас друге рівняння показує, що поле $\vec{g}$ створюється тільки джерелами (масами). Для ілюстрації розглянемо ці рівняння в декартовій системі координат:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ g_x & g_y & g_z \end{vmatrix} = 0, \quad \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z} = -4\pi G\delta.$$

Відповідно, замість першого рівняння отримаємо:

$$\frac{\partial g_z}{\partial y} = \frac{\partial g_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial g_x}{\partial z} = \frac{\partial g_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial g_x}{\partial y} = \frac{\partial g_y}{\partial x}. \quad (3.26)$$

Таким чином, ми маємо справу з системою з чотирьох диференційних рівнянь першого порядку і, взагалі кажучи, є чотири невідомі функції g_x, g_y, g_z і δ .

Якщо розподіл мас відомий, тоді немає необхідності використовувати систему (3.25), для того, щоб знайти поле. Дійсно, це завдання вирішується за допомогою інтегрування, використовуючи рівняння (3.1):

$$\vec{g}(A) = -G \int \delta(B) \frac{\vec{R}}{R^3} dV \quad (3.27)$$

Як випливає з рівняння (3.27), існує зв'язок між різними компонентами поля, і він вказує на те, що кожна компонента поля містить одні й ті ж відомості про розподіл мас. Зауважимо, що рівняння (3.27) прямо випливає з рівняння (3.26). За визначенням, маємо:

$$g_x(A) = -G \int \frac{\delta(B)(x_A - x_b)}{R^3} dV,$$

$$g_y(A) = -G \int \frac{\delta(B)(y_A - y_b)}{R^3} dV,$$

$$g_z(A) = -G \int \frac{\delta(B)(z_A - z_b)}{R^3} dV.$$

Обчислюючи відповідні похідні, ми знову приходимо до рівнянь (3.27). Система (3.27) записана для точки, в якій густина визначена. Проте є винятки, наприклад, межа між середовищами з різною густиною (рис. 3.5, в), оскільки в таких точках густина маси є функцією, яка зазнає розриву. Скориставшись тепер рівнянням (3.24), легко вивести поверхневий аналог рівняння (3.25).

Обчислимо циркуляцію вздовж шляху, зображеного на (рис. 3.5, в. З рівняння (3.23) випливає:

$$\vec{g}_2 d\vec{l}_2 + \vec{g}_1 d\vec{l}_1 = 0, \quad (3.28)$$

оскільки зміщення $d\vec{l}$ малі, інтеграли можуть бути замінені на скалярний добуток поля і зміщення, в той час як інтеграли по ділянках шляху h , які перпендикулярні до поверхні, перетворюються в нуль, коли h прямує до нуля. Враховуючи, що

$$d\vec{l}_2 = -d\vec{l}_1,$$

отримуємо

$$g_{2t}dt - g_{1t}dt = 0 \text{ або } g_{1t} = g_{2t}, \quad (3.29)$$

де g_t – тангенціальна компонента поля.

Рівняння (3.29) – це поверхневий аналог першого рівняння для поля тяжіння, і воно показує, що тангенціальна компонента $\vec{g}$ є безперервною функцією на межі середовищ з різними густинами. Розглянемо елементарний циліндр навколо деякої точки B на цій поверхні (рис. 3.5, г). Тоді, застосовуючи рівняння (3.20), маємо:

$$\vec{g}_2 dS_2 + \vec{g}_1 dS_1 + \int_{S_1} \vec{g} d\vec{S} = -4\pi Gm,$$

де

$$dS_2 = dS\vec{n} \text{ і } dS_1 = -dS\vec{n}$$

а S – бокова поверхня циліндра, $\vec{n}$ – одиничний вектор, спрямований від внутрішньої сторони поверхні до зовнішньої.

На межі, коли висота циліндра прямує до нуля, маса m також перетворюється в нуль, і це дає

$$g_{2n} = g_{1n} \quad (3.30)$$

Останнє рівняння – це поверхневий аналог другого рівняння поля. Таким чином, обидві компоненти неперервні на межі (рис. 3.5, г).

Відзначимо, що всі рівняння виводяться із закону тяжіння Ньютона, і в них не міститься більше інформації, ніж у цьому законі. Водночас розглянуті вище висновки дозволяють краще зрозуміти загальні властивості поля і часто дозволяють отримати деяке спрощення при вирішенні прямої та оберненої задач гравіметрії.

3.5. РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА І ПУАССОНА

Як говорилося вище, рівняння (3.25) – досить складна система диференціальних рівнянь, і було б природно спробувати замінити її набагато більш простими рівняннями. Це перший аргумент на користь введення потенціалу поля притягання. Скористаємося рівністю

$$\text{rot grad } U = 0,$$

і перше рівняння системи (3.25) перетворюється на

$$\vec{g}(A) = \text{grad } U. \quad (3.31)$$

Таким чином, ми виразили векторне поле $\vec{g}$ через скалярну функцію $U(A)$ за допомогою досить простої операції:

$$\vec{g}(A) = \frac{1}{h_1} \frac{\partial U}{\partial x_1} \vec{i}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} \vec{i}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} \vec{i}_3, \quad (3.32)$$

де h_1, h_2, h_3 , – метричні коефіцієнти, x_1, x_2, x_3 , – координати точки спостереження, а $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$ – одиничні вектори системи координат. Наприклад для декартової системи координат $h_1 = h_2 = h_3 = 1$, а одиничні вектори збігаються з $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Відповідно,

$$\text{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}.$$

Ясно, що рівняння (3.31) визначає потенціал U з точністю до сталої, оскільки $\text{grad} C = 0$, тобто одне і те ж поле $\vec{g}$ описується нескінченним числом потенціалів. Тому правильно розглядати потенціал як допоміжну функцію, що вводиться в основному для того, щоб спростити аналіз більш складного поля $\vec{g}$.

Наступний крок очевидний: необхідно знайти рівняння, що описує поведінку U . Щоб ввести потенціал, ми вже використали перше рівняння, $\text{rot} \vec{g} = 0$. Тепер, підставивши рівняння (3.30) в друге рівняння системи (3.22), отримуємо:

$$\text{div} \text{grad} U = -4\pi G \delta \quad \text{або} \quad \nabla^2 U = -4\pi G \delta. \quad (3.33)$$

Таким чином, ми отримали рівняння Пуассона і, як добре відомо, (3.31) може бути представлено в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial U}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} \right) \right] \\ = -4\pi G \delta \end{aligned}$$

Водночас, поблизу точок, в яких немає мас ($\delta=0$), замість рівняння (3.31) ми одержимо рівняння Лапласа

$$\nabla^2 U = 0. \quad (3.34)$$

І рівняння Пуассона, і рівняння Лапласа описують поведінку потенціалу в регулярних точках, в яких існують перші похідні поля сили тяжіння.

Щоб охарактеризувати поведінку потенціалу на межі середовищ з різними густинами, застосуємо рівняння (3.30), згідно з яким компонента поля вздовж якого-небудь напрямку l дорівнювала похідній потенціалу по цьому напрямку:

$$g_l = \frac{\partial U}{\partial l}. \quad (3.35)$$

Таким чином, в якості аналога рівняння поля на поверхні ми отримуємо:

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} = \frac{\partial U_1}{\partial t} \quad \text{і} \quad \frac{\partial U_2}{\partial n} = \frac{\partial U_1}{\partial n}, \quad (3.36)$$

де U_1 і U_2 – значення потенціалу на внутрішній і зовнішній поверхнях відповідно. Очевидно, що неперервність тангенціальних похідних потенціалу впливає з неперервності самого потенціалу, тому перше рівняння системи (3.34) може бути замінено на більш просте:

$$U_1 = U_2. \quad (3.37)$$

Відзначимо, що рівняння нормальних похідних не впливає з неперервності потенціалу, оскільки нормальні похідні залежать також від значень потенціалу під і над поверхнею [99, 104]. Таким чином, поведінка потенціалу представляється системою рівнянь, що має вигляд:

$$\nabla^2 U = -4\pi G\delta \quad \text{і} \quad U_1 = U_2; \quad \frac{\partial U_2}{\partial n} = \frac{\partial U_1}{\partial n} \quad (3.38)$$

Звичайно, система рівнянь поля притягання суттєво складніша за рівняння потенціалу. Тому необхідно зробити наступне зауваження. В усіх геофізичних методах поля, такі як зміщення частинок, що створюються пружними хвилями, сталі і змінні у часі електричні і магнітні поля, можуть бути виражені через скалярні або векторні потенціали (або через скалярні та векторні потенціали одночасно). Відповідно, всі такі методи можуть бути названі потенціальними, і в цьому розумінні метод гравіметрії не є виключенням.

3.6. ПОТЕНЦІАЛ ТА ЙОГО ЗВ'ЯЗОК З МАСАМИ

Встановимо зв'язок між потенціалом U та масами. Розглянемо спочатку елементарну масу $dm = \delta dV$. У відповідності з (3.4) маємо:

$$\vec{g}(A) = -G \frac{dm}{R^3} \vec{R} = G dm \text{grad}_A \frac{1}{R}, \quad (3.39)$$

оскільки

$$\frac{\vec{R}}{R^3} = -\text{grad}_A \frac{1}{R},$$

де індекс A означає, що градієнт розглядається поблизу точки A .

Порівнюючи (3.30) та (3.37), можна стверджувати, що функція U , що відповідає полю елементарної маси, що знаходиться в точці B , дорівнює

$$U(A) = G \frac{dm}{R} + C, \quad (3.40)$$

оскільки якщо градієнти двох функцій рівні, вони можуть відрізнятись лише на константу.

З урахуванням того, що поле $\vec{g}$, створюване масою dm , прямує до нуля на нескінченності, природно покласти, що потенціал також зникає при $R \rightarrow \infty$. Тоді з рівняння (3.40) слідує, що $C = 0$, і отримуємо:

$$U(A) = G \frac{dm}{R}. \quad (3.41)$$

В подальшому, застосовуючи принцип суперпозиції, отримаємо вираз для потенціалу, що створюється об'ємним розподілом мас:

$$U(A) = G \int_V \frac{\delta(B)dV}{R}. \quad (3.42)$$

З рівнянь (3.2) та (3.40) ясно видно, що потенціал пов'язаний з масами більш простими співвідношеннями, ніж поле $\vec{g}$, і це друга причина доцільності введення потенціалу. Нарівні з об'ємними масами можна ввести інші типи мас, в результаті отримаємо:

$$U(A) = G \left[\int_V \frac{\delta(B)}{R} dV + \int_S \frac{\sigma(B)}{R} dS + \int_V \frac{\lambda(B)}{R} dl + \sum_i \frac{m_i(B)}{R} \right], \quad (3.43)$$

де m_i – елементарна маса, а σ і λ – відповідно поверхнева та лінійна густина.

Корисно розглянути ще одне застосування потенціалу, для цього розглянемо зміну цієї функції dU , поблизу деякої точки. Як відомо,

$$dU = \frac{\partial U}{\partial l_1} dl_1 + \frac{\partial U}{\partial l_2} dl_2 + \frac{\partial U}{\partial l_3} dl_3, \quad (3.44)$$

де dl_1, dl_2, dl_3 – елементарні зміщення вздовж координатних ліній x_1, x_2 і x_3 . Легко бачити, що права частина цього рівняння може бути переписана у виді скалярного добутку векторів:

$$d\vec{l} = dl_1 \vec{i} + dl_2 \vec{j} + dl_3 \vec{k}$$

і

$$\text{grad}U = \frac{\partial U}{\partial l_1} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial l_2} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial l_3} \vec{k}, \quad (3.45)$$

де $dl_1 = h_1 dx_1, dl_2 = h_2 dx_2, dl_3 = h_3 dx_3$.

Таким чином,

$$dU = d\vec{l} \text{grad}U = \vec{g} d\vec{l}. \quad (3.46)$$

Після інтегрування цього рівняння вздовж довільного шляху з кінцевими точками a і b отримаємо:

$$U(b) - U(a) = \int_a^b \vec{g} d\vec{l}. \quad (3.47)$$

Тобто інтеграл поля $\vec{g}$ вздовж шляху виражається у виді різниці значень потенціалу в кінцевих точках цього шляху. Звичайно, значно простіше обчислити різницю потенціалів в двох точках $U(b) - U(a)$, ніж здійснювати інтегрування, і цей факт показує, що одну перевагу використання потенціалу.

3.7. ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯНЬ ПУАССОНА ТА ЛАПЛАСА

Повернемося до рівнянь Пуассона та Лапласа, які описують поведінку потенціалу всередині та зовні мас. Раніше ми вже отримали вираз для потенціалу

$$U(A) = G \int_V \frac{\delta(B)dV}{R},$$

який справедливий для будь-якої точки. Таким чином, ця функція є розв'язком рівняння Пуассона всередині мас і задовольняє рівнянню Лапласа зовні мас. Якщо інтегрування виконується по всім масам, $U(A)$ представляє собою фундаментальний розв'язок цих рівнянь. Корисно показати другим способом, що $U(A)$ задовольняє цим рівнянням. Наприклад, у випадку, коли точка спостереження знаходиться зовні мас, тобто $A \neq B$, ми маємо:

$$U(A) = G \int_V \delta(B) \nabla_A^2 \frac{1}{R} dV,$$

де

$$\nabla_A^2 U(A) = \frac{\partial^2}{\partial x_A^2} \frac{1}{R} + \frac{\partial^2}{\partial y_A^2} \frac{1}{R} + \frac{\partial^2}{\partial z_A^2} \frac{1}{R}$$

та

$$R^{-1} = [(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2]^{-\frac{1}{2}}.$$

Беручи першу та другу похідні, знаходимо:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_A^2} \frac{1}{R} = -\frac{1}{R^3} + 3(x_A - x_B)^2 \frac{1}{R^5};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y_A^2} \frac{1}{R} = -\frac{1}{R^3} + 3(y_A - y_B)^2 \frac{1}{R^5};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z_A^2} \frac{1}{R} = -\frac{1}{R^3} + 3(z_A - x_B)^2 \frac{1}{R^5},$$

тобто

$$\nabla^2 \frac{1}{R} = 0$$

і відповідно, лапсасіан потенціалу дорівнює нулю, там, де $A \neq B$.

Аналогічно, але враховуючи вплив мас, в околиці точки B , пізніше покажемо, що $U(A)$ задовольняє рівнянню Пуассона всередині мас.

За визначенням, лапсасіан U є дивергенцією поля притягання, і відповідно, його величина характеризує густину мас в цій же точці. Виникає наступне питання: що говорить нам лапсасіан про поведінку потенціалу?

Для відповіді на це питання розглянемо для початку найпростіший випадок, коли U залежить від одного аргументу x (рис. 3.6, а). Тоді ми можемо представити похідні в вигляді

$$\frac{dU(x)}{dx} = \frac{1}{\Delta x} \left[U\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - U\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right) \right]$$

та

$$\frac{d^2 U(x)}{dx^2} = \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\partial U\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\partial x} - \frac{\partial U\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right)}{\partial x} \right]. \quad (3.48)$$

Оскільки

$$\frac{dU\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{dx} = \frac{1}{\Delta x} [U(x + \Delta x) - U(x)]$$

$$\frac{dU\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right)}{dx} = \frac{1}{\Delta x} [U(x) - U(x - \Delta x)],$$

отримуємо:

$$\frac{d^2 U(x)}{dx^2} = \frac{1}{\Delta x^2} [U(x + \Delta x) + U(x - \Delta x) - 2U(x)] \quad (3.49)$$

або

$$\frac{d^2 U(x)}{dx^2} = \frac{2}{(\Delta x)^2} [U^{av}(x) - U(x)]. \quad (3.50)$$

В останньому рівнянні $U^{av}(x)$ – середня величина потенціалу в точці A :

$$U^{av}(A) = \frac{U(x+\Delta x) + U(x-\Delta x)}{2}. \quad (3.51)$$

Таким чином, перша похідна визначає швидкість зміни функції $U(x)$, тоді як друга похідна показує, наскільки її середня величина відрізняється від значення цієї функції в тій же точці.

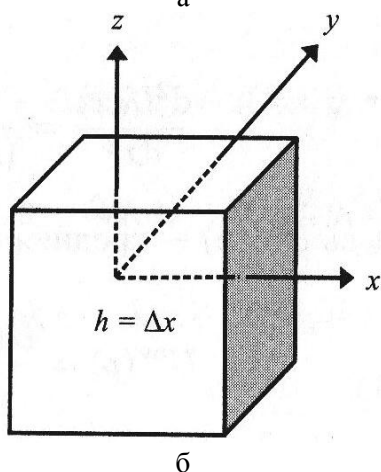
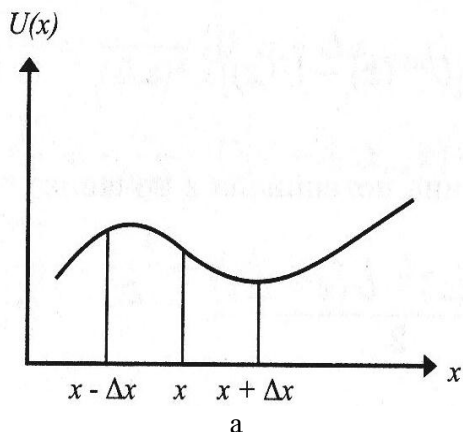


Рис. 3.6. Ілюстрація розв'язку рівнянь Пуассона та Лапласа
а – ілюстрація рівняння (3.51), б – елементарний куб навколо
точки x, y, z за [99]

Наприклад, якщо $U''(x) < 0$, то маємо $U(x) > U^{av}(x)$ та має місце максимум. Припустимо надалі, що в деякому окресті x середнє значення функції співпадає в кожній точці зі значенням цієї функції

$$U^{av}(x) = U(x), \quad (3.52)$$

і значить

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = 0. \quad (3.53)$$

Останнє рівняння представляє найпростіший клас функцій в одновимірному випадку, а саме лінійні функції, для яких виконується рівність (3.51).

Відповідно, можна сказати, що друга похідна – міра того, наскільки функція відрізняється від лінійної в окресті деякої точки. Іншими словами, друга похідна характеризує кривизну лінії, що описує функцію.

Для того, щоб узагальнити цей аналіз для тривимірного випадку, уявимо собі елементарний куб в окресті деякої точки $A(x, y, z)$, сторони якого направлені вздовж координатних осей (рис. 3.6, б). Довжина кожної сторони дорівнює $2h$. У відповідності з рівнянням (3.48) другі похідні вздовж координатних осей дорівнюють

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \frac{1}{\Delta x^2} [U(x + \Delta x, y, z) + U(x - \Delta x, y, z) - 2U(x, y, z)], \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= \frac{1}{\Delta y^2} [U(x, y + \Delta y, z) + U(x, y - \Delta y, z) - 2U(x, y, z)], \\ \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} &= \frac{1}{\Delta z^2} [U(x, y, z + \Delta z) + U(x, y, z - \Delta z) - 2U(x, y, z)] \end{aligned} \quad (3.54)$$

З урахуванням того, що $\Delta x = \Delta y = \Delta z = h$, та підставивши рівняння (3.52) у вираз для лапласіана

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \nabla^2 U,$$

отримаємо

$$\nabla^2 U = \frac{1}{h^2} [\sum_{i=1}^6 U_i - 6U(A)],$$

або

$$\nabla^2 U = \frac{1}{h^2} [\sum_{i=1}^6 U_i / 6 - U(A)]. \quad (3.55)$$

В наведеному рівнянні U_i – величина потенціалу на i -тій стороні куба, а $U(A)$ – його величина в центрі куба. Очевидно, що член

$\sum_{i=1}^6 U_i/6$ представляє собою середнє значення потенціалу в точці A . Тому лапласіан може бути записаний у вигляді

$$\nabla^2 U = \frac{1}{h^2} [U^{av}(A) - U(A)], \quad (3.56)$$

тобто він знову є мірою різниці між середнім значенням функції U та її середнім значенням в тій же точці. Наприклад, якщо середнє значення перебільшує значення функції, то лапласіан додатний. У випадку гравітаційного поля лапласіан завжди від'ємний, тобто $U(A) > U^{av}(A)$, що слідує з того, що права частина рівняння (3.31) від'ємна, якщо $\delta \neq 0$. Використовуючи рівняння (3.54), отримаємо просту форму рівняння Лапласа:

$$U^{av}(A) - U(A) = 0. \quad (3.57)$$

Отже, якщо функція U задовольняє рівнянню Лапласа, їй притаманна цікава властивість, а саме її середнє значення, що обчислене біля деякої точки A , в точності співпадає зі значенням функції в цій же точці. Тільки визначений клас функцій має цю властивість, і ці функції називаються гармонічними. Відповідно, можна стверджувати, що потенціал поля притягання – гармонічна функція поза масами. У відповідності з рівнянням Лапласа, сума других похідних вздовж координатних осей x, y, z дорівнює нулю за умови, що $U(A)$ гармонічна функція. В той же час відомо, що в одномірному випадку існує клас функцій, для яких друга похідна дорівнює нулю, тобто

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = 0.$$

З цього порівняння поведінки других похідних слідує, що природно розглядати гармонічні функції як аналог лінійних функцій і очікувати, що їм притаманні подібні властивості. Наведемо деякі з цих властивостей.

1. Зрозуміло, що якщо значення лінійної функції відомі в кінцевих точках деякого інтервалу по x , їх можна обчислити. І в будь-якій точці всередині інтервалу. Аналогічно, якщо гармонічна функція задана в кожній точці граничної поверхні деякого об'єму, її значення можуть бути визначені в кожній точці об'єму.

2. Якщо лінійна функція має рівні значення в кінцевих точках інтервалу, то вона має ті ж значення і всередині інтервалу, тобто лінійна функція стала. Аналогічно, якщо гармонічна функція має

одне й те ж саме значення в усіх точках граничної поверхні, то це ж значення буде у неї і в будь-якій точці всередині об'єму.

Природно, обидва твердження можуть бути доведені за допомогою теореми єдності поля притягання. Зробимо ще одне зауваження: лінійна функція досягає максимуму в кінцевій точці інтервалу. Ця ж властивість спостерігається й у випадку гармонічних функцій: вони не можуть мати екстремуму всередині об'єму. В протилежному випадку, середнє значення функції в деякій точці не співпадало б зі значенням самої функції в цій точці і, відповідно, лапласіан відрізнявся б від нуля. В той же час можуть існувати сідлові точки.

3.8. ТЕОРЕМА ЄДНОСТІ І РОЗВ'ЯЗОК ПРЯМОЇ ЗАДАЧІ

Припустимо, що розподіл мас всюди відомий. Тоді, як було показано раніше, потенціал поля має вид

$$U(A) = G \int_V \frac{\delta(B)}{R} dV, \quad (3.58)$$

і в регулярних точках ця функція задовольняє рівнянню Пуассона:

$$\Delta U = -4\pi G\delta. \quad (3.59)$$

Крім того потенціал і його перші похідні неперервні на межах, де об'ємна густина зазнає розриву. Очевидно, що в цьому випадку розв'язок прямої задачі єдиний. Розглянемо тепер зовсім іншу ситуацію, коли $\delta(B)$ задана лише всередині деякого об'єму V , який обмежений поверхнею S (рис. 3.7, а).

Оскільки розподіл мас зовні V невідомий, природно очікувати, що рівняння Пуассона визначає потенціал не єдиним чином, і для ілюстрації цього факту представимо його розв'язок у виді суми:

$$U(A) = U_i(A) + U_o(A), \quad (3.60)$$

де $U_i(A)$ та $U_o(A)$ – потенціали в об'ємі V , що створюються відповідно масами всередині і зовні V :

$$U_i(A) = -4\pi G\delta \text{ і } U_o(A) = 0. \quad (3.61)$$

Тоді можна записати:

$$\Delta U = \Delta(U_i + U_o) = \Delta U_i + \Delta U_o = -4\pi G\delta. \quad (3.62)$$

Це значить, що рівняння Пуассона визначає потенціал з точністю до гармонічної функції U_o . Незалежно від розподілу мас зовні

об'єму потенціал U_o залишається гармонічною функцією всередині V , і, відповідно, існує нескінченне число потенціалів, які задовольняють рівнянню (3.62), всі вони можуть бути представлені у виді

$$U(A) = G \int_V \frac{\delta dV}{R} + U_o(A), \quad (3.63)$$

де останній член в правій частині невідомий.

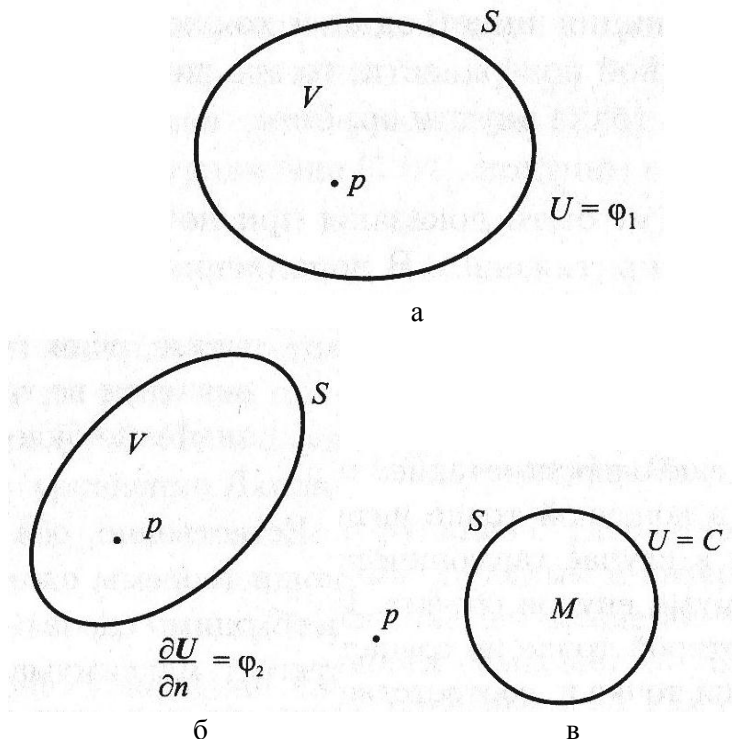


Рис. 3.7 Вирішення прямої задачі, коли $\delta(B)$ задана лише всередині деякого об'єму V , який обмежений поверхнею S

а – задача Діріхле, б – задача Неймана, в – крайова задача третього роду

Зрозуміло, що крім рівняння Пуассона нам необхідна додаткова інформація, яка дозволить нам знайти гармонічну функцію $U_o(A)$. Виявляється, що поведінка потенціалу на межі S дає цю інформацію,

яка називається граничними умовами. По суті, граничні умови вміщують дані про розподіл мас зовні об'єму V . Для того, щоб знайти ці умови, будемо виходити з теореми Гауса, яка слугує природним зв'язком між значеннями поля всередині об'єму та на межі:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{X} dV = \oint_S \vec{X} \cdot \vec{n} dS = \oint_S X_n dS, \quad (3.64)$$

де $\vec{n}$ – одиничний вектор, перпендикулярний поверхні S та спрямований зовні, X_n – нормальна компонента довільного векторного поля $\vec{X}$, неперервного в об'ємі V .

Як згадувалося раніше, рівняння (3.57) має нескінченну кількість розв'язків, виберемо будь-яку пару з них $U_1(A)$ і $U_2(A)$ і запишемо їхню різницю:

$$U_3(A) = U_2(A) - U_1(A). \quad (3.65)$$

Для виводу граничних умов введемо векторну функцію $\vec{X}(A)$:

$$\vec{X} = U_3 \operatorname{grad} U_3 = U_3 \nabla U_3. \quad (3.66)$$

Підстановка (2,64) в рівняння (3.62) дає:

$$\int_V \nabla(U_3 \nabla U_3) dV = \oint_S U_3 \nabla_n U_3 dS, \quad (3.67)$$

де $U_3 \nabla_n$ – компонента градієнта вздовж нормалі $\vec{n}$, тобто

$$U_3 \nabla_n = \frac{\partial U_3}{\partial n}. \quad (3.68)$$

Оскільки ∇ – диференціальний оператор, маємо:

$$\nabla(U_3 \nabla U_3) = U_3 \nabla^2 U_3 + \nabla U_3 \nabla U_3 = (\nabla U_3^2), \quad (3.69)$$

оскільки

$$\nabla^2 U_3 = \Delta U_3 = \Delta(U_2 - U_1) = -4\pi G\delta + 4\pi G\delta = 0.$$

З врахуванням рівнянь (3.66) і (3.67), можна переписати рівняння (3.65) у вигляді

$$\int_V \nabla(U_3)^2 dV = \oint_S U_3 \frac{\partial U_3}{\partial n} dS. \quad (3.70)$$

Це рівняння є частковим випадком теореми Гауса, що дозволить знайти декілька межових умов, що забезпечують єдність розв'язку прямої задачі.

Зробимо спочатку три зауваження:

- об'єм V може бути обмеженим декількома поверхнями;
- підінтегральний вираз об'ємного інтегралу в рівнянні (3.68) невід'ємний, цей факт відіграє дуже важливу роль при виведенні граничних умов;

- рівняння (3.59) зв'язує значення функції всередині об'єму V зі значеннями на поверхні границі S , і гармонічна функція U_3 – різниця двох довільних розв'язків рівнянь Пуассона.

Тепер ми готові сформулювати граничні умови для потенціалу поля притягання, які єдиним чином визначають це поле всередині об'єму V . Для цього припустимо, що поверхневий інтеграл в правій частині рівняння (3.70) дорівнює нулю. Тоді

$$\int_V (\nabla U_3)^2 = 0, \quad (3.71)$$

Та з врахуванням того, що підінтегральний вираз не може бути від'ємним, необхідно, щоб в кожній точці об'єму

$$\text{grad} U_3 = 0. \quad (3.72)$$

Це значить, що похідна функції U_3 за будь-яким напрямком l дорівнює нулю:

$$\frac{\partial u_3}{\partial l} = 0,$$

тобто функція стала, тому похідні розв'язків рівнянь Пуассона дорівнюють одне одному:

$$\frac{\partial U_1(A)}{\partial l} = \frac{\partial U_2(A)}{\partial l}.$$

Іншими словами, якщо поверхневий інтеграл в рівнянні (3.67) перетворюється в нуль, ці розв'язки можуть відрізнитися лише на сталу:

$$U_2(A) = U_1(A) + C, \quad (3.73)$$

де C – стала, тобто функція, що приймає одне і те ж значення в об'ємі V включаючи його поверхню. Також ця стала може бути нулем. Далі ми визначимо умови, за яких поверхневий інтеграл зникає:

$$\oint_S U_3 \frac{\partial U_3}{\partial n} dS = 0 \quad (3.74)$$

і, відповідно, рівняння (3.71) стає справедливим. Деякі з цих умов описані нижче.

3.8.1. Крайова задача першого роду

Припустимо, що потенціал $U(A)$ відомий на граничній поверхні, тобто

$$U(A) = \phi_1(A) \text{ на } S, \quad (3.75)$$

і ми розглядаємо розв'язок рівняння Пуассона, що задовольняє рівняння (3.73). припустимо, що існують два різних розв'язки цього

рівняння всередині об'єму $U_1(A)$ та $U_2(A)$, які співпадають на граничній поверхні:

$$U_1(A) = U_2(A) = \phi_1(A) \text{ на } S.$$

Тоді їх різниця $U_3(A)$ на цій поверхні перетворюється в нуль:

$$U_3(A) = 0 \text{ на } S$$

і, відповідно, поверхневий інтеграл в рівнянні (3.72) теж перетворюється в нуль. Тоді, в відповідності з рівнянням (3.71), розв'язки рівняння Пуассона, що задовольняють умові (3.73), можуть відрізнитися один від одного тільки на сталу. Більш того, ця стала відома і дорівнює нулю, оскільки на поверхні S всі розв'язки мають співпадати. Іншими словами, ми довели, що рівняння

$$\Delta U = -4\pi G\delta \text{ всередині } V$$

і

$$U(A) = \phi(A) \text{ на } S \quad (3.76)$$

визначають потенціал U єдиним чином, а поле притягання $\vec{g}$ також єдине, оскільки

$$\vec{g} = \text{grad} U.$$

Рівняння (3.76) описує крайову задачу Діріхле, яка може бути внутрішньою або зовнішньою (рис. 3.7, а) і має декілька важливих застосувань в теорії гравітаційного поля Землі. Необхідно відзначити, що в відповідності з рівнянням (3.73) можна сказати, що компонента поля g_t також відома вздовж будь-якого напрямку, що дотичний до граничної поверхні, оскільки $g_t = \frac{\partial v}{\partial t}$. Відповідно, крайова задача може бути переписана у виді: зв'язків, що відповідають різним розподілам мас, які розташовані зовні об'єму, що розглядається. Звичайно, можна уявити необмежену кількість варіантів розподілу мас і очікувати нескінченне число

$$\text{rot} \vec{g} = 0 \quad \text{div} \vec{g} = -4\pi G\delta$$

і

$$g_t = \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \text{ на } S \quad (3.77)$$

Цей перший випадок ілюструє важливість граничної умови. Дійсно, рівняння Пуассона або система рівнянь поля мають нескінченне число розв'язків різних полів всередині об'єму V . Іншими словами, рівняння Пуассона, або точніше, заданий розподіл густини в об'ємі V , дозволяє знайти потенціал, що створюється цими

масами, тоді як граничні умови (3.73) еквівалентні знанню про розподіл мас, розташованих зовні об'єму. Ясно, що якщо маси в об'ємі V відсутні, то потенціал U буде гармонічною функцією, що однозначно визначається з умов Діріхле.

3.8.2. Крайова задача другого роду

Припустимо, що два довільних розв'язки рівняння Пуассона в об'ємі V , $U_1(A)$ і $U_2(A)$ мають однакові нормальні похідні по поверхні S , тобто

$$\frac{\partial U_1}{\partial n} = \frac{\partial U_2}{\partial n} = \phi_2(A) \text{ на } S, \quad (3.78)$$

де $\phi_2(A)$ - відома функція.

З цього рівняння безперечно слідує, що нормальна похідна різниці цих розв'язків зникає на граничній поверхні:

$$\frac{\partial U_3}{\partial n} = 0 \text{ на } S.$$

Таким чином, поверхневий потенціал в рівнянні (3.68) як і в попередньому випадку, дорівнює нулеві і, відповідно, всередині об'єму ми маємо:

$$\nabla U_3 = 0.$$

Це значить, що будь-які розв'язки рівняння Пуассона, наприклад, $V_1(A)$ і $V_2(A)$ можуть відрізнятись один від одного в кожній точці об'єму V тільки на сталу, якщо їх нормальні похідні співпадають на граничній поверхні S . Тому ця крайова задача визначає поле притягання також єдиним чином і може бути записана як:

$$\nabla U_3 = -4\pi G \delta \text{ (всередині } V).$$

і

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \phi_2(A) \text{ на } S \quad (3.79)$$

або

$$\operatorname{rot} \vec{g} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{g} = -4\pi G \delta$$

і

$$g_n = \phi_2(A) \text{ на } S \quad (3.80)$$

та називається задачею Неймана.

На відміну від попереднього випадку рівняння (3.77) визначає потенціал з точністю до константи, а поле притягання визначається, звичайно, однозначно.

3.8.3. Крайова задача третього роду

Припустимо, що гранична поверхня S екіпотенціальна, тобто

$$U(A) = C$$

на граничній поверхні S , а C – деяка стала. В додаток до цього припускається, що відома повна маса в об'ємі V , який обмежений поверхнею S (рис. 3.7, с). Як слідує з теореми Гауса,

$$\oint_S \vec{g} d\vec{S} = \oint_S g_n ds = \oint_S \frac{\partial v}{\partial n} dS = -4\pi GM. \quad (3.81)$$

Це значить, що

$$\oint_S U_3 \frac{\partial U}{\partial n} dS = \phi_3,$$

де відома $\phi_3 = -4\pi GM$.

Покажемо, що розв'язки рівняння Пуассона, $U_1(A)$ і $U_2(A)$, що задовольняють рівнянням (3.79) і (3.80), можуть відрізнятися на сталу.

Розглянемо поверхневий інтеграл в рівнянні (3.67):

$$\oint_S U_3 \frac{\partial U_3}{\partial n} dS.$$

Оскільки гранична поверхня екіпотенціальна для обох потенціалів U_1 і U_2 , їх різниця також стала на цій поверхні, і відповідно, можна записати:

$$\oint_S U_3 \frac{\partial U_3}{\partial n} dS = U_3 \oint_S \frac{\partial U_3}{\partial n} dS = U_3 \left\{ \oint_S \frac{\partial U_2}{\partial n} dS - \oint_S \frac{\partial U_1}{\partial n} dS \right\} = 0,$$

і у відповідності з рівнянням (3.68) всередині об'єму ми маємо:

$$\nabla U_3 = 0 \quad \text{або} \quad U_2(A) = U_1(A) + C.$$

Таким чином, крайові умови (3.78) і (3.79) визначають потенціал всередині об'єму V з точністю до деякої сталої. Відповідно, крайова задача третього роду може бути сформульована наступним чином:

1. Всередині об'єму потенціал задовольняє рівнянню Пуассона:

$$\nabla U = -4\pi G\delta.$$

2. На різнєвій поверхні S , що обмежує об'єм, маємо:

$$\oint \frac{\partial u}{\partial n} dS = \Phi_3, \quad (3.82)$$

де Φ_3 задана і прямо пропорційна повній масі всередині об'єму. Якщо поверхня S включає також деякі поверхні, що віднесені на нескінченність, на яких потенціал прямує до нуля; тоді потенціал може бути визначений єдиним чином. Для поля маємо:

$$\operatorname{rot} \vec{g} = 0 \quad \operatorname{div} \vec{g} = -4\pi G\delta$$

і

$$\oint_S g_n dS = \Phi_3, \quad (3.83)$$

де g_n – нормальна компонента поля, та її величина співпадає з величиною повного поля, оскільки дотична компонента зникає на еквіпотенціальній поверхні.

Ця крайова задача відіграє фундаментальну роль в теорії гравітації. Щоб підтвердити цей факт, припустимо, що відомі форма рівневої поверхні S , що оточує Землю, і маса Землі. В той же час маси зовні поверхні S відсутні. Тоді розрахунки для крайової задачі третього роду показують, що ці дві умови однозначно визначають потенціал і відповідне поле. Іншими словами, незалежно від розподілу мас Землі її зовнішнє поле залишається сталим. Тому можна використовувати поле та його потенціал для вивчення фігури Землі. Єдність розв'язку цієї крайової задачі була доведена Стоксом і називається задачею Стокса. Доцільні наступні два зауваження:

1. Поле, що спостерігається зовні цієї рівневої поверхні, не дозволяє визначити розподіл мас, якщо відома тільки повна маса M ;
2. Єдність розв'язку задачі Стокса доводиться у випадку, коли відсутні маси зовні рівневої поверхні S ; проте, як було доведено, ця умова не обов'язково і, навіть, за присутності мас потік поля через поверхню S визначається тільки масами всередині неї.

3.8.4. Крайова задача четвертого роду

Припустимо, що в об'ємі V потенціал задовольняє рівнянню Пуассона

$$\Delta U = -4\pi G\delta$$

і в точках поверхні S відома лінійна комбінація потенціалу U та його нормальної похідної $\frac{\partial U}{\partial n}$:

$$p \frac{\partial U}{\partial n} + hU = m, \quad (3.84)$$

де p і h – додатні сталі, або функції точки:

$$p > 0 \text{ і } h = 0. \quad (3.85)$$

Якщо U_1 і U_2 є розв'язками рівняння Пуассона і задовольняють граничним умовам (3.82), їх різниця $U_3 = U_2 - U_1$ задовільняє рівнянню Лапласа та наступній умові на поверхні S :

$$p \frac{\partial U_3}{\partial n} + hU_3 = 0.$$

Помноживши останнє рівняння на U_3 , отримаємо:

$$pU_3 \frac{\partial U_3}{\partial n} \leq -hU_3^2. \quad (3.86)$$

Розглянемо тепер знову рівняння (3.68). Його ліва частина може бути тільки нулем або додатною тоді, як слідує з рівняння (3.84), вона від'ємна або нульова. Таким чином, рівняння (3.67) справедливо тільки тоді, якщо обидва інтеграли дорівнюють нулю і, відповідно, в усьому об'ємі V ми маємо:

$$\text{grad } U_3 = 0,$$

тобто два розв'язки цієї крайової задачі можуть відрізнитися тільки на сталу величину. Якщо об'єм V обмежений деякою поверхнею на нескінченності, де потенціал прямує до нуля, ця стала перетворюється в нуль.

Відзначимо, що ця крайова задача відіграє важливу роль при виводі формули Стокса, яка дозволяє отримати положення геоїда по відношенню до нормального (референц) еліпсоїду.

Можна сформулювати такі основні підсумки розділу:

1. Було сформульовано чотири типи граничних умов, для кожного з яких поле притягання в об'ємі V визначається однозначно.
2. Доведено, що об'єм може бути обмежений декількома поверхнями, і в кожній точці на них повинна бути задана одна з цих умов. Наприклад, потенціал може бути заданий на одній поверхні, а його нормальна похідна – на іншій.
3. Процедура визначення наведених умов, що заснована на застосуванні теореми Гаусса, називається теоремою єдності.

4. Крайова задача може бути як зовнішньою, так і внутрішньою, кожна гранична умова однаково може бути застосована в обох випадках.

3.9. ФОРМУЛА ГРІНА І СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ ПОТЕНЦІАЛОМ І ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ

По суті, теорема єдності формулює кроки, які необхідно виконати для знаходження поля притягання та його потенціалу. Ці кроки – наступні:

1. Розв'язок рівняння Пуассона.
2. Вибір серед розв'язків таких функцій, що задовольняють граничним умовам.

В той же час слід відзначити, що в сучасних числових методах розв'язку крайових задач, які базуються на заміні диференціальних рівнянь кінцевими різницями, ці кроки виконуються одночасно.

У відповідності з теоремою єдності поле всередині об'єму V визначається розподілом мас всередині цього об'єму та граничними умовами, відповідно, звичайно можна вивести рівняння, що встановлює цей зв'язок.

З цією метою будемо спиратися на теорему Гаусса:

$$\int_V \nabla \vec{X} dV = \oint \vec{X} d\vec{S}, \quad (3.87)$$

припускаючи, що векторна функція $\vec{X}(B)$ та її перші похідні існують в об'ємі V . Тут $\nabla \vec{X}$ – дивергенція векторного поля $\vec{X}$.

Визначимо вектор $\vec{X}$ за допомогою скалярних функцій $\phi(B)$ і $\psi(B)$ наступним чином:

$$\vec{X} = \phi(B) \nabla \psi(B, A) - \psi(B, A) \nabla \phi(B). \quad (3.88)$$

В останньому рівнянні ϕ і ψ – неперервні функції з неперервними першою та другою похідними, A – точка спостереження, в якій визначається потенціал, а B – довільна точка.

Підставляючи рівняння (3.88) в (3.87) і враховуючи те, що

$$\vec{X} d\vec{S} = X_n dS = \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS \text{ та}$$

$$\text{div } \vec{X} = \nabla \phi \nabla \psi + \phi \nabla^2 \psi - \nabla \psi \nabla \phi - \psi \nabla^2 \phi = \phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi,$$

отримаємо:

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV = \oint_S \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) d\vec{S}. \quad (3.89)$$

Це відношення називається другою формулою Гріна, воно є наслідком теореми Гаусса у випадку, коли вектор $\vec{X}$ задається рівнянням (3.88). Частково, поклавши $\psi = \text{const}$, отримаємо першу формулу Гріна:

$$\int_V \nabla^2 \varphi \, dV = \oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, dS. \quad (3.90)$$

Згадувалося раніше, наша мета полягає в тому, щоб виразити потенціал поля $U(A)$ в об'ємі V через маси всередині об'єму та значення потенціалу та його похідних на границі S ($S = S_1 + S_2$, (рис. 3.8). Для розв'язку цієї задачі скористаємося рівнянням (3.89), припустивши, що функція φ описує потенціал U , а функція $\psi = G(B, A)$ підпорядковується наступним умовам:

а) вона є розв'язком рівняння Лапласа

$$\nabla^2 G = 0 \quad (3.91)$$

скрізь, крім точки спостережень;

б) при наближенні до точки A ця функція прямує до нескінченності як

$$G(B, A) \rightarrow \frac{1}{R} \text{ при } R \rightarrow 0, \quad (3.92)$$

тут R - відстань між точками B і A .

Відзначимо, що $G(B, A)$ називається функцією Гріна. Існує нескінченне число таких функцій, і всі вони мають сингулярність в точці спостереження A . Оскільки друга формула Гріна була виведена в припущенні, що функції U і G не мають сингулярностей в об'ємі V , ми не можемо прямо використовувати цю функцію G в рівнянні (3.87). Щоб уникнути цих труднощів, окреслимо точку A невеликою сферичною поверхнею S^* і застосуємо рівняння (3.87) до об'єму, що обмежений поверхнями S та S^* , як показано на рис. 3.8.

Розглянемо випадки, коли в об'ємі V немає мас, тобто

$$\Delta V = 0. \quad (3.93)$$

З урахуванням рівнянь (1.99) та (1.101) об'ємний інтеграл у другій формулі Гріна дорівнює нулю, і тоді отримаємо:

$$\oint_S \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS + \oint_{S^*} \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS = 0. \quad (3.94)$$

Виходячи з цього рівняння, виведемо явний вираз для потенціалу U . Це значить, що нам доведеться винести функцію U за знак цього інтегралу. Для цього розглянемо медове значення другого інтегралу, коли радіус серединної поверхні r прямує до нуля. Оскільки як потенціал, так і його похідна неперервні в об'ємі, отримуємо:

$$U(B) \rightarrow U(A) \text{ та } \frac{\partial U(B)}{\partial n} \rightarrow \frac{\partial U(A)}{\partial n}.$$

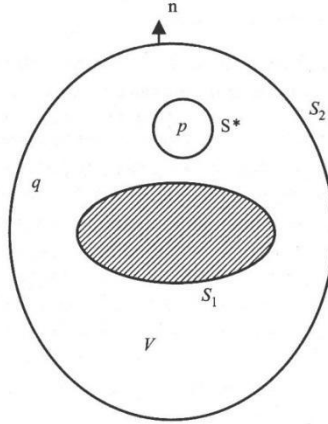


Рис. 3.8. Ілюстрація рівняння (3.94)

Тобто функції $U(B)$ та $\frac{\partial U(B)}{\partial n}$ на поверхні S^* наближаються до своїх значень в точці спостереження. Також, як видно на рис. 3.8, нормаль $\vec{n}$ і радіус-вектор $\vec{r}$ на цій поверхні мають протилежні один одному напрямки, і тому для точок на цій поверхні ми маємо:

$$G \rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{r} i \quad \frac{\partial G}{\partial n} \rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \quad \text{при } r \rightarrow 0.$$

Тоді, застосовуючи теорему про середнє, поверхневий інтервал навколо точки спостереження може біти представлено у вигляді:

$$\oint_{S^*} \left\{ U(B) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R} - \frac{1}{R} \frac{\partial U(B)}{\partial n} \right\} dS =$$

$$= \frac{1}{r^2} \oint_{S^*} U(B) dS - \frac{1}{r} \oint_{S^*} \frac{\partial U(B)}{\partial n} dS. \quad (3.95)$$

Члени рівняння в правій частині дорівнюють один одному

$$\frac{1}{r^2} \oint_{S^*} U(B) dS = \frac{U(A)}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi U(A)$$

і

$$\frac{1}{r} \oint_{S^*} \frac{\partial U(B)}{\partial n} dS = \frac{1}{r} \frac{\partial U(A)}{\partial n} 4\pi r^2 \rightarrow 0.$$

Таким чином, інтеграл по поверхні S^* на межі дорівнює:

$$\oint_{S^*} \left(U(B) \left(\frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U(B)}{\partial n} \right) \right) dS = 4\pi U(A). \quad (3.96)$$

Це самий важливий результат розрахунків, оскільки він дозволяє отримати вираз для потенціалу в будь-якій точці об'єму через значення на межі. Підстановка (3.96) в (3.94) дає:

$$U(A) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ G(B, A) \frac{\partial U(B)}{\partial n} - U(B) \frac{\partial G(B, A)}{\partial n} \right\} dS. \quad (3.97)$$

В останньому рівнянні B – точка на граничній поверхні, A – точка спостереження.

Таким чином, щоб визначити потенціал, необхідно знати як потенціал, так і його нормальну похідну на поверхні S . В той же час, як слідує з крайових задач першого і другого роду, для визначення потенціалу досить знайти тільки одну з цих величин на поверхні S . Це уявне протиріччя може бути легко вирішено належним вибором функції Гріна, що буде показано надалі.

Спочатку ми припускали, що в об'ємі V немає мас і, відповідно, рівняння (1.105) описує потенціал поля притягання, який створений масами, розташованими зовні об'єму V . Припустимо тепер, що в цьому об'ємі є маси та їх розподіл характеризується густиною δ . Тоді, застосовуючи принцип суперпозиції, отримаємо:

$$U(A) = G \int_V \frac{\delta(B)}{R} dV + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ G(B, A) \frac{\partial U(B)}{\partial n} - U(B) \frac{\partial G(B, A)}{\partial n} \right\} dS. \quad (3.98)$$

3.10. АНАЛІТИЧНЕ ПРОДОВЖЕННЯ ПОЛЯ В ВЕРХНІЙ НАПІВПРОСТІР

Розглянемо як приклад застосування рівняння

$$U(A) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ G(B, A) \frac{\partial U(B)}{\partial n} - U(B) \frac{\partial G(B, A)}{\partial n} \right\} dS \quad (3.99)$$

для розрахунку поля в верхньому напівпросторі (рис. 3.9).

Відзначимо, що ця процедура іноді застосовується для зменшення геологічного шуму. Беремо до уваги, що в верхньому

напівпросторі (над поверхнею Землі S_0) відсутні маси, потенціал задовольняє рівнянню Лапласа $\Delta U = 0$.

Припустимо, що на площині S_0 відома вертикальна компонента поля притягання, тобто похідна $\frac{\partial U}{\partial n}$. Оскільки ми розглядаємо поле, що створено масою обмеженого тіла, на досить значних відстанях від S_0 поле стає малим і, відповідно, можна припустити, що потенціал U прямує до нуля на півсфері з нескінченно великим радіусом ($r \rightarrow \infty$). Оскільки $g_z = \frac{\partial U}{\partial z}$, рівняння (3.97) приймає вигляд:

$$U(A) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} \left\{ G(B, A) g_z - U(B) \frac{\partial G(B, A)}{\partial z} \right\} dS + \\ \frac{1}{4\pi} \oint_{S_r} \left\{ G(B, A) g_r - U(B) \frac{\partial G(B, A)}{\partial r} \right\} dS,$$

де вісь z направлена вниз, а g_r – нормальна компонента поля на сферичній поверхні радіуса r .

Далі ми припустимо, що зі збільшенням радіуса r напівсферичної поверхні функція G зменшується, як і потенціал, в крайньому випадку обернено пропорційно до r , а їх похідні $\frac{\partial U}{\partial r}$ та $\frac{\partial G}{\partial r}$ прямують до нуля як r^{-2} . Відповідно, підінтегральний вираз у другому інтегралі зменшується як r^{-3} і, використовуючи теорему про середнє, отримуємо:

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{S_r} \left\{ G(B, A) g_r - U(B) \frac{\partial G(B, A)}{\partial r} \right\} dS \rightarrow \\ \rightarrow \frac{C}{r^3} \oint_{S_r} dS = \frac{C}{r^3} 4\pi r^2 \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty,$$

де C – деяка стала.

Таким чином, вираз для потенціалу має вигляд:

$$U(A) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} \left\{ G(B, A) g_z - U(B) \frac{\partial G(B, A)}{\partial z_B} \right\} dS. \quad (3.100)$$

Ця формула для обчислення потенціалу поля в будь-якому місці верхнього напівпростору, якщо потенціал і вертикальна компонента поля притягання відомі на поверхні Землі S_0 .

Беручи похідну від обох частин рівняння (3.98), отримаємо вертикальну компоненту поля притягання в точці A :

$$g_z(A) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} \left\{ g_z(B) \frac{\partial G}{\partial z_B} - U(B) \frac{\partial^2 G}{\partial z_A \partial z_B} \right\} dS, \quad (3.101)$$

де z_A і z_B – позначають, що похідні функції Гріна беруться по координаті z в околицях точок A і B відповідно. Як вже було

показано, існує нескінченне число функцій Гріна. Найпростіша з них:

$$G(B, A) = \frac{1}{R}. \quad (3.102)$$

Дійсно, вона задовольняє рівнянню Лапласа скрізь крім точки A , оскільки вона з точністю до сталого множника описує потенціал точкової маси, що розташована в точці A . Вона також має особливість в цій точці та забезпечує нульове значення поверхневого інтегралу на напівсфері, коли її радіус r прямує до нескінченності. Відповідно, можна записати:

$$g_z(A) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} \left\{ g_z(B) \frac{\partial}{\partial z_B} \frac{1}{R} - U(B) \frac{\partial^2}{\partial z_A \partial z_B} \frac{1}{R} \right\} dS. \quad (3.103)$$

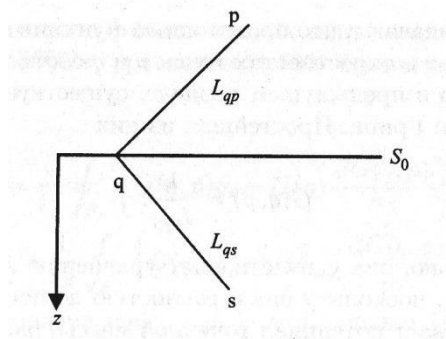


Рис. 3.9 Ілюстрація рівняння (3.103)

Проте, цей вираз непридатний до використання, оскільки потенціал U неможливо виміряти на поверхні Землі. Тому доводиться вибирати таку функцію Гріна, що похідна $\frac{\partial G}{\partial z}$ перетворюється в нуль на поверхні Землі. В цьому випадку рівняння (3.98) значно спрощується:

$$U(A) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} \{ G(B, A) g_z(B) \} dS, \quad (3.104)$$

де $g_z(B)$ – виміряна компонента поля на поверхні Землі, а $G(B, A)$ – невідома функція, що задовольняє наступним умовам:

1. У верхньому напівпросторі ($z > 0$) функція Гріна є розв'язком рівняння Лапласа скрізь крім точки спостереження A .

2. Вона має особливість виду $\frac{1}{R}$, тобто при наближенні до точки A

$$G(B, A) \rightarrow \frac{1}{R}.$$

3. На поверхні напівсфери вона зменшується зі збільшенням r в крайньому випадку як $\frac{1}{r}$.

4. На поверхні Землі похідна $\frac{\partial G(B, A)}{\partial z_B}$ перетворюється в нуль:

$$\frac{\partial G}{\partial z_B} = 0.$$

В таких випадках визначення функції $G(B, A)$, що задовольняє всім цим умовам, представляє собою розв'язок крайової задачі, і у відповідності з теоремою єдиності ці умови однозначно визначають функцію $G(B, A)$. Загалом, розв'язок цієї проблеми може бути складним, але є і винятки, наприклад, важливий випадок плоскої поверхні S_0 , для якої знайти функцію Гріна досить просто.

Введемо точку S , яка є дзеркальним відображенням точки A по відношенню до площини земної поверхні та розглянемо функцію $G_1(B, A, S)$, яка дорівнює

$$G_1(B, A, S) = \frac{1}{R_{BA}} + \frac{1}{R_{BS}}, \quad (3.105)$$

де B – точка на земній поверхні, а

$$R_{BA} = [(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$R_{BS} = [(x_B - x_S)^2 + (y_B - y_S)^2 + (z_B - z_S)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Обчислюючи похідну $\frac{\partial G_1}{\partial z_B}$, отримаємо:

$$\frac{\partial G_1}{\partial z_B} = -\frac{z_B - z_A}{R_{BA}^3} - \frac{z_B - z_S}{R_{BS}^3}.$$

Оскільки в кожній точці земної поверхні

$$z_B = 0 \text{ та } z_A = -z_S, \text{ а } R_{BA} = R_{BS},$$

похідна $\frac{\partial G_1}{\partial z_B}$ дорівнює нулю. Очевидно, що інші умови також виконуються. Тому в відповідності до рівняння (3.102) ми отримуємо для потенціалу та для вертикальної компоненти поля притягання в точці A :

$$U(A) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} \{G_1 g_z(B)\} dS \quad \text{і}$$

$$g_z(A) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} \left\{ g_z(B) \frac{\partial G_1}{\partial z_B} \right\} dS, \quad (3.106)$$

де

$$\frac{\partial G_1}{\partial z_B} = \frac{z_A}{R^3}.$$

Рівняння (3.104) дозволяє обчислити вертикальну компоненту поля у верхньому напівпросторі, якщо вона відома на поверхні Землі. Відповідно, це перетворення називають аналітичним продовженням у верхній напівпростір, і воно використовується для зменшення впливу геологічного шуму, що викликається неоднорідностями відносно малих розмірів.

3.11. ІНТЕГРАЛ ПУАССОНА

Встановимо співвідношення між потенціалом $U(A)$ в будь-якій точці A об'єму V та його значеннями на сферичній поверхні, що оточує всі маси (рис. 3.10).

Ця задача відіграє фундаментальну роль в теоремі Стокса, яка дозволяє визначити перевищення геоїда по відношенню до нормального (референц) еліпсоїда.

Знову звернемося до формули Гріна:

$$U(A) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ G(B, A) \frac{\partial U(B)}{\partial n} - U(B) \frac{\partial G(B, A)}{\partial n} \right\} dS. \quad (3.107)$$

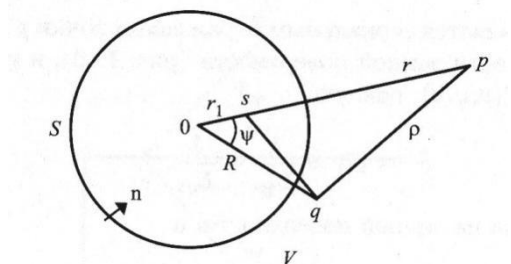


Рис. 3.10 Ілюстрація рівняння (3.107)

В цьому випадку одиничний вектор $\vec{n}$ і радіус-вектор $\vec{R}$ мають протилежні напрямки. Об'єм V обмежений поверхнею S і сферичною поверхнею нескінченно великого радіуса. При виводі цього рівняння ми припускаємо, що потенціал $U(A)$ – гранична

функція, а функція Гріна обирається таким чином, щоб можна було знехтувати другим інтегралом по поверхні, коли її радіус прямує до нескінченності. Підінтегральний вираз в (3.105) вміщує як потенціал, так і його похідні на сферичній поверхні S . Для розв'язку задачі необхідно знайти функцію Гріна в об'ємі V , яка була б рівна нулю в кожній точці межевої поверхні S :

$$G = 0. \quad (3.108)$$

Тоді отримаємо:

$$U(A) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S U(B) \frac{\partial G}{\partial n} dS. \quad (3.109)$$

У випадку плоскої межевої поверхні ми представили функцію Гріна як суму потенціалів, що створюються точковими масами, розташованими в точках B і s , які є дзеркальним відображенням одне одного відносно площини S . За аналогією представимо функцію Гріна у виді різниці:

$$G(A, B, s) = \frac{1}{\rho} - \alpha \frac{1}{sB}. \quad (3.110)$$

Тут s – точка, що розташована де-небудь всередині сфери на лінії OA , ρ і sB – відстані між точками B , A і s відповідно, а α – стала. Покажемо тепер, що для кожної точки спостереження A можна знайти таку точку s і коефіцієнт α , що формула Гріна буде дорівнювати нулю в усіх точках сфери.

Щоб це довести, виберемо спочатку положення точки s відповідно наступній умові:

$$r r_1 = R^2, \quad (3.111)$$

Тобто добуток відстаней від точок A і B до початку координат O дорівнює квадрату радіуса сфери. Наприклад, зі збільшенням відстані r точка s наближається до початку координат. Навпаки, коли точка A наближається до межі, точка s також рухається до цієї поверхні.

Далі розглянемо два трикутники sOB і sOA , що зображені на (рис. 3.10). Вони мають спільний кут ψ і сторони, що утворюють цей кут, пропорційні. Дійсно, з рівняння (3.109) маємо:

$$\frac{r}{R} = \frac{R}{r_1} \quad (3.112)$$

Таким чином, ці трикутники подібні, і маємо:

$$\frac{sB}{\rho} = \frac{r_1}{R} \quad \text{або} \quad \frac{1}{sB} = \frac{R}{\rho r_1}.$$

З врахуванням рівняння (3.110) останній вираз представляється у виді:

$$\frac{1}{sB} = \frac{R}{\rho} \frac{r}{R^2} = \frac{r}{\rho R'}$$

і рівняння (3.108-3.110) дають:

$$\alpha = \frac{r_1}{R},$$

а для точок в об'ємі V на поверхні S маємо:

$$G(A, B, s) = \frac{1}{\rho} - \frac{r_1}{R} \frac{1}{sB}. \quad (3.113)$$

Тут

$$\rho = (r^2 + R^2 - 2rR \cos \psi)^{\frac{1}{2}},$$

$$sB = (r_1^2 + R^2 - 2r_1R \cos \psi)^{\frac{1}{2}}.$$

Підстановка рівняння (3.113) в (3.109) дає:

$$U(A) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S U(B) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{r_1}{R} \frac{1}{sB} \right) dS. \quad (3.114)$$

Спочатку обчислимо похідні ρ^{-1} та $(sB)^{-1}$:

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{\rho} = -\frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{\rho} = \frac{R - r \cos \psi}{\rho^3}, \quad \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{sB} = -\frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{sB} = \frac{R - r_1 \cos \psi}{(sB)^3}.$$

Тому

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n} &= \frac{R - r \cos \psi}{\rho^3} - \frac{r_1}{R} (R - r_1 \cos \psi) \frac{R^3}{r_1^3 \rho^3} = \frac{1}{\rho^3} [(R - r \cos \psi) r_1^2 - (R - r_1 \cos \psi) R^2] \frac{1}{r_1^2} = \\ &= \frac{r^2}{R^4 \rho^3} \left[(R - r \cos \psi) \frac{R^4}{r^2} - (R - \frac{R^2}{r} \cos \psi) R^2 \right] = \\ &= \frac{1}{R^2 \rho^3} [R^3 - r \cos R^2 \cos \psi - R r^2 + R^2 r \cos \psi] = \\ &= \frac{1}{R \rho^3} (R^2 - r^2). \end{aligned}$$

Таким чином, рівняння (3.107) приймає вигляд:

$$U(A) = -\frac{1}{4\pi R} \oint_S U(B) \frac{R^2 - r^2}{\rho^3} dS = \frac{R^2 - r^2}{4\pi R} \oint_S U(B) \frac{dS}{\rho^3}, \quad (3.115)$$

і ми знайшли формулу, яка дозволяє визначити потенціал в об'ємі V за умови, що він відомий на поверхні S, тобто задача Діріхле вирішена.

3.12. ПОВЕДІНКА ПОЛЯ ПРИТЯГАННЯ

Розглянемо тепер поле притягання, що створюється різними розподілами мас та розглянемо найпростіший випадок.

3.12.1. Поле притягання сферичної маси

Нехай є однорідна сфера радіусу a . Приймаючи до уваги сферичну симетрію розподілу мас, природно перейти в сферичну систему координат з початком в центрі сфери (рис. 3.11, б). Тоді вектор $\vec{g}(A)$ можна охарактеризувати трьома компонентами:

$$g_R, g_\theta, g_\varphi.$$

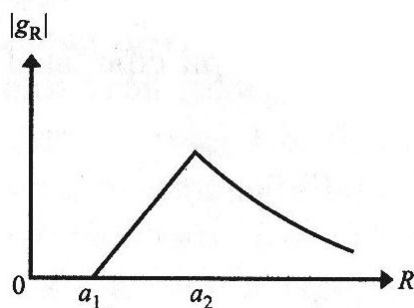
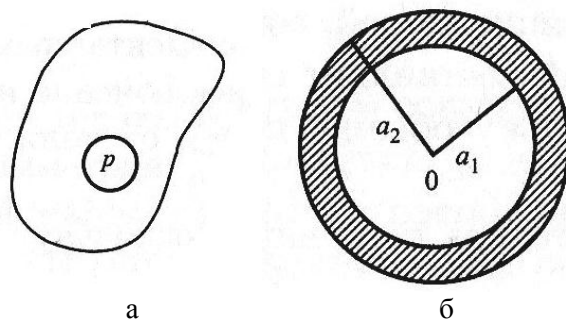
За визначенням, будь-яка площина $\theta = \text{const}$ є площиною симетрії. Іншими словами завжди знайдуться дві елементарні маси, що рівні одна одній і розташовані на протилежних сторонах цієї площини, але на рівних відстанях. Як можна бачити з (рис. 3.11, г, сума θ -компонент, що створюються цими двома масами, дорівнює нулю. Представляючи повну масу, як суму подібних пар, приходимо до висновку, що θ -компонента g_θ , що створена сферичною масою, відсутня в кожній точці всередині та зовні тіла.

Таким же чином можна довести, що $g_\varphi = 0$. Звичайно, цей факт може бути доведений і інтегруванням по об'єму в рівнянні (3.2), проте цей спосіб набагато складніший.

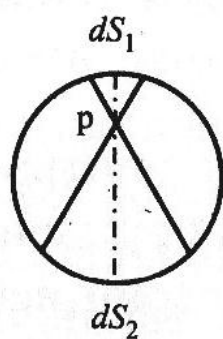
Таким чином, поле притягання має тільки радіальну компоненту g_R , і це поле направлено до початку координат O . Щоб визначити цю компоненту, будемо виходити з рівняння (3.18) та розглянемо сферичну поверхню радіусу R , як показано на (рис. 3.11, в). Оскільки $d\vec{S} = dS \vec{r}_R$ та скалярна компонента g_R - стала в точках сферичної поверхні, ми отримаємо потік:

$$\int_S \vec{g} d\vec{S} = g_R \int_S d\vec{S} = 4\pi R^2 g_R = -4\pi G M.$$

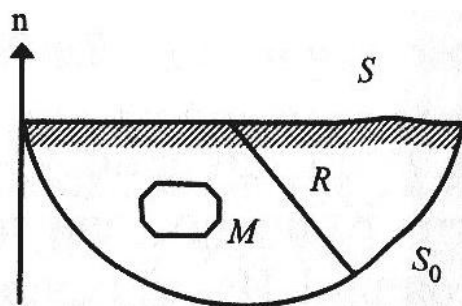
Таким чином, поле притягання g_R^0 зовні сфери дорівнює $g_R^0 = -G \frac{M}{R^2}$, якщо $R \gg a$. (3.116)



в



г



д

Рис. 3.11 Ілюстрація поведінки поля притягання за [99]

а – поле притягання і його потенціал всередині маси, б – сферична оболонка кінцевої товщини, в – поле притягання, що викликано масою оболонки, г – поле всередині оболонки, д – ілюстрація рівняння (1.135)

Тоді як всередині сфери ми отримуємо

$$g_R^i = -G \frac{m}{R^2}, \text{ якщо } R \ll a. \quad (3.117)$$

Тут m – маса, обмежена поверхнею інтегрування S . Як слідує з рівняння (3.116), зовнішнє поле співпадає з полем, що створюється точковим джерелом тієї ж маси M , що розташоване в центрі сфери. Це добре відомий результат, який важко було б передбачити.

Дійсно, подібна поведінка спостерігається незалежно від того, наскільки близько точка спостереження знаходиться до сфери, та є результатом суперпозиції полів, що створюються елементарними масами.

Цей випадок складає свого роду виняток із загального правила, оскільки звичайно поле відрізняється від поля точкової маси.

Розглянемо тепер поле всередині сфери. Оскільки

$$m = \frac{4\pi}{3} G \delta R^3,$$

отримаємо

$$g_R^i = -\frac{4\pi}{3} G \delta R. \quad (3.118)$$

І величина поля лінійно збільшується від центра сфери до її поверхні. Звичайно, вона не обернено пропорційна квадрату відстані! Внаслідок сферичної симетрії зрозуміло, що поле зникає в центрі O . Як слідує з рівняння (3.116), маси, що розташовані в інтервалі $O-R$, створюють таке ж поле, як і точкова маса в початку координат, в той час як маси між a і R не впливають на поле. Іншими словами, сумарне поле елементарних мас в цьому інтервалі дорівнює нулю.

Відзначимо, що як на поверхні сфери, так і в інших точках поле неперервне. Зокрема, якщо $R = a$, рівняння (3.117) та (3.118) дають:

$$g_R^0 = -\frac{4\pi}{3} G \delta a = g_R^i.$$

Звичайно, рівняння (3.117) та (3.118) можуть бути безпосередньо виведені з рівняння (3.2), але це вимагало б доволі громіздкого інтегрування. Цей приклад дозволяє також проілюструвати той факт, що поле притягання має кінцеві значення всередині будь-якої маси. Для цього представимо, що точка спостереження A розташована в центрі малої та однорідної сфери (рис. 3.11, а). Тоді повне поле може бути представлено у виді суми:

$$\vec{g}(A) = \vec{g}^i(A) + \vec{g}^o(A),$$

де $\vec{g}^i(A)$ та $\vec{g}^o(A)$ – поля, створювані відповідно масами всередині та зовні малої сфери. Оскільки поле $\vec{g}^i$ дорівнює нулю, а джерела поля $\vec{g}^o$ розташовані на малій (незначній), але кінцевій відстані від точки A , можна прийти до висновку, що поле $\vec{g}(A)$ має кінцеве значення всередині мас. Корисно також знайти вираз для потенціалу такого поля. Оскільки функція U зникає на нескінченності, почнемо розгляд із зовнішнього середовища $R > a$. Як слідує з рівняння (3.45),

$$U(R) = - \int_R^{-\infty} G \frac{M}{R^2} dR = G \frac{M}{R}, \quad R \geq a,$$

і, як і очікувалося, потенціал співпадає з потенціалом точкової маси. Зокрема, на поверхні сфери маємо:

$$U(A) = G \frac{4\pi}{3} \delta a^2,$$

оскільки сфера однорідна. Тепер, знаючи потенціал на поверхні, легко знайти його всередині сфери. Знову застосовуючи рівняння (3.45), отримаємо:

$$U(R) - U(a) = \int_a^R \vec{g}^i d\vec{R} = \frac{4\pi\delta}{3} G \int_a^R R dR = \frac{2\pi\delta}{3} G (a^2 - R^2).$$

Тому

$$U(R) = \frac{2\pi G \delta}{3} (3a^2 - R^2) \quad \text{при } R \leq a.$$

Таким чином, потенціал досягає максимуму в центрі сфери та спадає як параболічна функція. Зовні сфери спостерігається зовсім інша поведінка. Ця проста задача дозволяє знову продемонструвати, що потенціал підпорядковується рівнянню Пуассона.

Розглянемо потенціал в точці A довільного тіла (рис. 3.11, а), припускаючи, що густина може змінюватися від точки до точки. Умовно проведемо сферичну поверхню навколо точки A . Якщо її радіус досить малий, можна вважати цю сферу однорідною. Потенціал в точці A може бути записаний у виді:

$$U(A) = U^i(A) + U^o(A),$$

де $U^i(A)$ та $U^o(A)$ – потенціали, що створюються відповідно масами всередині та зовні сфери. Оскільки потенціал залежить тільки від координати R , отримуємо:

$$\Delta U = \Delta U^i(A) = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial U^i}{\partial R} \right) = -4\pi G \delta.$$

Підставляючи вираз для потенціалу U^i , що отриманий вище, бачимо, що він є розв'язком рівняння Пуассона.

Іншими словами, інтеграл

$$U(A) = G \int_V \frac{\delta(B)dV}{R}$$

задовольняє рівнянню Пуассона всередині мас, і це справедливо для довільного розподілу густини. Відзначимо також, що перший приклад в деякій мірі корисний при вивченні нормального притягання Землі. Розглянемо наступний приклад.

3.12.2. Поле притягання тонкого сферичного шару

Застосовуючи знову формулу Гауса та скориставшись сферичною системою координат, знаходимо, що всередині оболонки $R < a_1$ поле відсутнє, тоді як зовні оболонки $R > a_2$ воно поводить себе як поле точкового джерела, що розташоване в початку координат. Таким чином маємо:

$$g_R^i = 0 \text{ при } R < a_1 \text{ і } g_R^o = -G \frac{M}{R^2} \text{ при } R > a_2 \quad (3.119)$$

Видно, що підсумовування полів елементарних мас зовні оболонки дає той же результат, що і у випадку точкового джерела, що розташоване в центрі оболонки. Це другий приклад такої еквівалентності, і це знову виняток із загального правила. Розглянемо сферичну поверхню S радіуса $R = a_1 + r < a_2$. Тоді радіальна компонента всередині сфери дорівнює

$$g_R = -G \frac{m}{R^2}, \quad (3.120)$$

де m – маса, розташована всередині об'єму, обмеженого поверхнею S . Поклавши, що товщина оболонки $h = a_2 - a_1$ мала в порівнянні з a_1 , можна представити масу у виді

$$m = 4\pi R^2 r \delta.$$

Відповідно, замість рівняння (3.120) отримаємо

$$g_R = -4\pi G \delta r. \quad (3.121)$$

Поведінка g_R як функції від R показана на (рис. 3.11, в), і звичайно, це неперервна функція. Будемо тепер зменшувати товщину h і збільшувати об'ємну густину так, щоб маса залишалася сталою. Таким шляхом ми прийдемо до розподілу мас з поверхневою густиною, і ця зміна не змінює поле зовні оболонки, проте веде до розривності поля на поверхні мас. Покажемо, чому поле всередині оболонки ($R < a_1$) дорівнює нулю. Виберемо будь-

яку точку A (рис. 3.11, г) і сформуємо елементарний конус з вершиною у цій точці. Зовнішня поверхня конуса перетинає оболонку і утворює всередині неї дві елементарні поверхні dS_1 і dS_2 . За визначенням маємо:

$$dS_1 = \omega R_1^2 \quad dS_2 = \omega R_2^2,$$

де ω – тілесний кут, обмежений конусом. Таким чином, поля, що створюються елементарними масами цих поверхонь, дорівнюють

$$g_R^{(1)} = -G \frac{m}{R_1^2} = -G\delta\omega, \quad g_R^{(2)} = G \frac{m}{R_2^2} = G\delta\omega,$$

І вони компенсують одне одного. Оскільки оболонка може бути представлена як множина таких пар, видно, що повне поле всередині оболонки дорівнює нулю. Відзначимо, що потенціал сталий всередині оболонки, а зовні неї поводить себе як потенціал точкового джерела. Очевидно, що його еквіпотенціальні поверхні сферичні та їх центри співпадають з початком координат O .

3.12.3. Оцінка маси довільного тіла

Припустимо, що ми знаємо поле в точках на деякій площині і що воно створене довільним тілом, що розташоване під цією поверхнею спостереження. Припустимо також, що поле g_z (рис. 3.11, д) зникає на віддалі від тіла. Нижня частина простору – об'єм, в якому розташовані всі джерела, він обмежений площиною спостереження S і напівсферичною поверхнею S_0 відносно більшого радіуса, на якій поле може розглядатися як поле точкового джерела. Відповідно, потік через поверхню S_0 дорівнює:

$$\int_{S_0} \vec{g} d\vec{S} = -GM \frac{1}{R^2} \int_{S_0} d\vec{S} = -2\pi GM.$$

Тому потік через замкнену поверхню, що обмежує цей об'єм, виражається через поверхневий інтеграл по поверхні спостереження. Таким чином, маємо:

$$\oint \vec{g} d\vec{S} = -\int_S g_z dS - 2\pi GM = -4\pi GM \quad (3.122)$$

оскільки в площині спостережень

$$\vec{g} d\vec{S} = -g_z dS.$$

В останньому рівнянні g_z – величина вертикальної компоненти поля на поверхні S . Таким чином, ми знайшли масу, яка створює поле, і вона дорівнює:

$$M = \frac{1}{2\pi G} \int_S g_z dS. \quad (3.123)$$

3.12.4. Нормальна компонента поля притягання, що створена плоскими поверхневими масами

Припустимо, що маси розподілені в плоскому шарі, товщина якого набагато менша відстані від цих мас до точки спостереження (рис. 3.12, а). Іншими словами, відстані між точкою спостереження і будь-якою точкою елементарного об'єму практично співпадають. З урахуванням цього можна замінити цей шар плоскою поверхнею з цією ж масою, що розташована десь в середині шару (рис. 3.12, б).

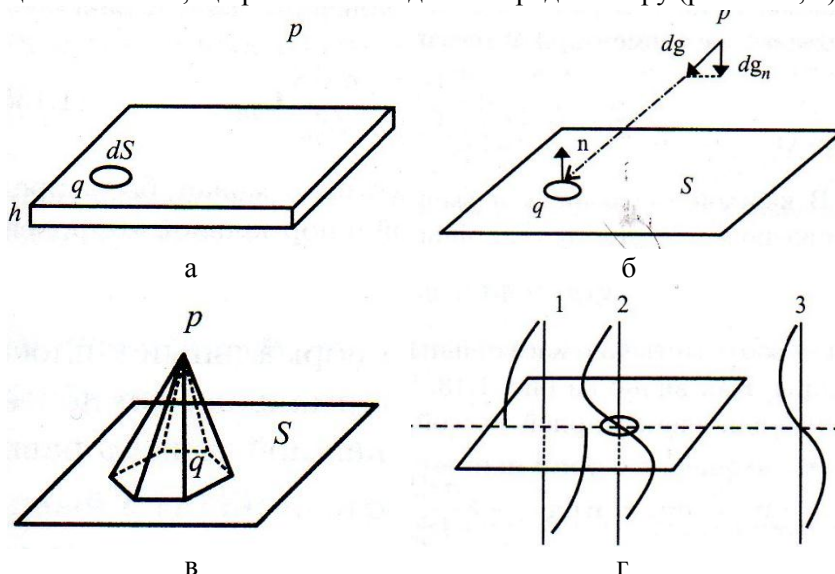


Рис. 3.12. Тонкий ар і поверхнева маса (а); нормальна компонента поля, що викликано поверхневими масами (б); ілюстрація ілесного куту поблизу поверхні (в) нормальна компонента вздовж профілей 1, 2 та 3 (г)з [99]

Оскільки кожний елементарний об'єм вміщує масу

$$dm = \delta(B) h dS,$$

її розподіл по поверхні може бути описаний виразом

$$dm = \sigma(B) dS,$$

де

$$\sigma(B) = \delta(B) h, \quad (3.124)$$

та $\sigma(B)$ – поверхнева густина мас.

Звичайно, кожний елемент поверхні S має таку ж масу, як і відповідний елементарний об'єм шару. Наступний крок полягає в знаходженні поля, створеного цими поверхневими масами. Насамперед, слід розрізнити верхню і нижню сторони поверхні S і виберемо напрямок нормалі $\vec{n}(B)$ в кожній точці поверхні від нижньої до верхньої сторони. Поле, що створене елементарною масою на поверхні dS , дорівнює:

$$d\vec{g}(A) = -G \frac{dn}{R^3} \vec{R} = -G \frac{\sigma dS}{R^3} \vec{R} \quad (3.125)$$

В кожній точці нижче і вище мас поле може бути представлено у вигляді суми тангенціальної і нормальної його компонент:

$$\vec{g}(A) = g_t \vec{t} + g_n \vec{n}, \quad (3.126)$$

де $\vec{t}$ і $\vec{n}$, - відповідно дотичний і нормальний до площини вектори. Як видно на рис. 3.12, б, нормальна компонента поля, що створюється елементарною масою, в кожній точці A дорівнює:

$$dg_n = \vec{n} d\vec{g} = -G \frac{\sigma dS}{R^3} \vec{R} \vec{n}. \quad (3.127)$$

Далі припустимо, що всі маси розподілені однорідно, тобто $\sigma = \text{const}$. Застосовуючи принцип суперпозиції, отримуємо нормальну компоненту поля, що створюється поверхневими масами:

$$g_n(A) = -\sigma G \frac{\vec{R} d\vec{S}}{R^3}, \quad (3.128)$$

оскільки $d\vec{S} = dS \vec{n}$.

Використовуючи той факт, що $\vec{R}_{AB} = -\vec{R}_{BA}$ та $R_{AB}^3 = R_{BA}^3$ для нормальної компоненти обираємо:

$$g_n(A) = \sigma G \int_S \frac{\vec{R} d\vec{S}}{R^3}. \quad (3.128)$$

Підінтегральний вираз описує тілесний кут, під яким ми бачимо елементарну ділянку поверхні з точки A . Відповідно, інтеграл в правій частині цього рівняння характеризує тілесний кут для всієї поверхні:

$$\omega(A) = \int_S \frac{\vec{R} d\vec{S}}{R^3}. \quad (3.129)$$

Таким чином, нормальна компонента поля притягання, що створюється рівномірно розподіленими по плоскій поверхні масами, може бути виражена як:

$$g_n(A) = \sigma G \omega(A). \quad (3.130)$$

В загальному випадку, коли густина нестала, з рівняння (3.127) слідує:

$$g_n(A) = G \int_S \sigma(B) d\omega(B, A). \quad (3.131)$$

Розглянемо поведінку нормальної компоненти g_n для деяких випадків.

Необмежена плоска поверхня

Тілесний кут, під яким площа видна з нижньої і верхньої сторони, не залежить від точки A і дорівнює, відповідно, $\pm 2\pi$. Іншими словами, рівномірно розділені на нескінченній поверхні маси створюють однорідне поле в обох напівпросторах:

$$g_z = -2\pi\sigma G, \text{ якщо } z > 0 \text{ та } g_z = 2\pi\sigma G, \text{ якщо } z < 0.$$

Тут маси розташовані на площині $z=0$, а вісь z направлена вздовж вектору нормалі $\vec{n}$. Видно, що незалежно від відстані до площини поле залишається одним й тим самим. Це може бути пояснено на якісному рівні наступним чином. Поле $g_n(A)$ є сумою нормальних компонент, що створюються всіма елементарними масами поверхні. Якщо точка A розташована надто близько до поверхні $z=0$, то найближчий елемент вносить основний внесок, оскільки він є видимим під тілесним кутом, який майже співпадає з $\pm 2\pi$ (рис. 3.12, в). В той же час кути для інших елементів занадто малі і, відповідно, їхні внески в цю компоненту поля малі так, що ними можна знехтувати. Зі збільшенням відстані від площини поле, що створене першим елементом, зменшується, але вплив більш віддалених елементів стає більшим.

Як було показано вище, ці два ефекти компенсують один одного, і поле не залежить від z . Цей результат буде використовуватися надалі при вивченні поля всередині і зовні шару кінцевої товщини. З рівняння (3.120) слідує, що

$$g^+ - g^- = -4\pi\sigma G. \quad (3.132)$$

де g^+ і g^- - величини поля над і під поверхнею. Цей розрив виникає внаслідок заміни об'ємних мас поверхневими. Оскільки будь-яка площа, яка є перпендикулярною до площини розподілу мас, є

площиною симетрії, тангенціально компонента g_t дорівнює нулю. Це означає, що завжди можна знайти дві однакові елементарні маси, що розташовані на однаковій відстані від площини симетрії.

Ясно, що їх нормальні компоненти мають однаковий напрямок, а тангенціальні – мають однакову величину, але протилежні один одному і, відповідно, їх сума дорівнює нулю.

Плоска поверхня кінцевої протяжності

Розглянемо поведінку g_z вздовж трьох профілів, перпендикулярних площині $z = 0$ (рис. 3.12, г). Перший профіль перетинає маси на цій площині, та зі збільшенням відстані до них тілесний кут стає менше. Тому нормальна компонента поля спадає. З іншої сторони, при наближенні до поверхні тілесний кут наближається до своїх межових значень: -2π та 2π , відповідно, зверху або знизу поверхні. Істотно, що поблизу плоскої поверхні компонента g_n визначається тільки елементарною масою, що розташована поблизу точки спостереження. Лінійні розміри цього елемента повинні значно переважати координату z точки А.

Другий профіль проходить через область, в якій маси відсутні. Якщо точка спостереження розташована всередині цієї області, нормальна компонента зникає, оскільки поле, що створюється кожною елементарною масою, має в цьому випадку тільки тангенціальну компоненту. Цей же результат слідує з того, що тілесний кут, під яким поверхня видна з будь-якої точки області на площині, де маси відсутні, дорівнює нулю.

Таким чином, зі збільшенням відстані від z величина g_z зростає і досягає максимуму, а потім починає поступово спадати (зменшуватися).

Поведінка нормальної компоненти вздовж третього профілю співпадає з тільки що розглянутим випадком.

3.13. ФУНКЦІЇ ЛЕЖАНДРА ТА РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА

3.13.1. Розклад функції $\frac{1}{R}$ в степеневі ряди

Введемо функцію Лежандра, розглянувши степеневі ряди функції

$$\phi = \frac{1}{R} = L_{BA}, \quad (3.133)$$

де $L_{BA} = (R^2 + R_1^2 - 2RR_1 \cos \theta)^{\frac{1}{2}}$ - відстань між двома точками. Тут $\vec{R}$ і $\vec{R}_1$ - радіус-вектори з початком в точці O і кутом θ між ними (рис. 3.13).

$$\begin{aligned} \frac{1}{L_{BA}} &= \frac{1}{R_1} (1 + \rho^2 - 2\rho\mu)^{-\frac{1}{2}} \text{ при } R < R_1 \\ \text{та } \frac{1}{L_{BA}} &= \frac{1}{R} (1 + \rho^2 - 2\rho\mu)^{-\frac{1}{2}} \text{ при } R > R_1. \end{aligned} \quad (3.134)$$

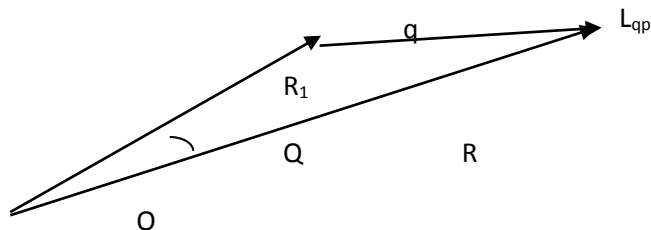


Рис. 3.13. Ілюстрація до рівняння (3.133) за [99]

Можна записати:

В цих рівняннях $\mu = \cos \theta$ ($-1 \leq \mu \leq +1$), а ρ дорівнює $\frac{R}{R_1}$ при $\frac{R}{R_1} < 1$ або $\frac{R_1}{R}$ при $\frac{R_1}{R} > 1$. Важливо, що в обох випадках цей параметр менше одиниці. Розкладемо функцію:

$$\phi(\rho, \mu) = (1 + \rho^2 - 2\rho\mu)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.135)$$

в степеневий ряд по ρ за умови, що $0 < \rho < 1$ та $-1 \leq \mu \leq +1$. За визначенням

$$\emptyset(\rho, \mu) = \sum_{n=0} \frac{\emptyset^{(n)}(0, \mu)}{n!} \rho^n = \sum_{n=0} P_n(\mu) \rho^n, \quad (3.136)$$

$P_n(\mu)$ називаються функціями Лежандра та залежать тільки від одного параметра $\mu = \text{const}$, який змінюється від -1 до $+1$.

Диференціюючи функцію $\emptyset$ по ρ і підставляючи $\rho = 0$, отримуємо:

$$\emptyset(0) = 1$$

$$\emptyset^{(1)}(0) = \left[\frac{\rho - \mu}{(1 + \rho^2 - 2\rho\mu)^{\frac{3}{2}}} \right]_{\rho=0} = \mu = \cos \cos \theta, \quad (3.137)$$

$$\emptyset^{(2)}(0) = \left[\frac{3(\rho - \mu)^2}{(1 + \rho^2 - 2\rho\mu)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{(1 + \rho^2 - 2\rho\mu)^{\frac{3}{2}}} \right]_{\rho=0} = 3\theta - 1 \text{ і т.п.}$$

Відповідно, рівняння (3.136) можна представити:

$$\emptyset(\rho, \mu) = \frac{1}{(1 + \rho^2 - 2\rho\mu)^{\frac{1}{2}}} = 1 + \rho \cos \cos \theta + \rho^2 \frac{3\theta - 1}{2} + \dots, \quad (3.138)$$

та, таким чином,

$$\begin{aligned} P_0(\mu) &= 1, P_1(\mu) = \cos \cos \theta, & P_2(\mu) &= \frac{3}{2} \left(\theta - \frac{1}{3} \right), \\ P_3(\mu) &= \frac{5}{2} \left(\theta - \frac{3}{5} \cos \cos \theta \right) \end{aligned} \quad (3.139)$$

Таким же чином можна отримати функції Лежандра будь-якого порядку n .

Підставляючи тепер рівняння (3.136) в (3.134), отримаємо рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{1}{L_{BA}} &= \frac{1}{R_1} \sum_{n=0} \left(\frac{R}{R_1} \right)^n P_n(\cos \cos \theta) \text{ при } R < R_1 \\ \text{та} \quad \frac{1}{L_{BA}} &= \frac{1}{R} \sum_{n=0} \left(\frac{R_1}{R} \right)^n P_n(\cos \cos \theta) \text{ при } R > R_1. \end{aligned} \quad (3.140)$$

Ці формули досить важливі, оскільки вони дозволяють описати потенціал поля притягання, який створений довільним розподілом мас через функції Лежандра, і відстанню до початку координат R . З фізичної точки зору зрозуміло, що рівняння (3.140) характеризує потенціал, що створюється одиничною масою. Тоді, застосовуючи принцип суперпозиції, легко можна узагальнити ці вирази і отримати формули для потенціалу всередині та зовні будь-яких мас, цей перехід буде застосований в подальшому.

Поліноми Лежандра детально вивчені та їм притаманні багато властивостей. Наприклад, ці функції, як і тригонометричні, і функції Бесселя, ортогональні. Точніше, поліноми Лежандра різного порядку ортогональні на інтервалі $(-1; +1)$:

$$\int_{-1}^1 P_n(\mu) P_m(\mu) d\mu = 0 \text{ при } m \neq n$$

та

$$\int_{-1}^1 P_n(\mu) P_m(\mu) d\mu = \frac{2}{2n+1} \text{ при } m=n.$$

Це одна з причин, за якою функції мають таке велике значення при розв'язку крайових задач. Крім того, між поліномами Лежандра різного порядку існує досить просте рекурентне співвідношення:

$$(n+1) P_{n+1}(\mu) - \mu(2n+1) P_n(\mu) + n P_{n-1}(\mu) = 0,$$

яке можна використовувати для обчислення $P_n(\mu)$ при $n > 2$, оскільки $P_0(\mu) = 1$ та $P_1(\mu) = \mu$.

Звернемо увагу на те, що внаслідок ортогональності поліномів Лежандра багато функцій можуть бути представлені у вигляді рядів, що нагадують рівняння (3.140), цей факт широко використовується в математичній фізиці. Отримаємо тепер диференціальне рівняння, одним з розв'язків якого будуть функції Лежандра:

3.13.2. Рівняння Лапласа та функції Лежандра

Покажемо, що за допомогою функцій Лежандра можна знайти розв'язок рівняння Лапласа [99, 115]. Як знаємо, рівняння Лапласа в сферичній системі координат має наступний вид:

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \sin \theta \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (3.141)$$

за умови, що функція U не залежить від координати φ . Це рівняння в часткових похідних другого порядку, де U залежить від двох сферичних координат R і θ . Припустимо, що розв'язок може бути представлений у вигляді добутку двох функцій так, що кожна з функцій залежить тільки від одного аргументу:

$$U = T(R)P(\theta). \quad (3.142)$$

Підставимо (3.142) в рівняння (3.141), отримаємо:

$$P(\theta) \sin \theta \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial T}{\partial R} \right) + T(R) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) = 0$$

Розділивши обидві частини цього рівняння на $T(R)P(\theta)$ $\sin \theta$, отримаємо:

$$\frac{1}{T(R)} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial T}{\partial R} \right) + \frac{1}{P(\theta) \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (3.143)$$

Природно виділити в лівій частині рівняння (3.143) два члени:

$$1 \text{ член } - f(R) = \frac{1}{T(R)} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial T}{\partial R} \right) \text{ та}$$

$$2 \text{ член } - f(\theta) = \frac{1}{P(\theta) \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial P}{\partial \theta} \right).$$

На перший погляд, обидва члени залежать відповідно від R і θ , і рівняння (3.143) може бути представлено у вигляді:

$$f(R) + f(\theta) = 0.$$

Проте, така рівність неможлива, оскільки при зміні одного аргументу, наприклад, R , перший член змінюється, в той час як другий залишається сталим і, відповідно, сума цих членів може бути рівною нулю для довільних значень R і θ . Тому ми маємо зробити висновок про те, що жодний з цих членів не залежить від координат, і кожний з них – сталий.

Цей факт лежить в основі метода розділення змінних, що дозволяє представити функцію U у вигляді добутку двох функцій, кожна з яких залежить від тільки від однієї координати. Для зручності напишемо цю сталу у виді $\pm m^2$, де m називається константою розділення. Тоді замість рівняння Лапласа ми маємо два звичайних диференціальних рівняння другого порядку:

$$\frac{1}{T(R)} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial T}{\partial R} \right) = \pm m^2$$

та
$$\frac{1}{P(\theta) \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) = \pm m^2. \quad (3.144)$$

Поклавши $m^2 = n(n+1)$ і обираючи «мінус» в правій частині другого рівняння, ми отримаємо рівняння Лежандра, одним з розв'язків якого буде функція $P_n(\cos \theta)$:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + n(n+1) \sin \theta P(\theta) = 0. \quad (3.145)$$

Відповідно, рівняння для функції $T(R)$ має вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial T}{\partial R} \right) - n(n+1)T(R) = 0, \quad (3.146)$$

і легко бачити, що функції R^n і R^{-n-1} задовольняють цьому рівнянню.

Відзначимо, що рівняння Лежандра має також і другий розв'язок, який тут не розглядається. Як витікає з рівняння (3.142), для кожного n ми отримаємо частковий розв'язок, що має вид:

$$U(R, \theta) = (A_n R^n + B_n R^{-n-1}) P_n(\cos \theta). \quad (3.147)$$

Здійснюючи підсумування по n , отримаємо загальний розв'язок, що не залежить від n :

$$U(R, \theta) = \sum_{n=1} (A_n R^n + B_n R^{-n-1}) P_n(\cos \cos \theta). \quad (3.148)$$

Рівняння (3.140) може слугувати прикладом представлення функції $\frac{1}{L_{BA}}$ у вигляді суми часткових розв'язків рівняння Лапласа. Далі ми скористаємося рівнянням (3.148) для опису гравітаційного поля Землі.

4. ПРИТЯГАННЯ ТІЛ ПРАВИЛЬНОЇ ФОРМИ

4.1. ПРИТЯГАННЯ СФЕРИЧНОГО ШАРУ І КУЛІ

Нехай маса, що притягає, розташована у вигляді шару постійної густини μ на поверхні сфери радіуса R . Визначимо силу притягання в точці P , яка є зовнішньої щодо цієї поверхні (рис. 4.1). Через ρ позначимо відстань точки P від центру сфери O .

Припустимо, що в довільній точці M знаходиться маса $dm = \mu ds$. Визначимо складову сили тяжіння за напрямком PO . Для цього вираз для напруженості гравітаційного поля помножимо на косинус кута MPO . З рис. 4.1 очевидно, що

$$\cos MPO = \frac{\rho - R \cos \psi}{r}. \quad (4.1)$$

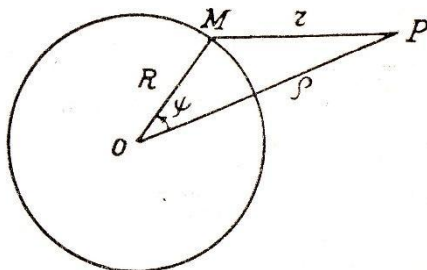


Рис. 4.1. Притягання сферичним шаром зовнішньої точки.

Отже, значення складової сили тяжіння визначає наступний інтеграл по поверхні сфери:

$$V_\rho = G\mu \int_S \frac{\rho - R \cos \psi}{r^3} dS. \quad (4.2)$$

Обчислення інтеграла зручно виконати у сферичній системі координат. Оскільки

$$dS = R^2 \sin \psi \, d\psi \, d\alpha$$

то

$$V_\rho = \mu G \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\rho - R \cos \psi}{r^3} R^2 \sin \psi \, d\psi \, d\alpha. \quad (4.3)$$

Інтегрування по α дає множник 2π . Інтегрування по ψ більш складна задача, тому застосуємо штучний прийом: зробимо змінною інтегрування величину r . Згідно з кресленням

$$r^2 = \rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos \psi, \quad (4.4)$$

звідси знаходимо

$$\rho - R \cos \psi = \frac{\rho^2 + r^2 - R^2}{2\rho},$$

$$\sin \psi \, d\psi = \frac{r}{\rho R} dr. \quad (4.5)$$

Що стосується меж інтегрування, то, як неважко бачити, при $\psi = 0$ маємо $r = \rho = R$ і при $\psi = \pi$ маємо $r = \rho + R$.

Виконуючи необхідні перетворення, будемо мати

$$V_\rho = 2\pi\mu G \frac{R}{2\rho^2} \int_{\rho-R}^{\rho+R} \left(\frac{\rho^2 - R^2}{r^2} + 1 \right) dr \quad (4.6)$$

і далі

$$V_\rho = 2\pi\mu G \frac{R}{2\rho^2} \left[-\frac{\rho^2 - R^2}{r} + r \right]_{\rho-R}^{\rho+R} = 2\pi\mu G \frac{2R^2}{\rho^2}. \quad (4.7)$$

Позначимо через m масу всього поверхневого шару. Оскільки $m = 4\pi\mu R^2$, то

$$V_\rho = G \frac{m}{\rho^2}. \quad (4.8)$$

Цей результат показує, що сферичний шар постійної густини і рівновелика за масою матеріальна точка, що збігається з центром сфери, притягують зовнішню точку з однаковою силою.

Якщо у формулі (4.8) покласти $\rho = R$, то отримаємо значення сили тяжіння на поверхні сфери. Заміняючи масу m через масу поверхневого шару, матимемо

$$V_\rho = 4\pi\mu G. \quad (4.9)$$

Корисно звернути увагу на таку особливість. Здавалося б, що для спрощення математичних викладок, необхідних для визначення сили тяжіння на поверхні сфери, можна було б покласти $\rho = R$ ще в інтегральному виразі, з якого отримано рівність (4.7). Однак, якщо це зробити, то легко перевірити, що отримаємо

$$V_\rho = 2\pi\mu G. \quad (4.10)$$

Це значення називається *формальним*, і значення, отримане за формулою (4.7) при $\rho = R$, називається *граничним*.

Тепер розглянемо задачу про притягання однорідною кулею зовнішньої точки. Припустимо, що тіло кулі концентричними сферами розбито на ряд шарів одиничної товщини. Оскільки притягання кожного шару не залежить від його радіуса, а залежить тільки від кількості маси, то, кожен шар можемо замінити точковою

масою в центрі кулі. У такому випадку підсумовування притягань окремих шарів зводиться до підсумовування мас цих шарів. В результаті всього отримуємо, що для обчислення сили тяжіння кулі можна користуватися формулою (4.8), якщо під M приймаємо масу кулі.

Розглянемо притягання сферичним шаром внутрішньої точки. При $\rho < R$ інтеграл для обчислення складових потенціалу зберігає свій вигляд, але при обчисленні його згідно з рис. 4.2 при $\psi = 0$ нижня межа дорівнюватиме $r = R - \rho$ і при $\psi = \pi$ верхня межа – $r = R + \rho$.

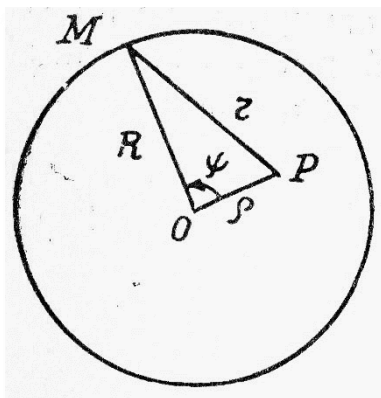


Рис. 4.2. Притягання сферичним шаром внутрішньої точки.

Внаслідок цього матимемо далі замість (4.6)

$$V_{\rho} = 2\pi\mu G \frac{R}{2\rho^2} \int_{R-\rho}^{R+\rho} \left(\frac{\rho^2 - R^2}{r^2} + 1 \right) dr. \quad (4.11)$$

та замість (4.7)

$$V_{\rho} = 2\pi\mu G \frac{R}{2\rho^2} \left[-\frac{\rho^2 - R^2}{r} + r \right]_{R-\rho}^{R+\rho} = 0. \quad (4.12)$$

Це означає, що однорідний сферичний шар внутрішню точку при будь-якому її положенні всередині сфери не притягує.

З приводу притягання внутрішньої точки кулею зазначимо таке. Якщо через дану точку провести допоміжну концентричну сферу, то тим самим куля буде підрозділена на дві частини. Дія першої частини, що знаходиться всередині допоміжної сфери, можна знайти за формулою притягання кулею зовнішньої точки. Дія другої

частини, тобто шару між двома концентричними сферами, дорівнює нулю, так як дана точка щодо цього шару є внутрішньою.

Розглянемо гравітаційні властивості сферичного шару і кулі на наступному штучному прикладі. Нехай є однорідна куля з пустотілою областю навколо центру. Розглянемо зміну сили тяжіння при переміщенні точки, яка притягується, в радіальному напрямку (рис. 4.3).

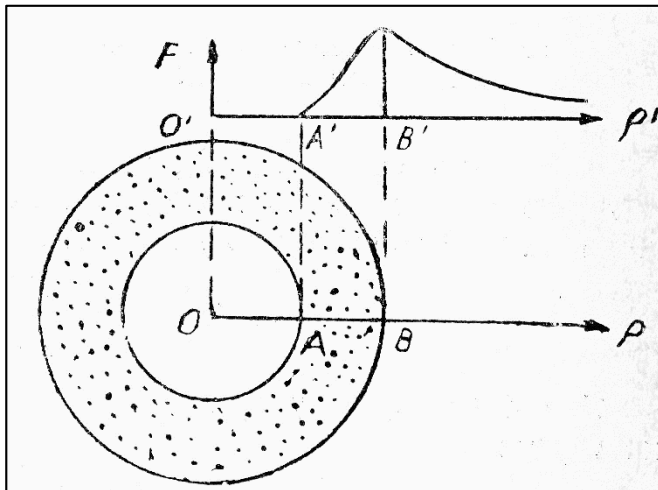


Рис. 4.3. Графік сили притягання сферичного шару кінцевої потужності при різних положеннях точки, що притягується.

У точках відрізка OA , які є внутрішніми для даного розподілу, сила тяжіння дорівнює нулю. При положенні точки, яка притягується, на відрізку AB поділимо концентричною сферою, що проходить через дану точку маси, що притягуються, на два сферичних шари кінцевої товщини: зовнішній і внутрішній. Зовнішній шар на точку гравітаційної дії не чинить, дію внутрішнього шару можна замінити дією еквівалентної точки в центрі кулі. Таким чином, з переміщенням точки всередині шару від A до B потужність внутрішнього шару буде зростати і величина сили тяжіння відповідно збільшуватиметься і в точці B досягне свого максимального значення. При віддаленні точки праворуч від B величина сили тяжіння зменшується пропорційно квадрату відстані від центра O , асимптотично наближаючись до нуля.

4.2. ПРИТЯГАННЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ВІДРІЗКА І ЛІНІЇ

Нехай в координатній площині XOY прокладено паралельно осі OY матеріальний відрізок. Визначимо силу тяжіння в точці P (рис. 4.4). Якщо λ – маса одиниці довжини (лінійна густина), то

$$dm = \lambda d\eta$$

і, отже, точкова маса буде притягувати P з силою

$$G \frac{\lambda d\eta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}. \quad (4.13)$$

Так як кожна точка відрізка притягує точку P , то, ставлячи питання про знаходження сумарної дії, необхідно фіксувати напрямок, за яким будемо шукати цю дію, а без цього задача позбавлена сенсу. Отже, будемо шукати силу тяжіння за напрямком відрізка PO_1 , тобто в координатній площині XOY . У такому випадку силу притягання точкової маси треба помножити на

$$\cos(MPO_1) = \frac{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}.$$

Силу притягання всього відрізка дає наступний інтеграл:

$$F = \lambda G \int_{b_1}^{b_2} \frac{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}} d\eta.$$

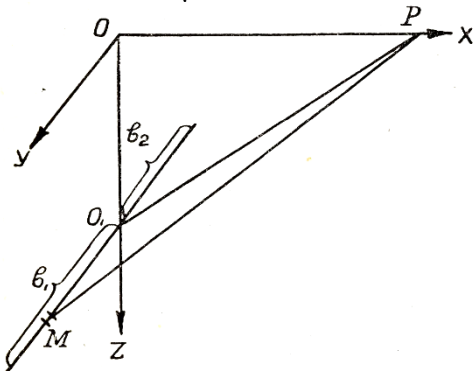


Рис. 4.4 Притягання точки горизонтальним відрізком.

Позначимо

$$p^2 = \xi^2 + \zeta^2,$$

тоді

$$F = \lambda G \int_{b_1}^{b_2} \frac{p}{(p^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} d\eta.$$

Цей інтеграл легко обчислюється за допомогою підстановки:

$$\eta = ptg\phi.$$

Опускаючи нескладні викладки, в підсумку отримуємо:

$$F = \lambda G \left[\frac{b_1}{p\sqrt{p^2+b_1^2}} - \frac{b_2}{p\sqrt{p^2+b_2^2}} \right].$$

Якщо $b_1 = -b_2 = b$, то вираз у дужках набуде максимального значення, тобто

$$F = 2\lambda G \frac{b}{p\sqrt{p^2+b^2}}. \quad (4.14)$$

Щоб знайти значення F при $b = \infty$, розділимо чисельник і знаменник на b ; на межі підкореневий вираз перетворюється в одиницю, тому

$$F = 2\lambda G \frac{1}{p}.$$

Це показує, що сила тяжіння горизонтальної лінії нескінченної протяжності пропорційна подвійній лінійній густині і обернено пропорційна довжині перпендикуляра, опущеного на цю лінію.

В системі прямокутних координат складові сили тяжіння по осям визначаються таким чином:

$$F_x = 2\lambda G \frac{\xi}{p^2}; \quad F_z = 2\lambda G \frac{\zeta}{p^2}. \quad (4.15)$$

Легко помітити, що ці функції є похідними за прямокутними координатами від потенціалу, що виражається, наступною формулою:

$$V = 2\lambda G \ln \frac{1}{p}. \quad (4.16)$$

Оскільки початок координат збігається з точкою, що притягується, то

$$F_x = V_x = -\frac{\partial V}{\partial \xi}; \quad F_z = V_z = -\frac{\partial V}{\partial \zeta}.$$

Потенціал представлений в (4.16) називається логарифмічним, він застосовується при вивченні гравітаційних полів, обумовлених

циліндричними тілами, необмежено витягнутими за напрямком однієї координатної осі, звичайно осі y . Так як такого роду розподілення мас і створювані ними поля залежать тільки від двох координат, то вони є двомірними.

Аналогічно тому, як це було обчислено для кулі, можна показати, що однорідний круговий горизонтальний циліндр нескінченної протяжності притягує зовнішню точку з такою ж силою, як лінія, що збігається з його віссю; зрозуміло, густина цієї лінії повинна дорівнювати масі поперечного перерізу, а саме

$$\lambda = \pi \sigma R^2,$$

де σ – об'ємна густина.

Для двовимірних розподілів з перерізом більш складного виду, ніж коло, V і V_z виражаються за допомогою таких інтегралів:

$$V = 2\sigma G \int_S \ln \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}} dS, V_z = 2\sigma G \int_S \frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}} dS. \quad (4.17)$$

4.3. ПРИТЯГАННЯ ДИСКА, ШАРУ, ЦИЛІНДРА І КОНУСА

Найпростішим випадком розподілу маси з осью симетрії є шар у вигляді кругового диска. Нехай точка, що притягується, знаходиться на продовженні осі диска; початок координат сумісний з цією точкою і вісь z спрямуємо в сторону диска. Виведемо формули для складової сили тяжіння по цій осі.

Нехай μ – поверхнева густина маси, що притягає, і R – радіус диска; точка P , яка притягується, знаходиться на висоті h (рис. 4.5). Візьмемо в точці M диска елемент маси dm ; користуючись циліндричними координатами, маємо:

$$dm = \mu r dr d\alpha.$$

Сила тяжіння, що розвивається масою dm , спрямована вздовж відрізка r . Щоб отримати проекцію на вісь z , необхідно помножити цю силу на $\cos(\angle OPM)$. Таким чином, точка M створює вздовж осі наступну дію:

$$\frac{dm}{r^2} \cdot \frac{h}{r}.$$

Силу тяжіння всього диска дає, очевидно, інтеграл:

$$V_z = \mu G \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{h\rho}{(\rho^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} d\rho d\alpha.$$

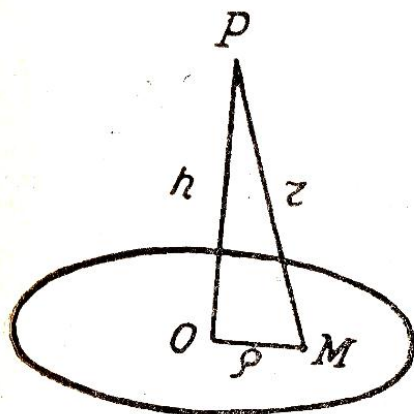


Рис. 4.5. Притягання точки круговим диском.

Інтегрування по α дає множник 2π . Виконуючи інтегрування по ρ , знаходимо

$$V_z = 2\pi\mu G \left[-\frac{h}{\sqrt{\rho^2 + h^2}} \right]_0^R$$

і далі отримуємо необхідну формулу:

$$V_z = 2\pi\mu G \left[1 - \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right]. \quad (4.18)$$

Неважко бачити, що зі збільшенням радіусу диска (або зі зменшенням висоти h) сила тяжіння збільшується і в граничному значенні при $R = \infty$ (або при $h = 0$) приймає значення

$$V_z = 2\pi\mu G. \quad (4.19)$$

Це означає, що сила тяжіння матеріального шару на нескінченній площині залежить тільки від густини шару; висота точки h у формулі не бере участь.

Розглянемо геометричну інтерпретацію формули (4.18). Якщо провести з точки P до граничних точок диска прямі, то отримаємо круговий конус (рис. 6). В середині конуса побудуємо сегмент сфери радіуса $PO = h$. Оскільки висота сегмента визначається за формулою

$$k = h \left[1 - \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right],$$

а площа сегмента за формулою

$$S = 2\pi kh,$$

то, остаточно отримаємо,

$$S = 2\pi h^2 \left[1 - \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right].$$

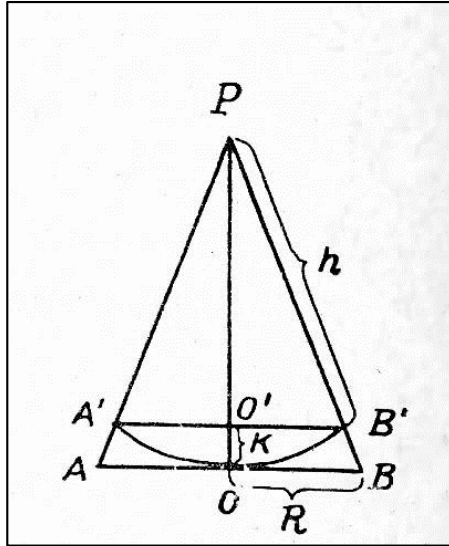


Рис. 4.6. Диск і сферичний сегмент, виміряні одним й тим самим тілесним кутом, притягують однаково.

Приймаючи радіус сфери $h = 1$, отримуємо величину тілесного кута, тобто кута, під яким із точки P вбачається площа диска. Позначимо

$$\omega = 2\pi \left[1 - \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right];$$

в такому випадку формулу (4.18) можемо написати в наступному вигляді:

$$V_z = \mu \omega G. \quad (4.20)$$

Таким чином, тяжіння однорідного шару в вигляді диска дорівнює добутку поверхневої густини на величину тілесного кута.

Тілесний кут площини, якою простір поділяється на дві частини, дорівнює 2π , тому для однорідного шару на нескінченній площині, виходячи з формули (4.20), отримуємо формулу (4.19).

При заданому радіусі диска величина тілесного кута залежить від висоти h . Зі зменшенням висоти тілесний кут збільшується. У межі, коли точка, що притягується, буде знаходитися від поверхні диска на нескінченно малій відстані, тілесний кут буде наближатися до свого граничного значення, тобто до 2π . Звідси випливає, що точка, що лежить на поверхневому шарі, притягується з силою, пропорційною густині шару. Цей результат в гравірозвідці має велике практичне значення: за вимірними величинами сили тяжіння можна обчислити густину шару, і навпаки. Очевидно,

$$\mu = \frac{V_z}{2\pi G}. \quad (4.21)$$

Вираз вертикальної складової сили тяжіння через тілесний кут $d\omega$ поширюється на випадок однорідного шару довільної форми. Дійсно, нехай точка P зазнає притягання з боку однорідного плоского шару, обмеженого кривою довільного вигляду (рис. 4.7). Елемент плоского шару дає дію:

$$dV_z = G \frac{dm}{r^2} \cos \phi,$$

де

$$\cos \phi = \frac{h}{r} \text{ і } dm = \mu ds.$$

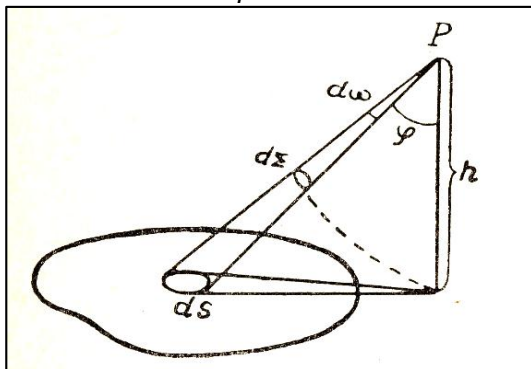


Рис. 4.7. Вертикальна складова сили притягання пропорційна величині тілесного кута

Усередині похилого конуса, основа якого ds і тілесний кут $d\omega$ побудуємо площадку $d\Sigma$, сфери радіуса h . Так як $d\Sigma$ нахилена до площини шару на кут, то, маємо,

$$\frac{ds \cos \phi}{r^2} = \frac{d\Sigma}{h^2}$$

і далі:

$$dm = \mu \frac{r^2}{h^2 \cos \phi} d\Sigma,$$

тому

$$dV_z = G \frac{\mu}{h^2} d\Sigma.$$

Так як $\frac{d\Sigma}{h^2} = d\omega$, то, виконавши інтегрування, отримаємо далі формулу (4.20).

Випадок простого шару на поверхні. Нехай S - не площина, а поверхня; шар має змінну густину μ . Визначимо в точці P на самій поверхні складову V_z , вважаючи, що вісь спрямована за внутрішньої нормаллю (рис. 4.8).

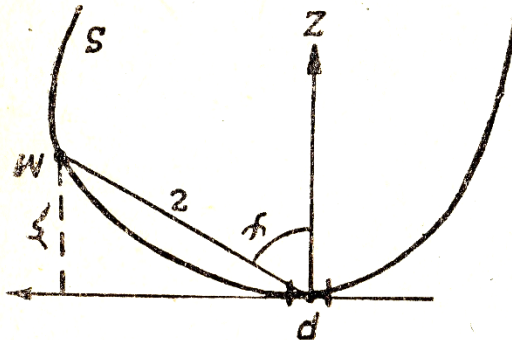


Рис. 4.8. Притягання шаром змінної густини точки на його поверхні.

На поверхні поблизу точки P виділимо круговий диск. Вважаючи, що в межах диска густина постійна, його дію знайдемо за формулою (4.19). Що стосується дії шару по поверхні S' (штрих означає, що виключений диск), то отримаємо наступну формулу:

$$V_z(P') = G \int_{S'} \frac{\mu \cos \psi}{r^2} dS = G \int_{S'} \mu \frac{\xi}{r^2} dS. \quad (4.22)$$

Втім, при обчисленні цього інтеграла виключення диска можна не обмовляти, бо при $\xi = 0$ значення інтеграла по поверхні диска дорівнює нулю. Отримане таким шляхом $V_z(P')$ прийнято називати формальним значенням похідної за нормаллю; визначення в разі сферичного шару було дано раніше. Повну величину сили тяжіння дає граничне значення, що виражається у вигляді суми:

$$V_z = 2\pi\mu G + G \int_S \mu \frac{\xi}{r^2} dS. \quad (4.23)$$

Інтегральна складова, як це було вище показано, для сферичного шару постійної густини дорівнює $2\pi\mu G$ і для шару на нескінченній горизонтальній площині дорівнює нулю. Взагалі кажучи, притягання шару постійної густини на будь-якій опуклій поверхні менше $4\pi\mu G$ і більше $2\pi\mu G$. Властивості поверхонь, що забезпечують однозначне визначення похідної потенціалу за напрямком нормалі, були докладно досліджені російським ученим А. М. Ляпуновим (1857–1918), тому відповідні умови і поверхні зазвичай називаються його ім'ям.

На закінчення зазначимо, що рівність (4.23) щодо шуканої густини μ є інтегральним рівнянням; вивчення цього рівняння приводиться в курсах математичної фізики.

Притягання кругового однорідного циліндра. Розглянемо лише окремий випадок: точка, яка притягується, знаходиться в центрі верхньої основи циліндра. Що стосується загального випадку, коли точка знаходиться не на осі, то задача зводиться до інтегралу, який в елементарних функціях не виражається.

Розглядаючи тяжіння диска (4.18) як дію елементарного шару, виразимо поверхневу густину μ через об'ємну σ , тобто $\mu = \sigma dh$.

У такому випадку шукане значення отримаємо за допомогою інтегрування елементарного шару в межах від 0 до, де H – висота циліндра. Отже,

$$V_z = 2\pi\sigma G \int_0^H \left[1 - \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right] dh = 2\pi\sigma G \left[h - \sqrt{R^2 + h^2} \right]_0^H$$

і далі:

$$V_z = 2\pi\sigma G [H + R - \sqrt{R^2 + h^2}]. \quad (4.24)$$

Якщо розкласти радикал в ряд за ступенями $\frac{H^2}{R^2}$ і покласти $R \rightarrow \infty$, то отримаємо

$$V_z = 2\pi\sigma GH,$$

що знову повторює результат (4.19). Таким чином, притягання однорідного шару нескінченної протяжності пропорційно добутку σH і не залежить від висоти, на якій знаходиться точка, яка притягується.

Якщо виражати V_z в мгал і H – в метрах, то, $2\pi G = 0,0419$, і, отже,

$$V_z = 0,0419\sigma H. \quad (4.25)$$

Притягання однорідного конуса. Розглянемо окремий випадок, коли точка, що притягується знаходиться у вершині. Вплив елементарного шару виражає формула (4.20), тому, щоб отримати силу притягання конуса, необхідно цей результат проінтегрувати за висотою. Замінюючи $\mu = \sigma dh$, маємо

$$V_z = \sigma\omega G \int_0^H dh,$$

так що $V_z = \sigma\omega GH$. У випадку усіченого конуса

$$V_z = \sigma\omega G(H_1 - H_2). \quad (4.26)$$

Цей результат зберігає свою силу і для піраміди.

5. ГУСТИНА ГІРСЬКИХ ПОРІД

Густина гірських порід, належить до числа найважливіших екстенсивних параметрів, які характеризують стан природних систем – адже саме густина порід визначає мольний об'єм речовини, а її знання необхідне при розрахунках об'ємів елементарних комірок мінералів. Оскільки густина є властивістю речовини, що визначає її масу в одиниці об'єму, то вона безумовно впливає на всі інтенсивні параметри систем: величину тиску і температури, а також, безумовно, на концентрацію пустот [123].

Якщо гірську породу розглянути як трифазну систему, то і густина гірських порід може бути виражена як сума трьох компонент: густина твердої фази – мінеральної частини порід, густина рідкої і газоподібної фаз, які є пустотними наповнювачами.

Густина мінералів визначається масою складових їхніх елементів і будовою електронних оболонок атомів, що обумовлюють кристалохімічні особливості структур. При цьому густина мінералів тим вища, чим більше вони містять атомів значної відносної атомної маси і чим щільніше атоми упаковані в одиниці об'єму. Упаковка визначається атомними (іонними) радіусами, валентністю і типом зв'язку часток. Оскільки великі іони (напр., O^{2-} , S^{2-} , Cl^-) багатьох мінералів утворюють надщільні упаковки, катіони меншого радіуса розташовуються між ними, причому катіонів між аніонами може бути тим більше (а отже, і вища густина мінералу), чим менша їхня валентність і вища валентність аніонів. У загальному випадку густина мінералів з іонною або ковалентною формами кристалічного зв'язку нижча, ніж мінералів з ковалентно-металевою та іонно-металевою формами зв'язку [123].

5.1. ГУСТИНА МАГМАТИЧНИХ ПОРІД

В загальному випадку густинні властивості магматичних порід визначаються як їхнім складом, так і структурно-текстурними особливостями.

Можливість прогнозування складу магматичних порід за мінеральною густиною (і навпаки) при використанні певних сумарних коефіцієнтів була доведена ще Н.Б.Дортман [123].

Водночас, оскільки пористість невивітрених відмін інтрузивних порід, як правило, не перевищує перших відсотків, то головним чинником що визначає величину їх густини слід вважати особливості хімічного та мінерального складу. Вплив структурно-текстурних особливостей, в більшості випадків, призводить до зміни величини об'ємної густини не більш як на 50-70 кг/м³, що співставно із змінами які обумовлені епігенетичними процесами (зменшення густини при вивітрюванні без порушення суцільності порід досягає 40-100 кг/м³), чи зростанням вмісту акцесорних мінералів. Вплив структури порід на їхню густину достатньо чітко простежується лише у випадку подібності складу порід. Так, густина слабкопорфіровидних гранітів Новолазарівського масиву УЩ на 7-10 кг/м³ нижча густини рівномірно-зернистих відмін, виникнення порфіробластів та овоїдів супроводжується зниженням ρ на 5-15 кг/м³.

В безрудних відмінах магматичних порід (табл. 5.1) лужноземельного ряду середнє значення об'ємної густини зростає в ряду граніт-олівініт (від 2550-2650 кг/м³ до 3200-3500 кг/м³), що на загал узгоджується із зменшенням вмісту кремнезему і зростанням вмісту фермічних окислів.

Густина порід лужного ряду за однакового вмісту кремнезему з породами нормального ряду є дещо нижчою, що обумовлено високими концентраціями лужних елементів із великим атомним радіусом, які утворюють мінерали менш щільних упаковок.

Так, відміни сієнітів, які складаються майже виключно з польових шпатів, мають густину меншу за густину гранітів. Суперпозиція впливу чинників складу і умов утворення та існування визначає наявність досить широких діапазонів змін густини інтрузивних порід – від 100 кг/м³ у кислих порід, до більш як 300 кг/м³ – в ультраосновних.

Густина порід лужного ряду за однакового вмісту кремнезему з породами нормального ряду є дещо нижчою, що обумовлено високими концентраціями лужних елементів із великим атомним радіусом, які утворюють мінерали менш щільних упаковок.

Так, відміни сієнітів, які складаються майже виключно з польових шпатів, мають густину меншу за густину гранітів. Суперпозиція впливу чинників складу і умов утворення та існування визначає наявність досить широких діапазонів змін густини інтрузивних порід – від 100 кг/м^3 у кислих порід, до більш як 300 кг/м^3 – в ультраосновних.

Найвужчий діапазон зміни густини притаманний кислим породам (табл. 5.1). В найбільш лейкократових їх відмінах, за незначного вмісту акцесорних мінералів, величина густини фактично визначається співвідношенням вмісту калієвих польових шпатів і кварцу.

Для більшості ж гранітів найбільш суттєві варіації значень пов'язані із зміною вмісту біотиту та амфіболу. Дисперсія густини в межах масивів гранітів залежить від витриманості складу та текстурних особливостей порід, а також від наявності зон ущільнення і розтягу, і може бути дуже незначною. Так, у вже згадуваних рівномірно-зернистих гранітах Новолазарівського масиву середнє квадратичне відхилення густини не перевищує 2 кг/м^3 , збільшуючись в порфіровидних відмінах до 7 кг/м^3 .

Густина середніх та основних порід суттєвим чином залежить від вмісту та складу фемічних мінералів (перш за все, амфіболів та піроксенів). Це добре видно при порівнянні густини габро і анортозиту, а також нормального та лейкократового габро. Процеси амфіболізації основних порід, як правило, призводять до зниження їх густини. Густина порід підвищеної лужності (сієніти, граносієніти) дещо нижча густини порід нормального ряду.

Для всіх видів ультраосновних порід характерна висока густина – найбільші її значення зафіксовані в олівінітах і дунітах. При загальній залежності густини від вмісту SiO_2 дуже велике значення має залізистість мінералів у рядах піроксенів і олівінів. Відмінність густини суто залізистих і суто магнезіальних відмін олівініту може сягати більш як 500 кг/м^3 , проте такі різновиди порід дуже рідкісні, а для більшості масивів характерний полімінеральний склад порід із типовим співвідношенням різних мінералів у різноманітних

формаціях. При слабкій серпентинізації густина порід гіпербазитових масивів зменшується до 3000 - 3200 кг/см³, а при інтенсивній - до 2600 - 2700 кг/м³.

Таблиця 5.1 – Об’ємна густина (в кг/м³) магматичних порід за [123].

Порода	$\sigma_{\text{сер}}$	$\sigma_{\text{min}} - \sigma_{\text{max}}$	Порода	$\sigma_{\text{сер}}$	$\sigma_{\text{min}} - \sigma_{\text{max}}$
Ліпарит масивний	2500	2400–2600	Діорит кварцовий	2750	2650–2810
– мигдалекам’яний	2300	2150–2450	Лабрадорит	2670	2630–2690
– пемзовий	2100	1900–2200	Анортозит	2730	2700–2760
Порфір кварцовий	2600	2550–2650	Базальт масивний	2750	2600–2800
Граніт	2590	2550–2680	– мигдалекам’яний	2500	2400–2600
Граніт аляскітовий	2570	2550–2610	– пузирчастий	2300	2100–2450
Граніт біотит-роговообманковий	2640	2600–2680	– пемзовий	2100	2000–2150
Плагіограніт	2650	2570–2700	Діабаз	2850	2750–3100
Тоналіт	2680	2630–2750	Габро	2950	2850–3050
Гранодіорит	2690	2640–2780	Габро олівінове	3080	3020–3100
Андезит масивний	2600	2450–2650	Піроксеніт	3180	2900–3400
– мигдалекам’яний	2350	2150–2500	Перидотит	3200	2850–3300
– пемзовий	2100	1900–2200	Дуніт	3200	3200–3400
Діорит	2810	2670–2920			

$\sigma_{\text{сер}}$ – середнє значення об’ємної густини; $\sigma_{\text{min}} - \sigma_{\text{max}}$ – межі змін густини найбільш поширених відмін.

Залежність величини густини ефузивних порід від їхнього складу є подібною до інтрузивних порід. Тож в загальному випадку за величиною σ_0 можна з певною похибкою прогнозувати їх середній хімічний склад: в нормальному ряду густина зростає від

кислих до основних відмін. Широкий діапазон зміни густини ефузивних порід близького мінерального складу обумовлений як відмінністю сингенетичних структур і текстур, так і подальшими діагенетичними перетвореннями. За близького хімічного складу (ліпарит - кварцовий порфір, андезит – порфірит, базальт – діабаз) густина палеотипних порід, як правило, дещо вища від густини їх кайнотипних аналогів. Причиною цього є спонтанна розкристалізація склуватої маси ефузивних порід (спочатку з'являються мікрокристали, а надалі породи набувають зернистої структури), а також епігенетичні перетворення деяких мінералів (розклад плагіоклазу з утворенням хлориту, серициту, епідоту тощо). Безсумнівним є вплив структурних і текстурних чинників на величину густини: при швидкому остиганні лав і значній кількості газів утворюються пористі текстури (пемзові, пузирчасті, мигдалекам'яні тощо) і склуваті структури. За меншої швидкості остигання скло встигає розкристалізуватися, і породи стають кристалічними. В межах одного лавового потоку можуть спостерігатися різноманітні структури і текстури порід, що спричиняє значну неоднорідність за густиною. Відмінності сингенетичних структур і текстур відображаються в величинах пористості та густини головним чином в кайнотипних ефузивах, пористість же палеотипних ефузивних порід змінюється в порівняно невеликих межах.

5.2. ГУСТИНА МЕТАМОРФІЧНИХ ТА УЛЬТРАМЕТАМОРФІЧНИХ ПОРІД

Головними факторами метаморфізму гірських порід є:

- температура;
- тиск всебічний, гідростатичний та направлений;
- хімічно активні флюїди та гази,
- привнесення мінеральної речовини тощо.

Підвищення температури може бути пов'язано з зануренням порід на більші глибини, тепловим впливом магми, місцевим підвищенням теплового потоку, припливом глибинних флюїдів та іншими процесами.

Тиск призводить до деформації мінералів та зміні структури пустотного простору, викликає просторову орієнтацію їх в гірських породах. Завдяки деформації виникають нові тріщини, що збільшує інтенсивність переміщення флюїдів та їх хімічних взаємодій з скелетом породи.

Всі фактори можуть приводити до перекристалізації мінералів та гірських порід в залежності від форми метаморфізму.

При будь-яких метаморфічних перетвореннях гірських порід, які пристосовуються до нових термодинамічних умов, відбуваються зміни в фізичних властивостях порід, а в першу чергу в значеннях густини.

Густинні властивості (як і фізичні властивості загалом) метаморфічних порід залежать від: складу вихідних порід, термодинамічних умов і тривалості процесів метаморфізму, змін хімічного складу при метасоматичних перетвореннях. Мінливість мінерального складу обумовлює варіабельність густини в межах однойменних петрографічних груп (див. табл. 5.2) - часто характерною є безперервна зміна густини від вихідної до повністю зміненої породи. Коефіцієнти кореляції густини з вмістом породотвірних мінералів значно нижчі ніж в інтрузивних породах, попри те, що повнокристалічні структури порід і ущільнені текстури обумовлюють невелику пористість метаморфічних порід, яка лише зрідка перевищує 5 %. Характерна для метаморфічних порід сланцюватість не справляє суттєвого впливу на величину густих властивостей.

Густина змінюється в гірських породах за рахунок структурних перебудов при ізохімічних процесах. Ізохімічним метаморфізмом називають метаморфізм, який відбувається без привносу і виносу хімічно активних речовин, склад гірських порід практично не змінюється (наприклад, перетворення вапняку в мармур).

В тому випадку, коли метаморфічні перетворення супроводжуються значним привносом або виносом речовини, відбувається заміщення одних мінералів іншими, тобто відбувається метасоматоз. Такі зміни хімічного складу, відповідно, призводять до змін в густині порід.

Регіональний метаморфізм проникає на великі глибини та охоплює великі площі. Факторами такого метаморфізму є високі температура, тиск, вплив флюїдів. В залежності від їх

співвідношення змінюється і ступінь метаморфізму.

Таблиця 5.2 - Об'ємна густина (кг/м³) метаморфічних порід

Порода	$\rho_{\text{осер.}}$	$\rho_{\text{min}} - \rho_{\text{max}}$	Порода	$\rho_{\text{осер.}}$	$\rho_{\text{min}} - \rho_{\text{max}}$
Філіт	2700	2600-2800	Гнейс піроксеновий	2870	2800-2990
Сланець кременистий	2600	2580-2650	Амфіболіт	3000	2800-3100
Сланець хлоритовий	2760	2720-2800	Піроксеновий кристало-сланець	3050	2900-3250
Сланець актинолітовий	2860	2800-2900	Еклогіт	-	3200-3400
Сланець слюдистий	2650	2600-2750	Чарнокіт	2670	2560-2850
Кварцит	2640	2620-2650	Плагіомігматит	2650	2630-2680
Мармур	2700	2680-2720	Мігматит	2630	2600-2700
Сланець біотитовий	2630	2620-2630	Сланець	2550	2500-2700
Сланець амфіболовий	2770	2750-2800	Роговик	2740	2600-2850
Сланець глиноземистий	2750	2700-2800	Скарн	-	2850-3450
Гнейс біотитовий	2630	2600-2680	Серпентиніт	2500	2450-2550
Гнейс глиноземистий	2740	2700-2780	Габро амфіболітизоване	2850	2800-2900
Гнейс амфіболовий	2850	2750-2900	Дуніт серпентинізований	-	2600-3100

В регіонально метаморфізованих товщах (за умови ізохімічності по макрокомпонентам) спостерігається зростання густини при збільшенні ступеню метаморфічних змін порід. Найбільш різке збільшення густини (на 8-12 %), спостерігається на початкових

етапах перетворення осадових і ефузивних порід, що обумовлено, головним чином, суттєвим зниженням пористості.

Подальше зростання густини, при підвищенні ступеня метаморфізму, відбувається внаслідок утворення поліморфних модифікацій мінералів із більш щільними кристалічними ґратками. При цьому в породах основного складу верхня межа зростання густини в процесі метаморфічних перетворень значно вища ніж в породах кислого складу. До того ж ідентичні зміни термодинамічних умов неоднаково впливають на породи різного мінерального складу. Як наслідок, спостерігається значна диференціація регіонально метаморфізованих осадових і осадово-вулканогенних товщ за густиною.

При **регресивному** метаморфізмі внаслідок зростання пористості і утворення низькобаричних мінералів, густина порід зменшується. Якщо разом з цими процесами відбувається мілонітизація (роздроблення та перетирання гірських порід), то кристалічні сланці, які утворюються, відрізняються сильно пониженою густиною завдяки збільшенню мікротріщинуватості. Таким чином, низькотемпературні породи характеризуються більш низькою густиною порівняно з високотемпературними.

Чарнокитизація та гранітизація – найбільші прояви ультраметаморфізму – призводять до суттєвим змінам в фізичних характеристиках порід. Таким чином, відбувається пониження основності і густини порід. Густина новоутвореної породи при неповному заміщенні мінералів залежить від ступеню гранітизації і від густини вихідної породи. При повній зміні порід і утворенні гранітів їх густина фактично не залежить від мінерального складу вихідної породи.

Динамометаморфізм або катакластичний метаморфізм призводить до пониження густини за рахунок тестурно-структурних змін. При більшому стресі в більш глибоких зонах, де температура підвищується, механічне порушення порід змінюється пластичними деформаціями, відбувається одночасна перекристалізація порід, що часто супроводжується привнесенням речовини, у результаті чого густина може зрости.

Автометаморфізм відбувається в період застигання інтрузивної магми в самому інтрузивному тілі. В процесі серпентинизації найменшу густину мають серпентенити. Їх подальші зміни –

карбонатизація – призводить до нового збільшення густини. При амфіболітизації вихідна порода характеризується пониженою густиною.

Контактовий метаморфізм пов'язаний з проникненням магми в земну кору, він спостерігається на контактах інтрузій та вмщуючих порід. Процеси контактового метаморфізму можуть відбуватися без значних змін хімічного складу вихідної породи, однак в більшості випадків вони супроводжуються підвищенням густини. Наприклад, при утворенні з осадових порід роговиків степінь збільшення густини визначається їх мінеральним складом. Кристалічні сланці, які виникають в результаті проявів метасоматозу глинистих і вапняково-глинистих осадових порід, відрізняються різко підвищеною густиною порівняно з вихідними породами, що обумовлено появою мінералів з високою густиною і різким зменшенням пористості порід.

5.3. ГУСТИНА ОСАДОВИХ ПОРІД

Мінеральна густина осадових порід змінюється в достатньо широких межах (табл. 5.3). Зазвичай найвищі її значення характерні для нормально-уламкових порід, а мінімальні – для евапоритів і каустобіолітів. Мінливість мінерального складу як алотигенної, так і аутигенної складових осадових порід часто обумовлює значні коливання параметру (близько 10 - 15 %) навіть в межах однорідного геологічного тіла, що, за умови низької пористості, може суттєвим чином впливати на величину σ_0 . При зростанні пористості вплив мінерального складу на об'ємну густина зменшується.

В загальному випадку найвищою є густина твердої фази карбонатних порід (σ_T вапняків змінюється переважно від 2710 до 2740 кг/м³, а доломітів - від 2800 до 2900 кг/м³). Дещо нижча густина твердої фази піщаних, алевритових і глинистих порід, значення якої можуть знижуватись до 2200 кг/м³. Водночас, наявність домішок мінералів з високою густиною (гранат, циркон, рутил, ільменіт, каситерит, магнетит, слюди, пірит, сидерит, шамозит тощо) може призвести до значного зростання густини твердої фази порід, яка в окремих випадках може навіть перевищувати 3500 кг/м³. Зниження ρ_T в карбонатних та уламкових породах зазвичай пов'язане із

присутністю опалу, каолініту, алофану та інших мінералів з малою густиною. Густина твердої фази кременистих порід змінюється від 2000 кг/м³ (діатоміт) до більш як 2650 кг/м³ (яшми і кремені). Ще нижчою (в разі відсутності значних кількостей ангідриду) може бути густина твердої фази евапоритів: в мірабіліту вона приблизно дорівнює 1500 кг/м³, у кам'яної солі – 2100 - 2200 кг/м³, у гіпсів – близько 2300 кг/м³. Найнижчі значення густини твердої фази встановлені для графіту і вугілля ($\rho_{\text{т.}} = 1250\text{-}2270$ кг/м³), при цьому низькі значення цього параметру відповідають чистому вугіллю з мінімальною кількістю домішок.

Об'ємна густина осадових порід визначається в першу чергу пористістю, яка обумовлена структурою і діагенезом порід, а в меншій мірі мінеральним складом.

Об'ємна густина осадових порід змінюється в діапазоні 1200 - 3000 кг/м³ і набагато сильніше, ніж в інших породах залежить від пористості, а також від густини рідинної та газової фаз. Вплив цих чинників на осадові породи різного генезису відмінний – для уламкових порід визначальну роль відіграють гранулометричний склад, спосіб сполучення зерен і характер цементації, для колоїдогенних – діа- та епігенетичні перетворення тощо. Вплив пустотного заповнювача на величину густини контролюється величиною відкритої пористості.

Діагенетичні і катагенетичні перетворення осадових порід відбуваються під дією зростаючого геостатичного тиску, результатом чого є незворотне компресійне ущільнення. Відтак однотипні осадові утворення одного типу різних рівнів глибинності можуть суттєво відрізнятися за густиною. Найбільшого ущільнення зазнають пластичні глинисті породи, а найменшого – пісковики з жорстким кварцовим і карбонатним цементом.

В молодих глинистих осадах пористість складає 80%. Якщо пористість зменшується на 35 - 40 %, то густина збільшується до 1800 - 2080 кг/м³. При значних навантаженнях і потужності перекриваючої товщі до 3000 м, густина аргілітів може складати 2400 – 2500 кг/м³, подальше ущільнення можливе тільки при перекристалізації часток, які спостерігаються в глинистих сланцях.

Найбільші можливості до ущільнення мають глини. Піски та пісковики, на відміну від глин, більш різко реагують на літологічне ущільнення. Добре відсортований пісок на дні водойми може мати

пористість 40 %, яка на глибинах 1 - 1,5 км під дією навантаження порід, що вище залягають, зменшується до 6 - 10% і, відповідно густина збільшується до 2400 - 2600 кг/м³, на більших глибинах ущільнення і збільшення густини відбувається більш повільно.

Таблиця 5.3 – Мінеральна та об'ємна густина поширених осадових порід (в кг/м³) за [123]

Порода	$\delta_{\text{Мсер}}$	$\delta_{\text{М min}} - \delta_{\text{М max}}$	$\sigma_{\text{Omin}} - \sigma_{\text{Omax}}$	σ_0 найпоширеніших відмін
Глина	2680	2580–2780	1200–2400	—
Аргіліт	2680	2600–2780	1700–2900	2300–2400
Глинистий сланець	2700	2650–2800	2300–3000	2400–2600
Пісок	2650	2560–2760	1300–2000	1500–1700
Алевроліт	2690	2620–2760	1800–2800	2300–2500
Піщаник	2670	2580–2760	2000–2900	2500–2600
Піщаний сланець	2710	2650–2900	2300–3000	2600–2700
Брекчія*			1600–3000	
Конгломерат*			2100–3000	
Мергель	2700	2580–2800	1500–2800	2200–2400
Вапняк	2720	2620–2800	1800–2900	2600–2700
Доломіт	2800	2760–2950	1900–3000	2600–2800
Крейда	2690	2560–2800	1200–2700	1500–2600
Гіпс	2370	2310–2480	2100–2500	2400–2500
Ангідрит	2960	2920–3000	2400–2900	2500–2600
Сіль кам'яна	2160	2120–2220	2200–2300	
Опока	2450	2200–2500	1000–1600	
Кремій	2590	2450–2750	2300–2600	
Вугілля		1200–1900	1100–1800	

Середня об'ємна густина порід нерідко зменшується к склепінню локальних позитивних структур, де зазвичай зменшується глинистість і збільшується відсортованість і пористість порід.

Перетворення карбонатних осадків в породу та їх ущільнення відбувається також при порівняно невеликих статичних тисках, на глибинах до 1 км густина вапняків і доломітів складає 2500 - 5600 кг/м³. Густина карбонатних порід позитивних структур тісно пов'язана з їх положенням в самій структурі. Зазвичай в склепінні

структури розвинуті переважно вапняки, а по направленню до крил зростає вміст доломітів, що і веде до збільшення густини. Зменшення густини до склепіння також пов'язано з збільшенням їх тріщинуватості [123].

Зростанню густини сприяють також утворення гематитового, сидеритового, піритового цементу, процеси дегідратації водовмісних мінералів.

Для гідрохімічних осадків діагенез не має сильного впливу, оскільки ці породи вже на стадії осадконакопичення характеризуються мінімальною пористістю, при діагенезі порід з глибиною відмічається підвищення густини з збільшенням віку порід.

Загальна закономірність зміни густини водонасичених ($\sigma_{\text{вн}}$) однотипних і одновікових порід із глибиною може бути виражена емпіричним рівнянням (М. Л. Озерська):

$$\sigma_{\text{вн}} = \delta_m + (1 - \delta_m) \cdot K_{\text{пmax}} \cdot e^{-0,45H},$$

де H – глибина залягання порід, $K_{\text{пmax}}$ – граничне значення коефіцієнта пористості при $H = 0$, δ_m – мінеральна густина.

При інтерпретації петрогустинних даних слід враховувати також залежність густини від умов утворення та існування порід, вплив яких, як правило, найбільш чітко проявляється за рахунок зміни густини мінералів та пористості порід.

Вплив мінерального складу на об'ємну густину осадових порід, як вже вказувалося, не є основним. Але наявність аксесорних мінералів (сидериту, піриту тощо) підвищує густину на 100 - 200 кг/м³. Особливо це характерно для осадових утворень складчастих регіонів та областей зносу в платформному чохлі. Великий вплив на густину має тип цементу. Заміна глинистого цементу в пісковиках та конгломератах на карбонатний збільшує їх густину на 200 кг/м³. В той же час наявність глинистого цементу в карбонатних породах знижує їх густину.

Таким чином, в осадових породах межі зміни густини в рамках навіть одного літологічного різновиду можуть бути доволі широкі. Наприклад група вапняків може містити 4 - 5 різновидів від вапняку рихлого з густиною 1800 – 2250 кг/м³ до вапняку кристалічного з густиною 2700 – 2900 кг/м³, а збагачення породи рудними мінералами призведе до ще одного збільшення густини навіть до 3500 кг/м³

В результаті, дуже вірогідними є близькі за значеннями величини густинних параметрів в істотно відмінних (за складом, генезисом, структурою) породних видозмінах геологічних об'єктів. З іншого боку, частими є ситуації коли дуже близькі за складом і генезисом породи через другорядні відмінності (в тому числі викликані епігенетичними процесами), можуть істотно відрізнятись за величиною густини.

Знання густини є необхідним для побудови петрогустинних моделей земної кори, мантії та Землі в цілому, моделювання геологічних процесів, підрахунку запасів корисних копалин, для планування і інтерпретації гравіметрії тощо.

КНИГА 2. АПАРАТУРА І МЕТОДИКА ГРАВІМЕТРИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

6. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ПРИНЦИПИ ПОБУДОВИ ГРАВІМЕТРІВ

6.1. БАЛІСТИЧНИЙ МЕТОД АБСОЛЮТНИХ ВИМІРЮВАНЬ ПРИСКОРЕННЯ СИЛИ ТЯЖІННЯ

Маятникові абсолютні вимірювання прискорення сили тяжіння обтяжені рядом систематичних помилок, і одержати результати з високою точністю дуже важко. Передові досягнення науки і техніки у 50 – 60 роках минулого століття дали можливість конструювання нового типу приладів, що ґрунтуються на вільному падінні тіла. Балістичний метод абсолютних визначень базується на законі прямолінійного рівноприскореного руху тіла [98], згідно з яким

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{gt^2}{2}, \quad (6.1)$$

де s_0, v_0 – шлях і швидкість в початковий момент часу,

s – шлях, пройдений падаючим тілом,

t – час падіння тіла,

g – прискорення сили тяжіння.

Якщо покласти в рівнянні (6.1) $s_0 = 0$ і $v_0 = 0$, то

$$s = \frac{gt^2}{2}.$$

Для визначення g необхідно виміряти шлях s і час t , забезпечуючи при цьому падіння тіла в вакуумі. При вимірюваннях балістичним методом спостерігають рух тіла на відрізьку до 1 м, щоб забезпечити відносну точність (10^{-8} – 10^{-9}). Оскільки прискорення сили тяжіння на цьому відрізьку змінюється, то необхідно врахувати вертикальний градієнт сили тяжіння $W_{zz} = 0,3 \frac{\text{мГал}}{\text{м}}$. З врахуванням цього для співвідношення (6.1) представимо в вигляді:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{g_0 t^2}{2} + \frac{W_{zz}}{2} \left(s_0 + \frac{1}{3} v_0 t + \frac{1}{12} g_0 t^2 \right) t^2, \quad (6.2)$$

звідси

$$g_0 = \frac{2}{t^2} (s - s_0 - v_0 t) - W_{zz} \left(s_0 + \frac{1}{3} v_0 t + \frac{1}{12} g_0 t^2 \right). \quad (6.3)$$

Останній член, що виражає вплив вертикального градієнта на прискорення сили тяжіння для вихідних даних $s = 1$ м, $s_0 = 0,05$ м,

$v_0 = 1 \frac{\text{м}}{\text{с}} t = 0,35 \text{ с}$, може досягати 0,08 мГал, що набагато перевищує точність вимірювань балістичним методом. Слід зауважити, що в формулі (6.3) величини s_0 і v_0 є невідомими, а g_0 – прискорення сили тяжіння в початку координат. Для визначення g_0 , необхідно зафіксувати як мінімум три положення тіла та розв'язати систему рівнянь вигляду (6.3). Точки траєкторії, в яких фіксується положення тіла, називають станціями. Існує декілька варіантів балістичного методу, які поділяють на симетричні і несиметричні. При симетричних способах спостерігають вільний рух підкинутого догори тіла до вершини траєкторії і вниз. При несиметричних способах спостерігають падіння тіла тільки вниз.

6.2. ОСНОВНІ ПРИНЦИПИ ПРИСТРОЮ БАЛІСТИЧНОГО ГРАВІМЕТРА

Щоб у загальних рисах описати основні особливості вимірювання поля тяжіння за допомогою балістичного гравіметра, уявимо, що невелике тіло падає в вакуумі всередині циліндра під дією одного тільки поля тяжіння (рис. 6.1) [99].

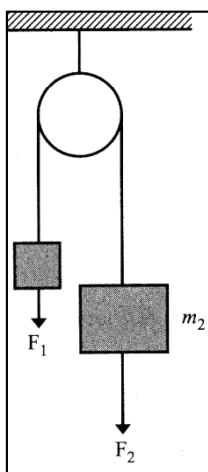


Рис. 6.1. Пристрій Етвуда

6.2.1 . Рівняння руху

Згідно з другим законом Ньютона в інерційній системі ми маємо

$$m \frac{d^2 s(t)}{dt^2} = F(t) = mg(t). \quad (6.4)$$

Тут m – маса невеликого тіла, $s(t)$ – відстань між положенням маси в початковий момент і положенням тіла і момент t , g – магнітуда (значення) поля тяжіння. Приймаючи, що об'єм повітря в циліндрі дуже малий, впливом сили тертя можна знехтувати.

У процесі руху тіло досягає поверхні Землі, і відповідно, поле g зростає. Оскільки зміна відстані дуже мала в порівнянні з радіусом Землі, можна припустити, що в інтервалі довжин, в якому ми вивчаємо рух, поле змінюється лінійно, тобто

$$g(t) = g_0 + \frac{\partial g}{\partial s} s = g_0 + as. \quad (6.5)$$

По суті, ми розклали магнітуду поля в степеневий ряд і виключили всі члени, крім першого і другого. Іншими словами, ми допускаємо, що в межах інтервалу вимірювань швидкість зміни поля складає:

$$a = \frac{\partial g}{\partial s} \quad (6.6)$$

постійна. З рівнянь (6.4) і (6.5) ми маємо

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} = g_0 + as. \quad (6.7)$$

З останнього рівняння необхідно визначити поле g_0 в початковій точці. Спочатку розглянемо найпростіший випадок, в якому можна знехтувати зміною поля тяжіння. Тоді рівняння (6.7) прийме вигляд

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} = g_0. \quad (6.8)$$

Щоб розв'язати рівняння (6.8), проінтегруємо його і отримаємо

$$\frac{ds}{dt} = g_0 + C_1 \quad \text{і} \quad s(t) = g_0 \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2. \quad (6.9)$$

Обидві постійні визначаються з двох початкових умов:

$$s(0) = s_0 \quad \text{і} \quad \frac{ds}{dt} = v_0 \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Отже, друге рівняння з системи (6.9) перетвориться в

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{gt^2}{2}. \quad (6.10)$$

Зокрема, якщо $s_0 = 0$ і $v_0 = 0$, отримуємо

$$s(t) = g_0 \frac{t^2}{2}. \quad (6.11)$$

В подальшому передбачимо, що поле лінійно змінюється вздовж шляху руху. Тоді вільне падіння тіла описується рівнянням (6.5):

$$\frac{d^2 s}{dt^2} - as = g_0. \quad (6.12)$$

Це неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку з постійним коефіцієнтом a , і g_0 – його права частина. Параметр a дуже малий, приблизно він дорівнює

$$a = 2G \frac{M}{R^2} = \frac{2g}{R} \approx 2 \frac{10^3}{6.4 \times 10^6} \frac{\text{Гал}}{\text{м} \approx 0,3 \text{ м}}.$$

Відповідно, рівняння (6.12) може бути розв'язано шляхом розкладання розв'язку в ряд за цим параметром:

$$s(t, a) = s_1(t) + as_2(t) + \dots. \quad (6.13)$$

Його підстановка в рівняння (6.12) дає

$$\frac{d^2 s_1}{dt^2} + a \frac{d^2 s_2}{dt^2} - a(s_1 + as_2) - g_0 = 0.$$

Прирівнюючи члени з однаковим ступенем a , отримаємо

$$\frac{d^2 s_1}{dt^2} = g_0 \quad \text{і} \quad \frac{d^2 s_2}{dt^2} = s_1(t). \quad (6.14)$$

Як слідує з рівняння (6.10),

$$s_1(t) = s_0 + v_0 t + \frac{g_0 t^2}{2},$$

це є першим наближенням. Підставляючи останнє в друге рівняння системи (6.14), отримуємо

$$\frac{d^2 s_2}{dt^2} = s_0 + v_0 t + g_0 \frac{t^2}{2}.$$

Інтегрування цього рівняння дає

$$s_2(t) = \frac{1}{2} s_0 t^2 + \frac{1}{6} v_0 t^3 + \frac{1}{24} g_0 t^4 + C_1 t + C_2 \quad (6.15)$$

З початкових умов маємо

$$s_0 + C_2 = s_0 \quad \text{і} \quad v_0 + C_1 = v_0$$

$$\text{або} \quad C_1 = 0 \quad \text{і} \quad C_2 = 0.$$

$$(6.16)$$

Потім, у відповідності з рівнянням (6.13), отримаємо

$$s(t, a) = s_0 + v_0 t + g_0 \frac{t^2}{2} +$$

$$+ \frac{a}{2} \left(s_0 + \frac{1}{3} v_0 t + \frac{1}{12} g_0 t^2 \right). \quad (6.17)$$

Це співвідношення між невідомим полем g_0 і двома вимірними величинами, а саме відстанню s та часом t за умови, що ми нехтуємо членами, пропорційними квадрату коефіцієнта a , та членами вищого порядку. Крім того, це рівняння містить три невідомих параметри, а саме положення маси s_0 в момент початку вимірювання часу, початкову швидкість v_0 в цей же момент і також швидкість зміни поля тяжіння a вздовж вертикалі. Таким чином, для вирішення задачі та знаходження поля нам необхідно виміряти відстань s в чотири моменти часу. Якщо s_0 відомо, кількість цих вимірів зведеться до одного. У сучасній апаратурі коефіцієнт при останньому члені в правій частині рівняння (6.17) має значення приблизно 100 мкГал і визначається шляхом обчислення як поправочний коефіцієнт $\vartheta(v_0, g_0, t, a)$. У випадку, коли ми можемо вважати s_0 рівним нулю, досить провести вимірювання тільки для двох моментів часу.

6.2.2. Методи польових вимірювань

Є два балістичних методи вимірювання поля [99]. Один з них несиметричний, в ньому ми спостерігаємо вільне падіння тіла. Другий – так званий симетричний. У цьому випадку ми вивчаємо рух тіла вгору та вниз.

6.2.2.1. Несиметричний рух

В принципі, поле можна визначити наступним чином. У процесі падіння тіло проходить через три положення s_0 , $s(t_1)$, і $s(t_2)$, це відбувається в моменти $t_0 = 0$, t_1 і t_2 відповідно. Відстані вимірюються від положення s_0 (рис.6.2, а). У відповідності з рівнянням (6.17) для моментів t_1 і t_2 маємо

$$s(t_1) = s_0 + v_0 t_1 + \frac{g_0}{2} t_1^2 + \vartheta_1(v_0, g_0, t, a)$$

і

$$s(t_2) = s_0 + v_0 t_2 + \frac{g_0}{2} t_2^2 + \vartheta_2(v_0, g_0, t, a). \quad (6.18)$$

Зокрема, якщо $s_0(0) = 0$,

$$s(t_1) = v_0 t_1 + \frac{g_0}{2} t_1^2 + \vartheta_1$$

i

$$s(t_2) = v_0 t_2 + \frac{g_0}{2} t_2^2 + \vartheta_2. \quad (6.19)$$

Помноживши перше і друге рівняння системи (6.19) на t_2 і потім на t_1 відповідно, виключаємо член з початковою швидкістю, і це дає

$$g_0 = \frac{2}{t_2 - t_1} \left[\frac{s(t_2)}{t_2} - \frac{s(t_1)}{t_1} \right] + \vartheta, \quad (6.20)$$

де ϑ – поправочний коефіцієнт, що залежить від a, v_0, g_0, t_1 і t_2 і, як було зазначено, ця поправка не вимірюється, а обчислюється.

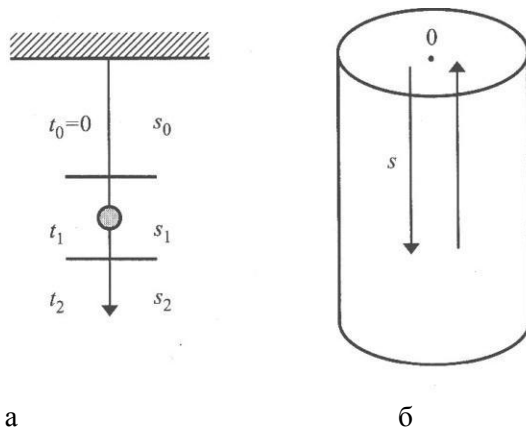


Рис. 6.2. Ілюстрація двох балістичних методів вимірювання поля: а - несиметричний рух, б -симетричний рух

Ми отримали рівняння для оцінки поля тяжіння g_0 , використовуючи спостереження за тілом, що вільно падає, в двох інтервалах. Пристрої, засновані на цьому принципі, дозволяють вимірювати абсолютне значення поля з похибкою $10^{-8} - 10^{-9}$ щодо повного поля Землі.

6.2.2.2 Симетричний рух

При цьому підході тіло підкидається вгору, а потім падає вздовж того ж шляху. Спостереження виконуються при проходженні двох

фіксованих положень при русі вгору і вниз (рис.6.2, .б). Звичайно, всередині циліндра, де відбувається рух, завжди є якась кількість повітря, проте цей підхід дозволяє зменшити його вплив краще, ніж у попередньому методі. Це пов'язано з тим, що опір повітря однаковий при русі в різних напрямках. Проте в одному випадку сила тертя і поле g мають однаковий напрямок, тоді як у другому випадку вони протилежні один одному. При симетричному підході ми вимірюємо моменти, коли маса проходить верхнє і нижнє положення. Пункт 0 – це початок, що відповідає найвищому положенню тіла, де

$$s_0 = 0 \quad \text{і} \quad v_0 = 0.$$

Потім рівняння (6.17) перетвориться до виду

$$s\left(\frac{t_2}{2}\right) = \frac{g_0}{2}\left(\frac{t_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{24}ag_0\left(\frac{t_2}{2}\right)^4$$

і

$$s\left(\frac{t_1}{2}\right) = \frac{g_0}{2}\left(\frac{t_1}{2}\right)^2 + \frac{1}{24}ag_0\left(\frac{t_1}{2}\right)^4. \quad (6.21)$$

Відстань між пунктами

$$H = s(t_2) - s(t_1) = \frac{g_0}{8}(t_2^2 - t_1^2) + a\frac{g_0}{24}\frac{t_2^4 - t_1^4}{16}, \quad (6.22)$$

звідки можна отримати

$$g_0 = \frac{8H}{t_2^2 - t_1^2} + \frac{a}{48}(t_2^2 + t_1^2) \quad (6.23)$$

Описані вище прості рівняння були приведені в основному для ілюстрації. У той же час визначення поля може виконуватися безперервно при русі невеликого тіла. Передбачимо, що генератор створює лазерну хвилю із заданою частотою і є два відбивача: один прикріплений до тіла, що падає, другий нерухомий і розташований, наприклад, на дні циліндра. Хвилі, створені генератором, досягають відбивачів, і відповідно виникають дві відбиті хвилі, їхнє накладання вимірюється датчиком, розташованим, наприклад, в верхній частині циліндра. Ці дві хвилі мають однакові частоти, і для простоти приймемо, що вони мають також однакові амплітуди. Тоді амплітуда їх суми є функцією зсуву фаз між ними. У процесі падіння тіла відстань $s(t)$, яку проходить одна відбита хвиля, змінюється, і це також призводить до зміни фази. Зрозуміло, що максимальна амплітуда спостерігається в випадку конструктивної інтерференції, тобто різниця фаз пропорційна $2\pi n$ (n – ціле), тоді як у випадку

деструктивної інтерференції амплітуда дорівнює нулю. Звичайно, цей процес описується синусоїдальною функцією:

$$C + A \sin \sin \left(2 \frac{2\pi s}{\lambda} \right) + \phi_0.$$

Тут C і ϕ_0 – деякі постійні, λ – довжина хвилі лазера, дуже мале число. Наприклад, якщо рух задається рівнянням (6.11), маємо

$$C + A \sin \sin \left(2 \frac{2\pi g_0 t^2}{\lambda} \right) + \phi_0.$$

Тут множник 2 перед першим членом аргументу пов'язаний з тим, що $2s$ – загальна довжина падаючого та відбитого променів. Очевидно, що частота виміряної синусоїди

$$f = \frac{g_0 t}{\lambda}$$

і вона лінійно зростає з часом. Вимірювання цієї величини дозволяють визначити поле в початковій точці шляху. Балістичний пристрій також має вакуумний циліндр, усередині якого рухається тіло, воно має форму тригранного відбивача. На дні циліндра є пристрій (пружний елемент), який підкидає тіло вгору. Максимально високе положення тіла становить приблизно 0,5 м, довжина циліндра – близько 1 м.

Аналізуючи результати цього розділу доцільно зробити наступні зауваження.

1. Для досягнення високої точності приблизно в $5 \times 10^{-7} \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ потрібно вжити виключних заходів щодо зниження перешкод. Якщо навіть у камері з падаючим тілом повітря відкачано до тиску 10^{-4} Па, гальмування через зіткнення з молекулами все одно буде джерелом суттєвої похибки. Ця похибка практично виключається шляхом розміщення чутливої маси на механічну каретку, що падає разом з масою, та застосовуючи виконавчі приводи, що приводяться в рух оптичною системою, для підтримки положення каретки щодо маси. Каретка розштовхує залишкові молекули газу перед падаючої чутливої масою, таким чином, досягається практично вакуумне середовище. В якості додаткової переваги каретка служить підйомником, який ловить чутливу масу в нижній точці падіння і повертає її у вихідне положення вгорі камери.

2. Друге важливе джерело завад – коливання оточуючого середовища. Звичайно, вся вимірювальна система монтується на відповідні гумові ізоляційні прокладки. Проте для необхідного рівня

точності цього виявляється недостатньо. Залишкові коливання виключаються з сигналу шляхом закріплення нижньої частини оптичної відбиваючої системи на струну, яка керується електронною схемою сервопривода, яка реєструє рух струни. Таким способом може бути отриманий ефективний вільний період коливання струни до 60 сек, а коливання середовища можуть бути виключені з вимірюваного сигналу.

3. Після прийняття цих заходів основними джерелами перешкод, які залишаються, є оптична система та електроніка, а також дія сили Коріоліса, кожне з цих джерел вносить помилку приблизно 5×10^{-8} с. Однак є ще кілька джерел перешкод з ефектом в діапазоні 10^{-8} с.

6.3. СУЧАСНІ ПРИЛАДИ ДЛЯ ВИМІРЮВАНЬ БАЛІСТИЧНИМ МЕТОДОМ

Перший балістичний гравіметр побудований Весло Фаллером і Хемондом в 1968р. Його головна частина лазерний інтерферометр для спостереження вільного падіння кутового відбивача. За результатами вимірювань визначалися прискорення сили тяжіння і значення її вертикального градієнта. При підтримці ВПС США розробка й удосконалювання гравіметра проводилися до 1980 р. Вдосконалення балістичних гравіметрів продовжується і в наші дні.

Транспортабельний балістичний гравіметр був створений в Інституті метрології України (Харків). Портативний балістичний гравіметр PBGM-97 в той же час був розроблений у Польщі. Його вага не перевищує 50 кг.

В Радянському створений балістичний гравіметр ГАБЛ, в основу дії якого покладений спосіб спостереження за тілом, що вільно падає (рис. 6.4). Гравіметр складається з пристрою падіння пробної маси, електронно-лічильного блоку з кварцовим генератором для вимірювання часу, лазерного інтерферометра для вимірювання шляху, пристрою автоматичного керування та реєстрації результатів вимірів.

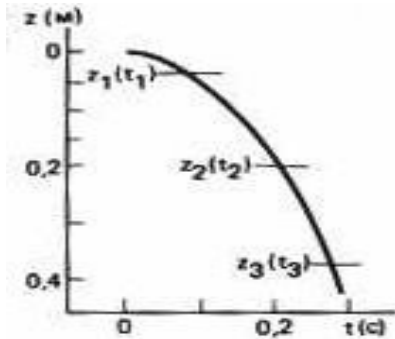


Рис.6.3 До виводу формули прискорення балістичним методом

Фізично гравіметр складається з вакуумної камери циліндричної форми, у верхній частині якої закріплений електромагніт, що утримує пробну масу – кутовий відбивач. Кутовий відбивач у верхньому положенні утримується за допомогою феритової пластини, яка закріплена в корпусі відбивача і трьох голок, укріплених у корпусі циліндра. Корпус приладу виготовлений з немагнітної нержавіючої сталі.

При розмиканні контактів електромагніту кутовий відбивач вільно падає, а в нижній частині циліндра захоплюється трьохпелюстковим пружинним клином. Підйом пробної маси проводиться за допомогою електромагніту, що укріплений з зовнішньої сторони вакуумної камери. Електромагніт керований електромотором рухається по зовнішній стороні камери і піднімає пробну масу у вихідне положення. Падіння реєструється лазерним двопроменевим інтерферометром Майкельсона, який дозволяє проводити вимірювання з точністю до 10^{-9} вимірюваної довжини (рис.6.5).

Для вимірювання сили тяжіння з необхідною точністю необхідно відстані вимірювати з точністю $\pm 0,5$ нм, а час з точністю 0,2 нс.

Вимірювання починаються через 0,08 с після початку падіння. Процес вимірювань повністю автоматизований. Підготовка приладу до вимірів складає 12 годин. При вимірах проводиться серія падінь пробної маси. Спостереження проводять не в трьох, а в більшому числі положень (до 600) і методом найменших квадратів знаходять найбільш вірогідне значення сили тяжіння.

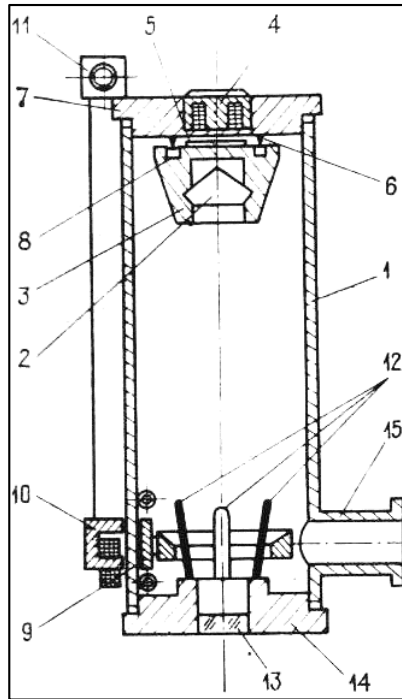


Рис. 6.4 Схема балістичного гравіметра ГАБЛ:

1 - вакуумна камера, 2 - кутовий відбивач, 3 - корпус, 4 - електромагніт, 5 - феритова пластина, 6 - голки, 7 - циліндр, 8 - опори, 9 - каретка, 10 - електромагніт, 11 - електромотор, 12 - трьохпелюстковий пружинний клин.

При обробці вводять поправки за залишковий тиск в вакуумній камері та неоднорідність гравітаційного поля. При вимірюванні методом вільного падіння мікросейсми виявляються головним чинником похибки вимірювань.

Прилад як транспортабельний використовується з 1976 р. Його вага 250кг і він дозволяє проводити вимірювання з похибкою ± 10 мкГал. Випробування приладу підтвердили його паспортні характеристики.

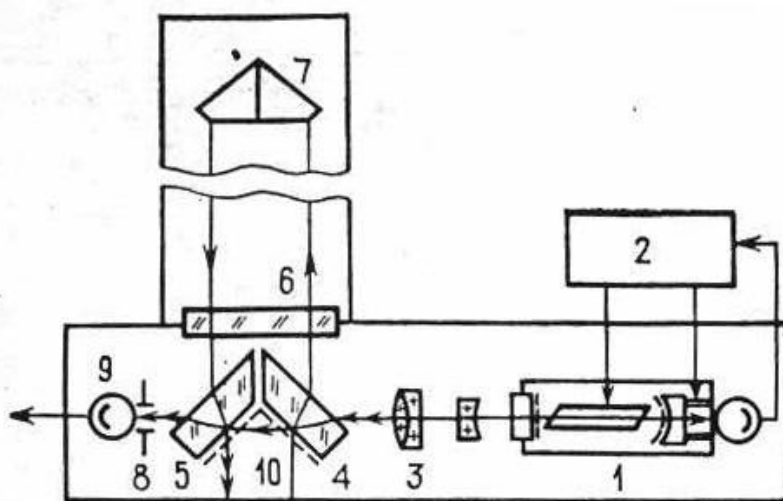


Рис. 6.5 Реєструючий пристрій гравіметра ГАБЛ:

1 - багаточастотний гелій-неоновий лазер, 2 - система стабілізації частоти випромінювання та живлення лазера, 3-7 - двопроменевий інтерферометр, 8 і 9 - вихідний реєструючий пристрій.

У ЦННІГак малою серією випускався гравіметр близької конструкції під маркою ГБЛ з похибкою вимірювань краще 0.01 мГал. Подальшим вдосконаленням балістичних гравіметрів була розробка польового варіанта приладу ГБЛ-П.

Абсолютне значення поля сили тяжіння в даний час вимірюють за допомогою балістичних гравіметрів. Метод вимірювання абсолютних значень сили тяжіння полягає у реєстрації часу вільного падіння пробної маси в вакуумній камері з відомої висоти.

З урахуванням неоднорідності гравітаційного поля рівняння руху пробної маси має вигляд:

$$S_i = h + v_0 T_i + \frac{1}{2} g_0 T_i^2 + \frac{1}{6} \gamma \left(v_1 T_i^3 + \frac{1}{4} g_1 T_i^4 \right) + \varepsilon, \quad (6.24)$$

За результатами N вимірювань під час падіння пробної маси методом найменших квадратів отримаємо формулу визначення сили тяжіння:

$$g = \frac{2}{\Delta} \left| \frac{N \sum T_i \sum S_i - \frac{1}{6} \gamma \left(V_1 T_i^3 + \frac{1}{4} g_1 T_i^4 \right)}{\sum T_i \sum T_i^2 \sum \left[S_i - \frac{1}{6} \gamma \left(V_1 T_i^3 + \frac{1}{4} g_1 T_i^4 \right) \right] T_i}, \right. \\ \left. \frac{\sum T_i^2 \sum T_i^3 \sum \left[S_i - \frac{1}{6} \gamma \left(V_1 T_i^3 + \frac{1}{4} g_1 T_i^4 \right) \right] T_i^2}{\sum T_i^2 \sum T_i^3 \sum T_i^4} \right|, \quad (6.25)$$

де

$$\Delta = \left| \frac{N \sum T_i \sum T_i^2}{\sum T_i \sum T_i^2 \sum T_i^3}, \right. \\ \left. \frac{\sum T_i^2 \sum T_i^3 \sum T_i^4}{\sum T_i^2 \sum T_i^3 \sum T_i^4} \right|. \quad (6.26)$$

Для досягнення високої точності визначення місця розташування і часу проводиться 600 вимірів за час одного падіння. Вимірювання часу і відстаней здійснюються з високою точністю лазерним способом.

В даний час вимірювання сили тяжіння здійснюються приладами типу ГАБЛ-Е (гравіметр абсолютний балістичний лазерний еталонний) (рис. 6.6.).

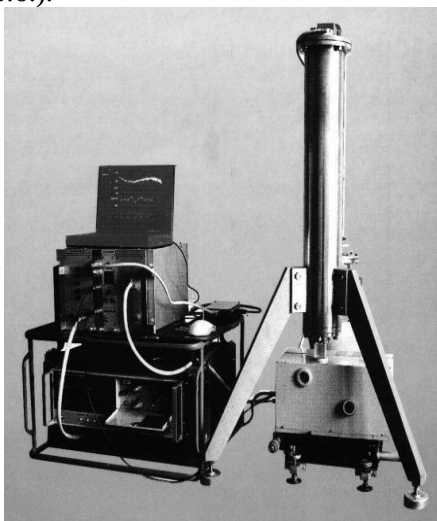


Рис. 6.6. Балістичний гравіметр ГАБЛ-Е.

Технічні характеристики ГАБЛ-Е: Похибка виміру – 5 мкГал;
Вага - 180 кг.

Метрологічними порівняння, проведеними в Міжнародному бюро мір і ваг у Парижі в 1997 р. підтверджено, що ГАБЛ-Е по точності і надійності вимірювань знаходиться на рівні кращих світових аналогів, розроблених у США, Франції та Італії. ГАБЛ-Е за вагою і габаритами вдвічі перевершує зарубіжні аналоги.

6.4 ТОЧНІСТЬ АБСОЛЮТНОГО ВИМІРЮВАННЯ ПРИСКОРЕННЯ СИЛИ ТЯЖІННЯ БАЛІСТИЧНИМ МЕТОДОМ І ДЖЕРЕЛА ПОХИБОК МЕТОДУ

Для різних варіантів балістичного методу абсолютних визначень прискорення сили тяжіння (симетричного та несиметричного рухів) припускається, що падіння тіла є вільним, а елементи інтерферометра є нерухомими [98]. При цьому вплив джерел похибок можна розділити на дві основні групи, що враховують, з одного боку, вплив зовнішніх факторів, а з іншого – похибки приладу. До першої групи можна віднести:

- вплив залишкового тиску в вакуумній камері;
- вплив електричного та магнітного полів;
- вплив мікросейсмів на стабільність апаратури та стабільність падаючого кутового відбивача.

Друга група похибок пов'язана з конструктивними особливостями приладу, а найголовніше – способом вимірювання відстані та часу. До другої групи, між іншим, слід віднести такі джерела похибок:

- нестабільність руху падаючого тіла (обертання, коливання);
- запізнення світлового сигналу;
- відхилення світлового променя лазера від вертикалі;

В способі трьох станцій поправка, яка враховує вплив залишкового тиску виражається співвідношенням:

$$\delta_g = \frac{K}{m} P \left[v_0 + \frac{g_0}{3} (T_1 + T_2) \right], \quad (6.27)$$
$$K = \frac{S}{V},$$

де: S – поверхня падаючого тіла,

V – теплова швидкість молекул (при 0°C і $V_0=500\text{м/с}$),

P – залишковий тиск,
 m – маса падаючого тіла,
 T_1 і T_2 – задані проміжки часу.

У симетричних методах вплив залишкового тиску повітря не відіграє суттєвої ролі. На рух намагнічених і наелектризованих тіл впливають електромагнітні сили. Якщо кутовий відбивач є носієм заряду, то в вимірюване значення сили тяжіння вноситься похибка, обумовлена взаємодією заряду з електромагнітними полями. За допомогою екранування від зовнішнього електромагнітного поля та вилучення електростатичних зарядів у самому приладі можна послабити цей вплив до 10 мкГал. Важливим джерелом похибок при вимірюваннях вільного падіння тіла за допомогою балістичного гравіметра є мікросейсмічні коливання. Дослідження показали, що мікросейсми (хвилювання моря, вітер, землетруси, транспорт і промислові установки) з частотою від 1 до 100 Гц мають амплітуди від 0,3 до 1 мкм, тобто такого порядку, як довжина хвилі гелієво-неонового лазера, які найчастіше використовуються в сучасних балістичних гравіметрах. Частково вплив коливань мікросейсмів на результати вимірювання можна виключити якщо:

- збільшити кількість вимірювань;
- встановити прилад на спеціальній підставці, яка має захист від мікроколивання фундаменту;
- підвісити нерухому призму на важелі довгоперіодного сейсмографа.

Обертання кутового відбивача відносно центра ваги виникає в момент його звільнення внаслідок бічного імпульсу сили, який створює катапульта або спусковий пристрій приладу. Якщо оптичний центр не збігається з центром ваги, тоді обертання відбивача приведе до додаткової різниці ходу інтерференційного пучка. При ретельному виготовленні відбивача добиваються невідповідності центрів 10^{-4} см, що дозволяє зменшити похибки до 10^{-4} мГал. В процесі вимірювання змінне плече інтерферометра безперервно зменшується або збільшується. Затримка світлового сигналу від падаючого відбивача, обумовлена кінцевою швидкістю розповсюдження світла, буде змінюватись, вимірний час падіння тіла в першому випадку буде зменшеним, а в другому відповідно збільшеним. Для методу трьох станцій поправку, обумовлену

кінцевою швидкістю розповсюдження світла, можна обчислити за формулою

$$\Delta q_c = \frac{g_0}{c} [3v_0 + g_0(T_1 + T_2)] . \quad (6.28)$$

У симетричних методах (двох станцій) тіло рухається у двох напрямках, і середній зареєстрований час незалежний від впливу швидкості світла. Якщо пучок світла, який падає на кутовий відбивач, відхиляється від вертикалі на кут α , то інтерференційним методом буде виміряна не відстань s , а її завищене значення $s' = \frac{s}{\cos \alpha}$. Систематична похибка при цьому буде

$$\delta_s = s \frac{\alpha^2}{2} \text{ і } \delta_g = g \frac{\alpha^2}{2}. \quad (6.29)$$

Якщо допустима похибка $\delta_g = 1$ мкГал, тоді можна одержати величину α

$$\alpha = 9,22''.$$

За допомогою автоколімаційного рівня та штучного ртутного горизонту можна орієнтувати світловий промінь з похибкою $5''$. Крім зазначених вище джерел, існує ще ряд інших, які є характерними для конкретного типу приладу. Тут слід зазначити помилки фазометра, помилки стабільності несучої хвилі лазера, помилки синхронізації та інші.

Так, при способі трьох станцій точність вимірювання часу та відстані можна оцінити за формулою:

$$g_0 = \frac{2S_2(b-a)}{T_2^2 b(1-b)}, \quad (6.30)$$

$$\text{де } a = \frac{S_1}{S_2}; \quad b = \frac{T_1}{T_2},$$

або можна використовувють спрощений вираз

$$g_0 = \frac{2S_2}{T_2^2}. \quad (6.31)$$

Логарифмуючи і диференціюючи цей вираз, можна перейти до середньоквадратичних похибок

$$\left(\frac{m_g}{g}\right)^2 = \left(\frac{m_{S_2}}{S_2}\right)^2 + \left(\frac{2m_{T_2}}{T_2}\right). \quad (6.32)$$

Якщо вважати однаковим вплив виміряного часу та відстані і прийняти точність визначення сили тяжіння $m_g = 0,01$ мГал, то одержимо

$$\frac{m_{S_2}}{S_2} = \frac{2m_{T_2}}{T_2} = 0,71 \cdot 10^{-8}.$$

Підставимо замість $S_2 = 1$ м і відповідний час $T_2 = 0,36$ с, отримаємо точності вимірювання довжини шляху і часу $m_{S_2} = 0,71 \cdot 10^{-2}$ мкм, $m_{T_2} = 0,13 \cdot 10^{-8}$ с. У випадку методу двох станцій використовують вираз

$$g_0 = \frac{8H}{T^2 - \tau^2}. \quad (6.33)$$

Діючи так само, як і при використанні способу трьох станцій для середньоквадратичних похибок, одержуємо

$$\left(\frac{m_g}{g}\right)^2 = \left(\frac{m_H}{H}\right)^2 + \left(\frac{2Tm_T}{T^2 - \tau^2}\right)^2 + \left(\frac{2\tau m_\tau}{T^2 - \tau^2}\right)^2. \quad (6.34)$$

При $\frac{m_g}{g} = 1 \cdot 10^{-8}$ отримаємо

$$\frac{m_H}{H} = 2\sqrt{2} \frac{2Tm_T}{T^2 - \tau^2} = 2\sqrt{2} \frac{\tau m_\tau}{T^2 - \tau^2} = 0,71 \cdot 10^{-8},$$

а звідси при $H = 1$ м, $T = 1.01$ с і $\tau = 0,45$ с

$$m_H = 0,71 \cdot 10^{-2} \text{ мкм}, m_T = 2,2 \cdot 10^{-9} \text{ с}, m_\tau = 5 \cdot 10^{-9} \text{ с}.$$

Результати цих обчислень дають право зробити такі висновки:

- метод двох станцій дозволяє визначити інтервали часу з точністю в два рази меншою, ніж метод трьох станцій;
- така точність вимірювання часу є можливою при використанні стабілізованих генераторів частоти, стабільність яких є не меншою від 10^{-10} ;
- вимірювання шляху вільного падіння з точністю до соті частини мікрометра є завданням дуже важким і можливим до виконання завдяки застосуванню інтерференційного методу при використанні лазерного еталону довжини.

Для використання абсолютних визначень при гравіметричних роботах необхідно у виміряне значення g ввести дві поправки:

- поправка за припливні зміни прискорення сили тяжіння;
- поправка за приведення остаточного результату до фундаментальних пунктів.

Першою поправкою враховують короткоперіодичні варіації прискорення сили тяжіння, обумовленої притяганням Місяця і

Сонця. Ця поправка може досягати 0,3 мГал, а її зміна складає до одного мікрогала за хвилину. Її необхідно враховувати для того, щоб порівнювати між собою виконані в різний час спостереження. Друга поправка називається поправкою за висоту з урахуванням вертикального градієнта прискорення сили тяжіння при редукуванні виміряного прискорення сили тяжіння до поверхні основи, на якій встановлюється прилад.

6.5. МАЯТНИКОВІ ПРИСТРОЇ

Як зазначалося раніше, перший практичний метод оцінки поля тяжіння був заснований на вимірюванні періоду коливань [99]. Спочатку опишемо теорію коливань уявного, так званого математичного маятника, який складається з точкової маси m , частинки і невагомої нитки довжиною l (рис. 6.7). Це перше наближення до реального маятника. Частинка з масою m прикріплюється до одного кінця нитки, другий кінець закріплюється в точці O .

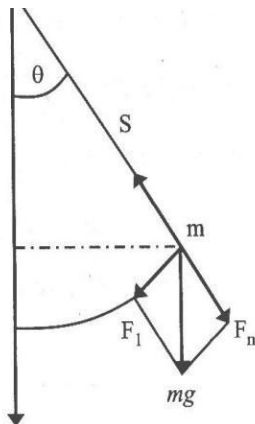


Рис.6.7. Ілюстрація теорії коливань математичного маятника

Будемо вважати, що маса починає рух з точки $x = 0, z = l$ і рухається в вертикальній площині. Поле тяжіння, спрямоване вздовж вертикалі, викликає силу на нитці S , спрямовану до початку відліку O , вона компенсується компонентою ваги F_n . Таким чином,

рух тіла відбувається по круговій траєкторії радіуса l під дією сили, яка є дотичною до шляху:

$$F_l = mgsin\theta \quad (6.35)$$

Продемонструємо цей рух. Уявимо, що початкове положення маси характеризується кутом θ_0 . У початковий момент $t = 0$ вона починає рухатися. Оскільки сила спрямована вздовж руху, швидкість зростає, і в нижній точці ($x = 0, z = l$) вона досягає максимуму. Як тільки маса проходить цю точку, швидкість починає зменшуватися, оскільки компонента сили і швидкість мають протилежні напрямки. Зрештою частинка зупиняється, і потім рух починається знову, але в протилежному напрямку. припускаючи відсутність тертя, можна очікувати періодичний рух маси навколо центральної точки. Справді, рівняння руху цієї частинки в декартовій системі координат.

$$m\ddot{x} = -Ssin\theta \quad \text{та} \quad m\ddot{z} = -Scos\theta + mg. \quad (6.36)$$

Як видно з рис. 6.7.

$$sin \sin \theta = \frac{x}{l} \quad \text{і} \quad cos \cos \theta = \frac{z}{l}. \quad (6.37)$$

6.5.1 . Коливання з малою амплітудою

Розглянемо коливання маси поблизу точки рівноваги ($x = 0, z = l$) за умови, що амплітуда зміщення дуже мала. Це означає що

$$sin \sin \theta \approx \theta \quad \text{і} \quad cos \cos \theta \approx 1.$$

У цьому наближенні права частина другого рівняння системи (6.36) не залежить від кута θ , і можна зробити висновок, що в будь-який момент натяг нитки дорівнює вазі частинки:

$$S = mg. \quad (6.38)$$

Відповідно, друге рівняння системи 6.36 перетворюється :

$$\ddot{z} = 0,$$

тобто рух уздовж осі z не зазнає дії сили. Беручи до уваги рівняння (6.38) перше рівняння цієї системи перетвориться в

$$m\ddot{x} = -mg \frac{x}{l} \quad \text{або} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 = 0. \quad (6.39)$$

де

$$\omega_0 = \left(\frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.40)$$

Таким чином, ми показали, що мале переміщення маси описується рівнянням гармонійного осцилятора (рівняння (6.39), і його розв'язок добре відомий:

$$x(t) = A \sin \sin \omega_0 t + B \cos \cos \omega_0 t \quad (6.41)$$

Параметр ω_0 називається частотою вільних коливань і відноситься до періоду руху частинки відповідно з рівнянням

$$T = 2\pi \left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.42)$$

Видно, що часовий інтервал T , протягом якого маса рухається від початкового положення і назад в те ж місце, пропорційний довжині нитки і зменшується у міру збільшення поля тяжіння. Постійні A і B визначаються тільки початковими умовами. Наприклад, якщо в момент $t = 0$ маємо

$$x(0) = x_0 \text{ і } \dot{x}(0) = 0,$$

рівняння (6.41) приймає вид

$$x(0) = x_0 \cos \cos \omega_0 t. \quad (6.43)$$

Таким чином, показано, що вимірювання періоду коливань T дозволяють визначити поле g . З рівняння (6.42) маємо

$$g = \frac{4l\pi^2}{T^2}. \quad (6.44)$$

Відповідно, довжина нитки

$$l = \frac{gT^2}{4\pi^2} \quad (6.45)$$

Наприклад, якщо період коливань маятника дорівнює 1 сек, $g = 9,8 \text{ м/сек}^2$, отримуємо

$$l \approx 0,25 \text{ м.}$$

Допускаючи, що похибка вимірювання довжини нитки дорівнює нулеві, нескладно одержати співвідношення між точністю періоду dT і полем тяжіння dg . Як впливає з рівняння (6.44),

$$T^2 = \frac{4l\pi^2}{g},$$

диференціювання цього виразу дає

$$2TdT = -4\pi^2 \frac{ldg}{g^2} = -4\pi l \frac{dg}{g} \frac{T^2}{4l\pi^2}.$$

Таким чином,

$$2 \frac{dT}{T} = - \frac{dg}{g} \quad (6.46)$$

Наприклад, якщо потрібно виміряти поле з точністю 1 мГал, тобто $\frac{dg}{g} = 10^{-6}$, необхідно знати період в 1 сек з точністю $dT = 0,5 \times 10^{-6}$ сек. Тому корисно отримати подібне співвідношення для балістичного гравіметра. У відповідності з розв'язком рівняння руху маємо

$$g = \frac{2s}{t^2}.$$

Взявши логарифм від обох частин

$$\ln \ln g = \ln \ln 2s - 2 \ln \ln t$$

і виконавши диференціювання, отримаємо

$$\frac{dg}{g} = \frac{ds}{s} - 2 \frac{dt}{t}.$$

Отже, якщо поле має бути визначено з відносною похибкою 10^{-8} , нам необхідно виміряти відстань і час з такою ж точністю.

6.5.2 . Коливання з довільною амплітудою

Ми вивчили коливання математичного маятника з малою амплітудою. Далі ми вирішимо ту ж задачу для великих величин переміщення [99]. З цією метою розглянемо обидва рівняння системи (6.36). Множачи їх на одиничні вектори $\vec{l}$ і $\vec{k}$ відповідно і складаючи, ми отримаємо одне рівняння руху

$$\ddot{x}\vec{l} + \ddot{z}\vec{k} = g\vec{k} - \vec{l}S \sin \sin \theta - \vec{k} \cos \cos \theta \quad \text{або} \quad r = \ddot{g}\vec{k} - \vec{S} \quad (6.47)$$

Воно може використовуватися для вивчення руху вздовж будь-якого напрямку. Оскільки вектор сили натягу $\vec{S}$ направлений уздовж радіус-вектору, проекція цього рівняння на напрямок, який дотичний до шляху руху, є

$$\frac{dv}{dt} = g \sin \sin \theta = -l \frac{d^2 \theta}{dt^2}. \quad (6.48)$$

Множачи рівняння (6.48) на $\frac{ds}{dt=v}$ маємо

$$v \frac{dv}{dt} = (g \sin \sin \theta) \frac{ds}{dt} \quad \text{або} \quad v \frac{dv}{dt} = g \frac{dz}{dt}.$$

Оскільки, $dz = ds \sin \sin \theta$, можна записати

$$v dv = g dz.$$

Інтегрування цього виразу дає

$$\frac{1}{2}v^2 = gz + C, \quad (6.49)$$

де C – постійна інтегрування. У початковій точці A_0 маємо

$$z = z_0 \text{ і } v = 0.$$

Звідси

$$C = -gz_0 \text{ і } \frac{1}{2}v^2 = g(z - z_0)$$

або

$$v^2 = 2g(\cos \cos \theta - \cos \cos \theta_0), \quad (6.50)$$

оскільки

$$z = l \cos \cos \theta \text{ і } z_0 = l \cos \cos \theta_0.$$

Тут доцільно зробити три зауваження.

1. Так само, як і у випадку маятника з малою амплітудою, ми вважаємо, що поле тяжіння не залежить від положення маятника; тобто воно постійно і дорівнює полю при куті $\theta = 0$.

2. Поле тяжіння – векторна сума поля притягання і відцентрової сили на одиницю маси, тобто частково приймається до уваги обертання Землі. Це ж справедливо для випадку вільного падіння маси.

3. У балістичному гравіметрі та маятнику ми розглядали рух маси в неінерційній системі відліку і, строго кажучи, повинні були також враховувати і силу Коріоліса. Проте вплив цього фактору буде розглянуто в подальшому.

Знайдемо зв'язок між періодом коливань і полем тяжіння, з цією метою представимо рівняння (6.50) у вигляді

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 4gl \left(\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \frac{\theta}{2}\right).$$

Беручи до уваги, що $ds = l d\theta$, маємо

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{4g}{l} \left(\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \frac{\theta}{2}\right). \quad (6.51)$$

Звернемо увагу, що ми використовуємо рівність:

$$\frac{\emptyset}{2} = \frac{1 - \cos \cos \emptyset}{2}.$$

Тоді, рівняння (6.51) дає результат

$$dt = \frac{1}{2} \left(\frac{l}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{d\theta}{\left[\left(\frac{\theta_0}{2} \right) - \frac{\theta}{2} \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (6.52)$$

Якщо T – період коливань маятника або час, який необхідний маятнику для відхилення від кута θ_0 до кута $-\theta$ (напівперіод), тоді інтегрування рівняння (6.52) дає

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{l}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\left[\left(\frac{\theta_0}{2} \right) - \frac{\theta}{2} \right]^{\frac{1}{2}}}$$

або

$$T = \left(\frac{l}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\left[\left(\frac{\theta_0}{2} \right) - \frac{\theta}{2} \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (6.53)$$

Ми бачимо, що на протигагу коливанням з малою амплітудою напівперіод T залежить від трьох параметрів, а саме довжини нитки l , початкового кута θ_0 і поля тяжіння g , але, як і колись, він не залежить від рухомої маси маятника. Також у відповідності з рівнянням (6.48) функція $\theta(t)$ не синусоїдальна, хоча, звичайно, вона має періодичний характер, оскільки впливом тертя знехтували. Для спрощення інтеграла в правій частині рівняння (6.53) введемо нову змінну

$$\sin \sin \frac{\theta}{2} = \sin \sin \frac{\theta_0}{2} \sin \sin \psi. \quad (6.54)$$

Тоді

$$\frac{1}{2} \cos \cos \frac{\theta}{2} d\theta = \sin \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \cos \psi d\psi, \quad (6.55)$$

і маємо

$$\frac{d\theta}{\left[\left(\frac{\theta_0}{2} \right) - \frac{\theta}{2} \right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{2 \sin \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \cos \psi d\psi}{\cos \cos \frac{\theta_0}{2} \sin \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \cos \psi} = \frac{2 d\psi}{\cos \cos \frac{\theta_0}{2}} \quad (6.56)$$

Як впливає з рівняння (6.54), кут ψ змінюється від 0 до $\frac{\pi}{2}$, коли θ змінюється від 0 до θ_0 , отже,

$$T = 2 \left(\frac{l}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\cos \cos \frac{\theta}{2}} = 2 \left(\frac{l}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\left(1 - \frac{\theta_0}{2} \psi \right)^{\frac{1}{2}}}$$

або

$$T = 2 \left(\frac{l}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{(1-\psi)^{\frac{1}{2}}}. \quad (6.57)$$

тут

$$e = \sin \sin \frac{\theta_0}{2}, \quad (6.58)$$

e – параметр, що характеризує максимальне переміщення маси, яке зазвичай мало. Таким чином, ми виразили час T через еліптичний інтеграл:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{(1-\psi)^{\frac{1}{2}}}$$

і воно залежить тільки від параметра e . Розкладаючи підінтегральний вираз

$$\frac{1}{(1-\psi)^{\frac{1}{2}}}$$

в степеневий ряд по e ($e < 1$) і інтегруючи кожен член, отримуємо

$$T = \pi \left(\frac{l}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{\theta_0}{2} + \frac{9}{64} \frac{\theta_0}{2} + \dots \right). \quad (6.59)$$

Оскільки θ_0 дуже мало, порядку хвилин, можна записати

$$\frac{\theta_0}{2} = \frac{\theta_0^2}{4} + \frac{\theta_0^4}{48} + \dots \quad \text{і} \quad \frac{\theta_0}{2} = \frac{\theta_0^4}{16} + \dots$$

це дає

$$T = \pi \left(\frac{l}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 + \frac{11}{3072} \theta_0^4 + \dots \right) \quad (6.60)$$

або

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 + \frac{11}{3072} \theta_0^4 + \dots \right).$$

Тут T_0 – напівперіод при дуже малій амплітуді переміщення. Якщо кут θ_0 досить малий, щоб можна було знехтувати членом, пропорційним θ_0^4 , тоді

$$T_0 = \frac{T}{1 + \left(\frac{\theta_0^2}{16} \right)} = T - \frac{\theta_0^2}{16} T \quad (6.61)$$

Другий член зазвичай називається зменшенням дуги, і він малий для амплітуд, що використовуються на практиці. Виконуючи вимірювання в одній точці e з двома маятниками різної довжини, маємо

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{T_0^2(l_1)}{T_0^2(l_2)},$$

тобто довжина маятників пропорційна квадрату періодів. Припустимо, що в двох різних точках з одним і тим же маятником виконані вимірювання періодів коливання (T_1 і T_2) і введена поправка за зменшення дуги. Тоді відношення полів тяжіння

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{T_{02}^2}{T_{01}^2}, \quad (6.62)$$

і це головна формула для відносних гравіметричних з вимірювань з маятником.

6.5.3. Фізичний маятник. Рівняння руху

В попередніх розділах ми розглядали теорію математичної моделі реального маятника. Далі припустимо, що тверде тіло кінцевих розмірів гойдається в площині XZ навколо горизонтальної осі і що рух відбувається з кутовою швидкістю $\omega(t)$ (рис. 6.8). Представимо це тіло як нескінченну систему елементарних мас dm , які розташовані на різних відстанях r від осі; спочатку ми отримаємо рівняння для руху деякої маси dm . За визначенням, лінійна швидкість v кожної маси пов'язана з кутовою швидкістю виразом

$$v = \frac{ds}{dt} = r\omega.$$

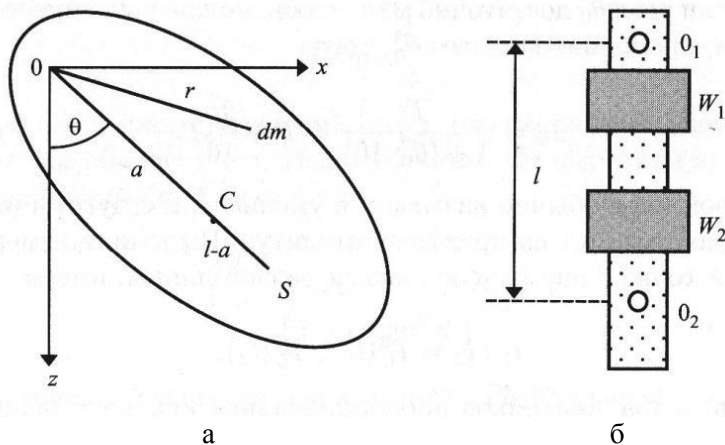


Рис. 6.8 Ілюстрація фізичного (а) і оборотного (б) маятників

Тут ds – елементарне переміщення. Як видно з рис. 6.8, компоненти швидкості вздовж координатних осей можна записати у вигляді:

$$\frac{dx}{dt} = \omega r \cos \theta = z\omega \quad \text{і} \quad \frac{dz}{dt} = -\omega r \sin \theta = -x\omega.$$

Помножимо ці рівняння відповідно на z і $-x$, і тоді їх віднімання дає

$$z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} = \omega(z^2 + x^2) = \omega r^2.$$

Щоб отримати рівняння обертання, ми візьмемо від цієї рівності похідну за часом, це дає

$$x \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dz}{dt} \frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} \frac{dx}{dt} - x \frac{d^2z}{dt^2} = r^2 \frac{d\omega}{dt}.$$

Беручи до уваги, що другі похідні є складовими гравітаційного поля, тобто прискорення, у якого є тільки вертикальна компонента g , тобто $\ddot{x}(t) = 0$ і $\ddot{z} = g$, останнє рівняння сильно спрощується, і ми отримуємо:

$$r^2 \frac{d\omega}{dt} = -gx. \quad (6.63)$$

Це рівняння обертання елементарної маси навколо осі y . Тут r^2 можна розглядати як момент інерції одиниці маси, а $\frac{d\omega}{dt}$ – кутове

прискорення. Добуток gx характеризує крутильний момент відносно точки 0. Помноживши рівняння (6.63) на dm і виконуючи інтегрування по масі маятника, ми отримуємо

$$\frac{d\omega}{dt} \int r^2 dm = -g \int x dm. \quad (6.64)$$

За визначенням, центр мас маятника характеризується радіус-вектором

$$r_C = \frac{1}{M} \int r dm$$

і, відповідно,

$$x_C = \frac{1}{M} \int x dm \quad (6.65)$$

Тут M - маса маятника. Кутова швидкість пов'язана з кутом θ як

$$\omega = \frac{d\theta}{dt},$$

тому

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Інтеграл у лівій частині рівняння (6.64) являє момент інерції маятника:

$$I = \int r^2 dm \quad (6.66)$$

Таким чином, рівняння (6.64) записується як

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} I = -g x_C M.$$

Позначивши відстань від початку координат до центру маси як a , отримаємо

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{M a}{I} g \sin\theta = 0, \quad (6.67)$$

оскільки

$$x_C = a \sin\theta.$$

Таким чином, ми отримали рівняння руху фізичного маятника і знайшли параметри, що описують коливання навколо фіксованої осі. Введемо відношення:

$$l = \frac{I}{M a}. \quad (6.68)$$

Рівняння (6.67) записується як

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0, \quad (6.69)$$

що збігається з рівнянням (6.48), отриманими для математичного маятника. Це означає, що рух фізичного маятника описується періодичною функцією, і він коливається так само, як і

математичний маятник довжини l . Величина l називається наведеною довжиною фізичного маятника. В принципі, вимірюючи час коливань T , можливо оцінити гравітаційне поле у випадку, якщо відома маса маятника, момент інерції і відстань між віссю і центром маси.

6.5.4. Реверсивний маятник

Щоб уникнути визначення цих параметрів і пов'язаних з цією процедурою помилок, на початку XIX століття Генрі Кетера запропонував так званий реверсивний маятник [99]. Щоб пояснити принцип цього пристрою, давайте згадаємо одну фундаментальну особливість моменту інерції. Спочатку використовуємо тотожність

$$r^2 = x^2 + z^2 = [x_C + (x - x_C)]^2 + [z_C + (z - z_C)]^2$$

або

$$r^2 = x_C^2 + z_C^2 + (x - x_C)^2 + (z - z_C)^2 + 2x_C(x - x_C) + 2z_C(z - z_C).$$

Вважаємо

$$p^2 = (x - x_C)^2 + (z - z_C)^2,$$

маємо

$$r^2 = a^2 + p^2 + 2x_C(x - x_C) + 2z_C(z - z_C).$$

Отже, по відношенню до початку координат момент інерції можливо представити як

$$I = \int r^2 dm = a^2 M + \int p^2 dm + 2x_C \int (x - x_C) dm + 2z_C \int (z - z_C) dm.$$

За визначенням центру мас, останні два інтеграла дорівнюють нулю, і ми отримуємо

$$I = a^2 M + \int p^2 dm. \quad (6.70)$$

Інтеграл у правій частині являє момент інерції маятника щодо осі, що проходить через центр ваги, а рівняння (6.70) описує добре відому теорему механіки. Беручи до уваги, що ми вже ввели наведену довжину l (рівняння 6.69), будемо вважати, що

$$\int p^2 dm = n^2 M.$$

Тоді замість рівняння (6.70) ми отримаємо

$$I = (a^2 + n^2)M, \quad (6.71)$$

і рівняння (6.68) дає

$$l = \frac{a^2 + n^2}{a} = a + \frac{n^2}{a}, \quad (6.72)$$

тобто приведена довжина і відстань a розрізняються на член $\frac{n^2}{a}$. Зауважимо, що точка S ($l = OS$), розташована на продовженні лінії OC на відстані l від початку координат, називається «центром коливання» маятника. Ясно, що

$$CS = \frac{n^2}{a} = l - a. \quad (6.73)$$

Нехай цей же маятник рухається навколо осі, що проходить через точку S . Тоді він характеризується новою наведеною довжиною l' , і за аналогією з рівнянням (6.72) маємо

$$l' = l - a + \frac{n^2}{l - a} \quad (6.74)$$

Тут $(l - a)$ - відстань між новою віссю і тим же центром маси. З рівняння (6.73) випливає, що

$$l' = l. \quad (6.75)$$

Це означає, що період коливань в обох випадках один і той же. Звичайно, цю рівність важко передбачити, вона використовується в «реверсивному маятнику» (рис.6.8, б).

В принципі, устрій працює таким чином. Спочатку маятник коливається навколо осі O_1 , потім перевертається і коливається навколо осі O_2 , розташованої по інший бік від центру маси. Регулюючи положення ваг W_1 W_2 , ми робимо періоди коливань навколо кожної з осей однаковими. У цьому випадку відстань O_1O_2 дорівнює наведеній довжині маятника l . Тому, використовуючи рівняння (6.42) і за умови, що період і відстань між осями відомі, ми можемо визначити гравітаційне поле g .

Як і в інших методах, на вимірювання гравітаційного поля впливають деякі фактори, вплив деяких з них розглянемо далі.

1. Барометричний фактор

У першу чергу, присутність повітря зменшує вагу маятника (закон Архімеда). З іншого боку, рухомий маятник захоплює деяку кількість повітря, що приводить до збільшення ваги маятника.

Також обумовлене присутністю повітря тертя зменшує період коливань.

2. Вигинання стійки

Досвід показує, що стійка навіть висотою 0,2-0,3 м буде трохи згинатися слідом за маятником. Це означає, що рух маятника не вільний, він знаходиться під дією сили, що викликана деформацією стійки. Відповідно, рівняння руху буде таким:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta + f(t) = 0,$$

де $f(t)$ - горизонтальна складова прискорення точки підвіски маятника. Оскільки сила згинання спрямована протилежно руху, період коливань T стає менше. Це ж справедливо для приведеної довжини l . Виявляється, вплив цього фактору, навіть вимірювання проводяться на твердій основі, може досягати $30 \cdot 10^{-7}$ с. Для зниження цього впливу використовуються два синхронізованих маятника, що коливаються на одній стійці і в одній площині. Вони повинні мати однакові амплітуди коливання, але протилежні фази.

3. Вплив температури

Зміна температури призводить до зміни довжини маятника, і поправочний коефіцієнт визначається як

$$-k(t - t_0),$$

де t - час спостережень, t_0 - час початку відліку, k - постійна, що визначається експериментально для кожного маятника. Крім того вводиться поправка для врахування того, що температура впливає по-різному на маятник і термометр.

4. Зміна тактової частоти

Відомо, що зміна тактової частоти напрямку впливає на величину періоду коливань маятника T . Наприклад, якщо ми спостерігаємо навіть дуже невеликі зміни протягом одного часу, приміром 0,0007 с, то це викликає зміну періоду коливань маятника в 10^{-7} с. Використання кварцового генератора синхронізуючих імпульсів підвищує точність визначення періоду коливань, а в минулому для зменшення впливу тактової частоти було необхідно виконувати вимірювання протягом 24 годин.

6.6. ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ МАЯТНИКОВОГО МЕТОДУ

Визначення абсолютного значення прискорення сили тяжіння в пункті спостереження є дуже складною, багаторасовою операцією і для вивчення розподілу сили тяжіння на земній поверхні є неефективним [98]. Тому на початку XIX століття почали застосовувати відносний метод визначення сили тяжіння за допомогою маятнікового приладу. Ідея цього методу полягає в тому, що з одним і тим маятником незмінної зведеної довжини виконують спостереження в пунктах Землі, з яких знаходять або відношення, або різницю сили тяжіння між пунктами. Визначимо період коливання T_1 такого маятника в пункті з відомим значенням прискорення сили тяжіння g_1 .

Після цього знайдемо період коливання T_2 маятника в пункті з невідомим значенням сили тяжіння g_2 . Для двох пунктів, в яких виконані спостереження періодів коливання маятника з незмінною зведеною довжиною l , можна записати

$$T_1 = \sqrt{\frac{l}{g_1}}, \quad T_2 = \sqrt{\frac{l}{g_2}}. \quad (6.76)$$

Піднесемо ці рівності до квадрата і почленно поділимо, тоді одержимо

$$g_2 = \frac{T_1^2}{T_2^2}. \quad (6.77)$$

Істотною перевагою цього методу в порівнянні з абсолютним є те, що відпадає необхідність у визначенні зведеної довжини маятника. На практиці найчастіше визначають різницю прискорень сили тяжіння

$$\Delta g = g_2 - g_1. \quad (6.78)$$

Тоді вираз для Δg записують у вигляді

$$\Delta g = -2g_1 \frac{\Delta T}{T_2} + g_1 \left(\frac{\Delta T}{T_2} \right)^2, \quad (6.79)$$

$$\text{де: } \Delta T = T_2 - T_1. \quad (6.80)$$

Для напівсекундних маятників другий член виразу (6.79) не перевищує 10 мГал, якщо вимірювана різниця прискорень сили тяжіння $\Delta g \leq 60$ мГал. Визначаючи різницю прискорень сили тяжіння, необхідно знати в вихідному пункті прискорення сили

тяжіння з точністю, яка залежить від вимірної величини Δg . При визначенні $\Delta g=100$ мГал значення прискорення сили тяжіння у вихідному пункті треба знати приблизно з точністю 100 мГал, якщо допустима точність вимірювання $m_{\Delta g}=0,01$ мГал. Відповідно, якщо $\Delta g=1000$ мГал, то $m_{\Delta g}=10$ мГал. Використовуючи рівняння

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}},$$

яке описує коливання фізичного маятника з нескінченно малою амплітудою, знайдемо зв'язок приросту сили тяжіння Δg з відповідними приростами зведеної довжини Δl і періоду коливання ΔT . Для цього продиференціюємо вираз для Δg замінюючи диференціали відповідними приростами

$$\Delta g = -2g \frac{\Delta T}{T} = g \frac{\Delta l}{l}, \quad (6.81)$$

$$\Delta l = 2l \frac{\Delta T}{T} = l \frac{\Delta g}{g}, \quad (6.82)$$

$$\Delta T = -\frac{1}{2} T \frac{\Delta g}{g} = \frac{1}{2} T \frac{\Delta l}{l}. \quad (6.83)$$

Наведемо результати обчислень цих величин для $l=0,25$ м, $T = 0,5$ с і $g=0,98 \cdot 10^6$ мГал

$\Delta T (10^{-8})$ с	Δl (нм)	Δg (0,01мГал)
1	9,9	3,9
0,10	1	0,40
0,26	2,5	1

Звідси можна зробити висновок, що для визначення з похибкою 0.01 мГал період коливання півсекундного маятника необхідно виміряти з точністю не більшою, ніж $2,6 \cdot 10^{-9}$ с, а незмінність зведеної довжини маятника – в межах 2,5 нм. Формула справедлива для малих коливань маятника, а умова незмінності зведеної довжини не виконується при переїзді з пункту на пункт із зміною густини повітря, нестійкості штатива та інше. Для врахування змін у зведеній довжині маятника періодично на вихідному пункті виконують повторні вимірювання періоду коливань. Крім того, самі спостереження виконують не з одним маятниковим приладом, а комплектом із трьох – п'яти приладів. Щоб врахувати дію зовнішніх факторів у вимірний період коливань маятника вносять ряд поправок.

6.6.1. Поправка за амплітуду коливань

У реальних умовах період коливання маятника T пов'язаний з амплітудою коливань співвідношенням

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \dots \right).$$

Вимірний період коливання редукують до нескінченно малої амплітуди. Для цього використовують залежність

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Нехай T' – вимірний період, а T – період, який редукований до нескінченно малої амплітуди. Тоді

$$T' = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{16} \alpha^2 \right), \quad (6.84)$$

$$\Delta T_\alpha = T - T' = -\frac{1}{16} \alpha^2 T. \quad (6.85)$$

Тут у формулі (6.85) α – середнє значення амплітуди коливань в радіанах, яке виміряне на початку та в кінці спостережень. Фактично амплітуда коливань змінюється нелінійно з часом, або змінюється квадратично. Тоді поправка за амплітуду представляється виразом

$$\Delta T_\alpha = -\frac{1}{32} T \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\ln \ln \square_1 - \ln \ln \square_2}, \quad (6.86)$$

а при малих різницях амплітуд

$$\Delta T_\alpha = -\frac{1}{16} T \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right)^2 \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \right)^2 \right]. \quad (6.87)$$

За правилами теорії математичної обробки результатів вимірювання напишемо

$$m_{\Delta T_\alpha} = \frac{1}{8} T \cdot \alpha \cdot m_\alpha, \quad (6.88)$$

звідси

$$m''_\alpha = \frac{8 m_{\Delta T_\alpha}}{T \cdot \alpha} \rho' \rho''. \quad (6.89)$$

Точність визначення амплітуди, як і величина поправки, залежить від величини амплітуди, періоду коливань і від похибки поправки за амплітуду. Якщо $T = 0,5$ с, $\alpha = 30'$ і $m_{\Delta T_\alpha} = 5 \cdot$

10^{-9} с амплітуда повинна бути виміряна з похибкою $1,9''$. В залежності від величини амплітуди можна подати графічно результати обчислень $\Delta T''_{\alpha}$ і m''_{α} при прийнятій похибці $m_{\Delta T_{\alpha}}$. Ця залежність показана на рис. 6.9.

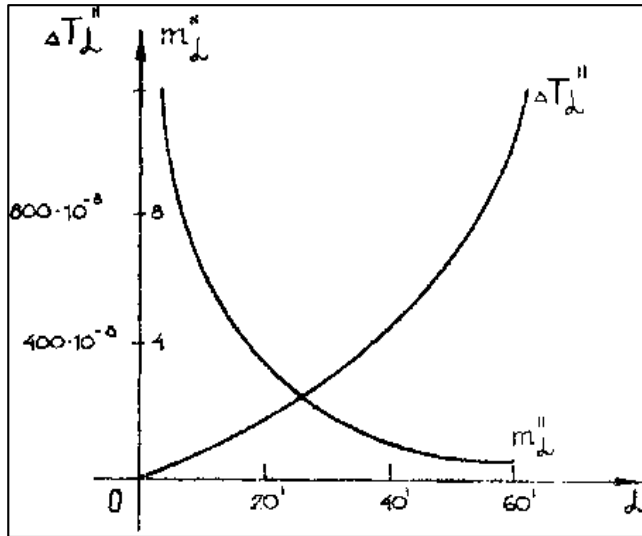


Рис. 6.9. Результати обчислень $\Delta T''_{\alpha}$ і m''_{α} при прийнятій похибці $m_{\Delta T_{\alpha}}$

Досягти високої точності вимірювання амплітуди коливань практично неможливо. Фотоелектричний метод полягає у визначенні амплітуди шляхом реєстрації лінійної швидкості маятника в положенні рівноваги. Цей метод є вигіднішим і точнішим за фотографічний.

6.6.2. Поправка за температуру

Зміна температури з часом спостереження впливає на зміну зведеної довжини фізичного маятника, а це відповідно змінює спостережуваний період коливання.

Температурну поправку можна виразити

$$\Delta T_t = -\alpha_0(t - t_0) - \beta(t - t_0)^2, \quad (6.90)$$

де α_0 – лінійний статичний температурний коефіцієнт,
 β – квадратичний статичний температурний коефіцієнт,
 t, t_0 – виміряна і початкова температури.

Лінійний статичний температурний коефіцієнт залежить від зведеної довжини l , періоду коливання T і коефіцієнта температурного розширення λ

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} T \frac{\lambda}{l}. \quad (6.91)$$

Щоб зменшити вплив температури, застосовують маятники з малим температурним коефіцієнтом розширення λ . Наприклад, якщо використати кварц, то

$$\lambda = 0,4 \cdot 10^{-6}.$$

Квадратичний температурний коефіцієнт маятника, стержень якого виготовлено із кварцу, практично дорівнює нулю. Тоді для кварцового маятника температурна поправка буде

$$\Delta T_t = -\alpha(t - t_0). \quad (6.92)$$

Аналізуючи окремо вплив температури і коефіцієнта α_0 , одержимо

$$\{m_{\Delta T_t}^2 = m_{\alpha_0}(t - t_0)^2 + \alpha_0^2 m_t^2, m_t = \frac{m_{\Delta T_t}}{\sqrt{2}\alpha}, m_{\alpha_0} = \frac{m_{\Delta T_t}}{\sqrt{2}(t - t_0)}. \quad (6.93)$$

При $T=0,5$ с для кварцових маятників зі зведеною довжиною $l=0,25$ м і лінійним температурним коефіцієнтом розширення $\lambda=0,4 \cdot 10^{-6}$, одержимо

$$\alpha_0 = 4 \cdot 10^{-7}.$$

Звідси $m_t=0,012^\circ\text{C}$, якщо $m_{\Delta T_t} = 5 \cdot 10^{-9}$ с. Похибка коефіцієнта α_0 залежить від різниці температур $t - t_0$. Для $(t - t_0)=0,5^\circ\text{C}$ одержимо, що $m_{\alpha_0}=1 \cdot 10^{-8}$. Як бачимо температуру і лінійний температурний коефіцієнт треба визначати з дуже високою точністю. Для повного врахування впливу температури на період коливання маятника додатково вводять динамічну температурну поправку, яку обчислюють за формулою

$$\Delta T_t = \gamma t', \quad (6.94)$$

де: γ – динамічний температурний коефіцієнт маятника, який визначають експериментально;

t' – швидкість зміни температури.

Для зменшення впливу температури застосовують маятники з малим температурним коефіцієнтом розширення (кварц, інвар, вольфрам), штатив маятникового приладу термостатують.

6.6.3. Поправка за густину навколишнього середовища

Навколишнє середовище, яке оточує маятник, значно впливає на його період коливання. Зміна періоду коливання є пропорційною до густини атмосфери і обумовлена такими причинами: зменшується вага маятника згідно з законом Архімеда, маса маятника збільшується за рахунок сили молекулярного тертя. А це приводить до зміни періоду коливання маятника і, відповідно, зміни сили тяжіння. Щоб одержати період коливання T_0 в безповітряному середовищі, в виміряний період T вводять поправку

$$\Delta T_D = -A'D, \quad (6.95)$$

де: A' – барометричний коефіцієнт маятника, який для півсекундного маятника $A' = 6 \cdot 10^{-5}$;

D – густина навколишнього середовища, яку обчислюють за виразом

$$D = \frac{P - \frac{3}{8}f}{1013,25 \left(1 + \frac{t}{273,0}\right)}, \quad (6.96)$$

P – атмосферний тиск в мб;

f – тиск водяної пари в мб,

t – температура повітря в °С.

Якщо вимірювання виконують сучасними вакуумними маятниковими приладами, то зручно приводити результати спостережень до умовного сталого тиску P_0

$$\Delta T_D = -A(P - P_0),$$

де: P – залишковий атмосферний тиск в мб.

Барометричний коефіцієнт A для півсекундного кварцово-металічного маятника складає в межах $(4 - 10) \cdot 10^{-8}$ с/мб.

6.6.4. Поправка за частоту кварцового генератора

При вимірюваннях періоду коливання маятника використовують кварцовий годинник, а масштаб часу задається стандартом частоти кварцового генератора. Його частота не є сталою, а має віковий і періодичний хід. Якщо реальна частота f відрізняється від еталонної f_0 , то до виміряного періоду вводять поправку

$$\Delta T_f = T \frac{\Delta f}{f}, \quad (6.97)$$

де

$$\Delta f = f - f_0 \quad (6.98)$$

Реальну частоту кварцового генератора порівнюють з еталонною за допомогою електронного осцилографа, тоді частоту генератора знаходять за допомогою фотоелектронного реєстратора. Стандарт частоти контролюють з точністю до $2 \cdot 10^{-8}$.

6.6.5. Поправка Венінга-Мейнеса

Штатив маятникового приладу деформується під тиском маятника. Тиск, направлений по лінії, яка перпендикулярна до осі підвісу та проходить через центр ваги маятника. Зміщення штатива, зумовлене вертикальною складовою тиску, при малих амплітудах можна вважати сталим. Горизонтальна складова змінюється від нуля до деякої величини при максимальному відхиленні маятника і завжди направлена в бік відхилення маятника. В результаті відбувається паралельне зміщення в горизонтальній площині осі підвісу та маятника в той або інший бік у такт коливанням маятника. Це явище називається співхитанням штатива. Для редукції виміряного періоду коливання T до періоду T_0 , коли штатив маятникового приладу є абсолютно стійким, вводять від'ємну поправку σ за співхитання штатива

$$T_0 = T - \sigma. \quad (6.99)$$

Ця поправка σ визначається за зміною амплітуди або періоду двох однакових маятників, які коливаються в одній площині. Її величина на фундаментальних стовпах складає $(200 - 500) \cdot 10^{-8}$ с, а для ґрунту може досягати $1000 \cdot 10^{-8}$ с. Відомо декілька методів визначення поправки σ . Але вплив співхитання штатива можна повністю виключити методом спостережень, запропонованим у 20-х роках XX століття голландським вченим Венінг - Мейнесом.

Ідея цього методу полягає в тому, що на одній підставці здійснюють коливання в одній вертикальній площині два практично ізохронних маятники. Фотографічним методом реєструється різниця амплітуд і фаз цих маятників, які будуть вільними від збурюючих прискорень. Запишемо рівняння збуреного руху для двох маятників першого і другого.

$$\ddot{\varphi}_1 + \frac{g}{l_1} \varphi_1 - \frac{\delta}{l_1} = 0, \quad \ddot{\varphi}_2 + \frac{g}{l_2} \varphi_2 - \frac{\delta}{l_2} = 0, \quad (6.100)$$

де δ – горизонтальні прискорення.

Припустимо, що $T_1 = T_2$ і $l_1 = l_2$ і позначимо через $\varphi = \psi_1 - \psi_2$.

Тоді

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0, \quad (6.101)$$

буде рівнянням незбуреного руху різницевого маятника, кут елонгації якого дорівнює φ , тобто виключається вплив горизонтальних прискорень. Цей маятник називають фіктивним. Кут елонгації фіктивного маятника реєструється за допомогою оптичної схеми (див. рис. 6.10).

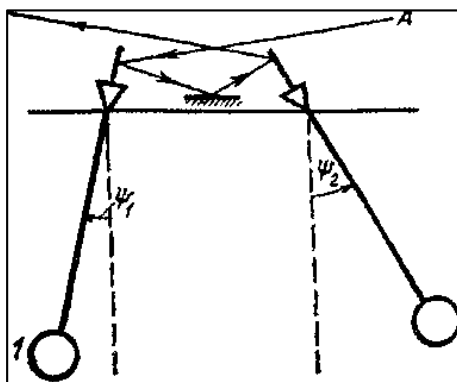


Рис. 6.10. Оптична схема реєстрації

Промінь світла від джерела А, відбившись від дзеркала маятника 1, падає на нерухоме дзеркало, на дзеркало маятника 2 і пізніше надходить до реєстратора В. Цей реєстратор фіксує незбурену синусоїду, за якою визначають період коливання фіктивного маятника.

6.6.6. Вплив електромагнітних полів на період коливання маятника

Як було відзначено вище, маятники виготовляють з матеріалу (кварц, інвар або метал) з малим температурним коефіцієнтом

розширення. Але на такий кварцовий або інварний маятник істотно впливає оточуюче електричне та магнітне поля, що приводить до похибки гравіметричного зв'язку в декілька десятків мікрогал. Для зменшення впливу електромагнітного поля застосовують екранування та вилучення електростатичних зарядів у самому маятниковому приладі.

Експериментальні дослідження впливу мікросейсмів на коливання маятника вивчені недостатньо та систематичні похибки можуть досягати 0,1 мГал, зумовлені цим ефектом.

Вплив нахилу маятника на вимірюваний період коливання проявляється тоді, коли площина його коливань не строго вертикальна. Зміна періоду коливання маятника при нахилі площини коливання на кут β виражається залежністю

$$\Delta T_{\beta} = -T \frac{\beta^2}{4}. \quad (6.102)$$

Для півсекундного маятника ($T=0,5$ с), якщо похибка $\Delta T_{\beta} = 0,25 \cdot 10^{-8}$ с, тоді допустимий кут нахилу площини коливань β буде

$$\beta'' = 2 \sqrt{\frac{0,25 \cdot 10^{-8}}{0,5}} \cdot 206265 \approx 0,5'.$$

Щоб забезпечити це, необхідно застосувати півхвилинний рівень. Крім цих факторів, на вимірний період впливає зміна форми леза маятника. За результаті відносних маятникових визначень вводять поправку за припливні зміни прискорення сили тяжіння.

6.6.7. Маятникові прилади для відносних вимірювань прискорення сили тяжіння

Перші маятникові прилади (Паррот-1829, Штернек-1881), призначені для відносних вимірювань сили тяжіння, були такими, що для одного визначення прискорення сили тяжіння з точністю 2 – 5 мГал необхідно було затратити часу від 6 до 15 годин. Така низька точність пов'язана головним чином із невисокою точністю визначення інтервалів часу. В 40 – 50-х роках минулого століття були сконструйовані та розроблені маятникові прилади високої точності, які використовувалися для створення еталонних вихідних

пунктів при розвитку опорних мереж. Точність вимірювань приросту сили тяжіння складає 0,03 – 0,08 мГал сучасними маятниковими приладами за час спостереження 1 – 1,5 години. Маятники конструюють такими, щоб була дотримана основна вимога при відносних вимірюваннях сили тяжіння – незмінність зведеної довжини. Кожен маятниковий прилад складається з таких основних частин: комплекту маятників, штатива та оптичної системи, стандарту частоти (кварцові генератори), реєстратора та пульта управління, вакуумного насоса, пристрою для вимірювання тиску і температури.

Коливання маятників спостерігають методом Венінг-Мейнеса, використовуючи як мінімум два маятники. Маятник представляє собою кварцовий стержень з металевим тягарцем на нижньому кінці у формі двох зрізаних конусів, з'єднаних нижніми основами, та головки з призмою і дзеркалом. Маятниковий штатив має площадки з твердого матеріалу (агат, сталь), на які опираються ножі маятників під час коливання, аретирні пристрої, пристрої для задання маятникам однакових амплітуд і для синхронного пуску маятників у протилежних фазах. Штатив накривають теплоізоляційним ковпаком, всередині якого підтримуються незмінні умови температури та атмосферного тиску. Оптична система складається з освітлювача, об'єктива і оптичного містка, який розміщений на рівні дзеркал маятників. Після відбиття від дзеркал маятників світловий потік фокусується на діафрагмі приймача.

Для контролю тривалості серії коливань використовується робочий кварцовий генератор, хід якого контролюється стандартом частоти. В реєстраторі синхронно фіксуються коливання маятників і міток часу, які задаються робочим генератором. За його показами знаходять період і амплітуду маятника.

В різних країнах світу в даний час розроблені і знайшли широке використання маятникові прилади. До них належить американський маятниковий прилад з кварцовими маятниками, Кембриджський прилад з анварними маятниками, німецький чотирьох маятниковий прилад фірми “Асканія”, канадський маятниковий прилад, двомаятниковий прилад “Агат”, виготовлений у колишньому СРСР. Середня квадратична похибка вимірювання складає 0,03 – 0,04 мГал, яку можна зменшити до 0,02 мГал, збільшуючи кількість вимірювань. Маятникові прилади майже не використовують при

суто гравірозвідувальних роботах. Вони поступаються статичним гравіметрам за точністю, продуктивністю роботи та габаритами. Особливо це відчувається при роботах з сучасними автоматизованими відносними гравіметрами. Проте маятникові прилади мають певні переваги в порівнянні з статичними гравіметрами, особливо коли створюється опорна гравіметрична мережа, а також при дослідженнях варіацій гравітаційного поля з часом.

6.6.8. Оцінка точності досліджень за допомогою маятникового методу

Оцінку точності гравіметричного зв'язку можна виконувати, якщо вимірювання з кожним приладом вважати незалежними і рівно точними або нерівно точними. У випадку незалежних рівноточних вимірювань похибку одного приладу знаходять за відхиленням v кожного результату від середнього

$$m_{\Delta g} = \sqrt{\frac{\sum v^2}{n-1}},$$

$$v = \Delta g - \Delta \bar{g}$$

результату із n приладами комплекту

$$M_{\Delta \bar{g}} = \frac{m_{\Delta g}}{\sqrt{n}}. \quad (6.103)$$

Така оцінка точності за внутрішньою збіжністю не враховує можливих систематичних похибок і дає, як правило, неправильне уявлення про точність вимірювань. При більш строгій оцінці точності вимірювань необхідно враховувати джерела похибок випадкового, напівсистематичного та систематичного характеру. Цього можна досягти на основі аналізу великої кількості вимірювань, виконаних різними приладами при однорідних умовах спостережень, а також лабораторних досліджень кожного приладу із визначень похибок сталих, похибок впливу атмосферного тиску, температури та амплітуди коливань. Тоді похибка одного приладу-зв'язку складає:

$$m_{\Delta g}^2 = \left(\frac{2g}{T} \cdot 10^{-8}\right) m_{\Delta T}^2, \\ m_{\Delta T}^2 = m_0^2 + m_T^2. \quad (6.104)$$

де: m_0 – похибка визначення середнього періоду в вихідному пункті,
 m_T – похибка середнього періоду для даного приладу в визначальному пункті,

$m_{\Delta T}$ – похибка приросту періоду коливань маятника ΔT .

Похибки m_0 і m_T подаємо у вигляді

$$m_0^2 = \frac{1}{4}(m_{A_1}^2 + m_{A_2}^2) + \sigma^2, \\ \sigma = \frac{1}{2}(T_{A_2} - T_{A_1}), \\ m_T^2 = m_{T'}^2 + \mu^2. \quad (6.105)$$

Тут: m_{A_1} і m_{A_2} – похибки визначення середніх періодів при спостереженнях на опорному пункті,

σ – похибка, обумовлена впливом нелінійності зміни зведеної довжини та інших джерел помилок,

$m_{T'}$ – випадкова похибка періоду коливання у визначальному пункті.

μ – напівсистематична стала похибка для даного пункту, але змінна від одного пункту до іншого.

Напівсистематичну похибку μ визначають за формулою

$$\mu^2 = m_A^2 \Delta p^2 + A^2 m_{\Delta p}^2 + m_\alpha^2 \Delta t^2 + \alpha^2 m_{\Delta t}^2 + m_f^2 + m_a^2,$$

де: α і A – температурний і барометричний коефіцієнт маятника;

Δt і Δp – відхилення температури і тиску в середині штативу від їхніх середніх значень на вихідному пункті;

m_f і m_a – похибки визначених поправок за частоту кварцового генератора і поправки за амплітуду;

m_α , m_A , $m_{\Delta T}$, $m_{\Delta p}$ – похибки перелічених вище величин.

Похибки m_{A_1} , m_{A_2} і m_T – визначають за внутрішньою збіжністю періодів, виправлених усіма поправками, використовуючи формулу

$$m = \sqrt{\frac{\sum v^2}{N(N-1)}}, \quad (6.106)$$

де: v – відхилення кожного періоду від середнього на пункті для кожного приладу,

N – число серій спостережень з даним приладом на пункті.

Після оцінки точності вимірювань на кожному приладі визначають середню квадратичну похибку результату із всіх n приладів комплекту. Потрібну оцінку можна виконати такими

способами:

$$1. \quad M_{\Delta \bar{g}} = \sqrt{\frac{\overline{m_{\Delta g}^2}}{n}}, \quad (6.107)$$

$$\overline{m_{\Delta g}^2} = \frac{\sum_{i=1}^n m_{\Delta g i}^2}{n}, \quad (6.108)$$

$$2. \quad M'_{\Delta \bar{g}} = \sqrt{\frac{\sum v^2}{n(n-1)}}, \quad (6.109)$$

$$v_i = \Delta g_i - \Delta \bar{g}, \quad (6.110)$$

$$3. \quad M''_{\Delta g} = \sqrt{\frac{\overline{m_{\Delta g}^2}}{\sum_{i=1}^n P_i}}, \quad (6.111)$$

$$\Delta g_{\text{с.в.}} = \frac{\sum_{i=1}^n P_i \Delta g_i}{\sum_{i=1}^n P_i}, \quad (6.112)$$

$$P = \frac{\overline{m_{\Delta g}^2}}{(m_{\Delta g}^2)_i}. \quad (6.113)$$

В цих формулах:

$\overline{m_{\Delta g}^2}$ – середнє арифметичне значення квадратів похибок,

n – число приладів,

P – вага виміру,

$\Delta g_{\text{с.в.}}$ – середнє вагове значення приросту сили тяжіння.

Розглянуті три можливих способи оцінки точності результату вимірювань будуть між собою відрізнятись і, очевидно, не врахують усіх джерел помилок. Оцінку точності результату вимірювань можна виконати з найбільшою достовірністю, якщо ввести вагу вимірів. Тоді визначають середньо вагове значення приросту сили тяжіння і величину $M''_{\Delta g}$ за відповідними формулами (6.111), (6.112).

Виконуючи повторні гравіметричні зв'язки з іншими маятниковими приладами, можна виявити інші джерела помилок як систематичного, так і напівсистематичного характеру.

6.7 МЕТАЛІЧНІ ГРАВІМЕТРИ

При вимірах в русі застосовують струнні гравіметри. Такий гравіметр використовувався при вимірах сили тяжіння на Місяці (Аполон-17, 1972).

Принципова особливість струнного гравіметра – вимірювання частоти поперечних коливань струни, яка залежить від ваги підвішеного вантажу. Ця частота і є мірою напруженості гравітаційного поля.

Схема струнного гравіметра наведена на рис. 6.11. Маса 1 підвішена на струні 2. Струна розміщена між полюсами постійного магніту і включена в коливальний контур з позитивним зворотним зв'язком. Якщо на кінець струни подати змінну напругу, то струна починає коливатися.

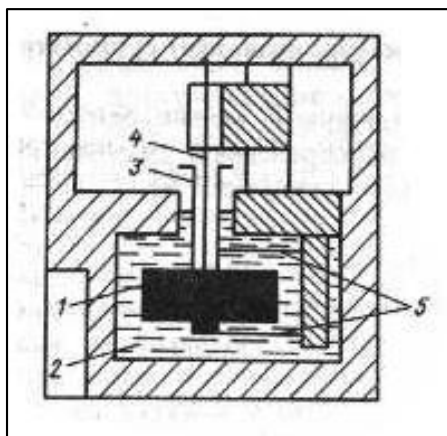


Рис. 6.11. Схема струнного гравіметра:

1 - вантаж, 2 - в'язка рідини, 3 - трубка, 4 - струна, 5-пружини, що обмежують горизонтальні переміщення вантажу.

Частота коливань ідеально гнучкої струни:

$$f = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{mg}{\sigma S}} \quad (6.114)$$

де S – площа поперечного перерізу струни, m – маса вантажу, σ – об'ємна густина.

$$\frac{df}{f} = \frac{1}{2} \frac{dg}{g} \quad (6.115)$$

Для реальної струни в формулу вводиться поправочний коефіцієнт.

Переваги струнного гравіметра:

- практично необмежений діапазон вимірювань;

- мала залежність частоти коливань струни від температури;
- простота телевимірювань і цифрової реєстрації.

Основні недоліки:

- слабка стійкість до впливу вібрацій і інших інерційних завад;
- нелінійна залежність між прискоренням сили тяжіння g і частотою f , що ускладнює його застосування при вимірюваннях на морських судах і літаках.

6.8. НАДПРОВІДНІ ГРАВІМЕТРИ

В надпровідних гравіметрах дію сили тяжіння на пробну масу компенсує магнітна сила, що їй протидіє. В умовах надпровідного стану пробної маси та котушки зі струмом, яка створює магнітне поле, прилад набуває високу довготривалу стабільність.

Металам притаманна властивість надпровідності при температурі нижче 10°K . При критичній температурі для даного металу його електричний опір різко падає та стає настільки малим, що його не можна виміряти. Магнітне поле надпровідних котушок електромагніту підтримується без зовнішнього джерела енергії та стабільно в часі. Температура надпровідності досягається за допомогою рідкого гелію (точка кипіння $4,2\text{ K}$). Зовсім недавно були знайдені металеві сплави, які стають надпровідними вже при температурах $<100\text{ K}$; це значно спрощує завдання (охолодження рідким азотом) [124].

Надпровідний гравіметр був створений в кінці 1960-х рр. [125, 126]. Основними елементами гравіметра є надпровідна пробна маса у вигляді кульки (порожниста алюмінієва сфера діаметром 25 мм , покрита тонким шаром свинцю, критична температура для алюмінію $1,2\text{ K}$, для свинцю $7,2\text{ K}$) і надпровідні котушки. Магнітне поле котушок індукуює поле пробної маси, що має протилежний напрямок; відповідним підбором напруженості поля можна привести сферу в підвішений стан (стан левітації). Зміни сили тяжіння викликають відхилення сфери від нульового положення. Ці відхилення реєструються ємнісним індикатором переміщень і компенсуються за допомогою контуру зворотного зв'язку. Компенсуючий струм, що з'являється в керуючій котушці, служить

вимірювальним сигналом, він створює додаткове магнітне поле, яке безперервно утримує сферу в нульовому положенні.

Пробна маса та вся чутлива система поміщені в мідний кожух з надпровідним магнітним екраном; кожух вакуумований, температура в ньому підтримується незмінною до декількох мікрокельвінів. Внутрішня частина приладу розміщена в мідному контейнері з додатковим магнітним екраном. Вся система поміщена в посудину Дьюара (термос з дуже високим теплозахистом), заповнений рідким гелієм. Корпус гравіметра укріплений за допомогою труби із скловолокна на несучій рамі, що спирається трьома підйомними гвинтами на пілони гравіметра. Нахил гравіметра безперервно контролюють два кріогенних електронних нахиломіри; два підйомних мікрометричних гвинта служать для нівелювання системи (положення, при якому чутливість до нахилу дорівнює нулю).

Надпровідний гравіметр GWR створений фірмою GWR-Instruments, Сан-Дієго, Каліфорнія (нині випускається модель TT70). Основними його елементами є блок гравіметричного датчика (діаметр 0,5 м, висота 0,65 м, вага 80 кг) з блоком електроніки, два кріогенних нахиломіри з електронними схемами, 200-літровий посуд Дьюара (діаметр 0,6 м, висота 1,6 м, вага 140 кг) з індикатором рівня гелію та пристроєм для його поповнення (рис. 6.12).

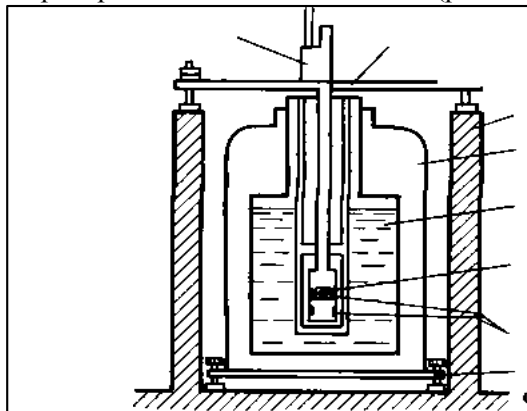


Рис. 6.12. Надпровідний гравіметр GWR з гравіметричним датчиком в посуді Дьюара

Додаткова система компенсації враховує малі зміни нахилу пілонів, точність нахиломірів 0,1 мкрад. Внаслідок поступове випаровування гелію його доводиться поповнювати приблизно кожні два місяці; додаткове охолодження за допомогою вакуумного генератора може продовжити термін до року та більше.

Для абсолютного калібрування системи запропонований метод додаткової маси ($\pm 0,1\%$). Крім того, масштабний коефіцієнт можна контролювати, виконуючи одночасно спостереження з каліброваним пружинним гравіметром або випробуваннями на фундаментальній земноприливній станції в Брюсселі. Перспективним виявився метод калібрування за додатковим прискоренням. Тимчасову стабільність масштабного коефіцієнта можна неперервно контролювати вбудованою електростатичною системою.

За допомогою сталевोї кулі, наповненої ртуттю (325 кг), що розміщується на відстані 25 – 50 см від гравіметра, вдалося виконати калібрування з точністю $\pm 0,2\%$ [127]. В Інституті прикладної геодезії (Франкфурт-на-Майні) при калібруванні по додатковому прискоренню (висота підйому 0,1 мм, період 1 хв, максимальне прискорення 0,11 мГал) досліджували застосування п'єзоелектричних перетворювачів [126].

При реєстрації даних в якості вихідного сигналу можна використовувати напругу в контурі зворотного зв'язку, або невідфільтровану, або після електронного фільтра. Подальша цифрова фільтрація дозволяє застосовувати будь-які алгоритми з відомими характеристиками та без фазових затримок.

У приладі Інституту прикладної геодезії (Франкфурт-на-Майні) фільтрація земно-приливних спостережень викликає демпфірування коливань з періодами < 30 с (часова затримка 10 – 20 с); при фільтрації мод посилюються коливання з резонансними частотами власних коливань Землі та одночасно демпфіруються коливання всіх інших областей спектра. Після фільтрації приливний сигнал записується в цифровій формі, інтегрується за 1 с та використовується в якості вхідного сигналу при обчисленнях змінного середнього з вікном в 10 вимірювань. Блок реєстрації з процесором обробляє сигнал гравіметра, записує та враховує зміни атмосферного тиску, температури, нахилу, а також здійснює прив'язку до часу. Після введення середніх за 10 с в масив даних

інформація періодично записується на дискети та стає таким чином придатною для кінцевої обробки (наприклад, величини для кожної години) на головному комп'ютері.

Надпровідні гравіметри вже кілька років постійно використовуються в ряді інститутів (Каліфорнійському університеті, Інституті прикладної геодезії у Франкфурті-на-Майні, Бельгійській королівській обсерваторії в Брюсселі). Їх основним призначенням є вивчення довгоперіодичних приливних трансформаційних змін сили тяжіння, руху полюса та тектонічних процесів, зокрема, як передвісників землетрусів [128-130]. Щодо точності та тимчасової стабільності наявний досвід дозволяє зробити висновок про наступне:

- після врахування поправок за приливні варіації сили тяжіння та руху полюса результати вимірювань сильно корельовані з атмосферним тиском;

- після врахування атмосферного тиску починає проявлятися дрейф; на початку роботи гравіметра значення дрейфу по експоненті зменшується протягом декількох місяців; в подальшому дрейф стає дуже незначним (як правило, не перевищує 50 мГал/рік). Довгоперіодичні дрейфи можна апроксимувати поліномом малого ступеню (квадратичним, кубічним);

- залишковий інструментальний шум при осередненні вимірювань протягом години не перевищує 1 – 2 мГал на коротких відрізках часу і не перевищує 10 мГал за тривалий час [130, 131].

Довгоперіодичні дрейфи можуть бути викликані змінами в елементах електронної схеми приладу та змінами напруженості магнітного поля. Вплив першого з зазначених ефектів можна зменшити вдосконаленням електронної схеми, а вплив останнього – вимірами з надпровідними квантовими інтерференційними приладами (сквидами); проводяться експериментальні роботи в цій галузі [126, 129]. Крім цього на результати вимірювань впливають довгоперіодичні варіації атмосферного тиску, що не піддаються обліку, а також зміни рівня ґрунтових вод. При поповненні рідкого гелію і коригування нахилу виникають скачки і короткоперіодичного дрейфу в показаннях приладу.

6.9. КВАНТОВИЙ ГРАВИМЕТР

У Великобританії створено квантовий пристрій, що використовує холодні атоми для надточних вимірювань сили тяжіння. Його можна використовувати не тільки для пошуку корисних копалин – так буде покладено початок новому напрямку комерційного застосування квантових приладів, повідомляє видання New Scientist.

Гравіметр призначений для виявлення гравітаційних хвиль, які створюються «чорними дірами», що стикаються. Гравіметр відчуває тонкі зміни в силі гравітаційних полів, що генеруються будь-яким об'єктом, використовуючи хмари холодних атомів рубідію в якості датчиків. Ці хмари атомів знаходяться у вакуумній камері і охолоджуються до 80 мікроКельвінів – трохи вище абсолютного нуля.

Нафтогазова промисловість особливо зацікавлена в такому гравіметрі. Він може стати потужним інструментом, що допомагає відображати родовища нафти або мінералів: більш щільні матеріали будуть мати і більш сильне гравітаційне поле.

Будівельні компанії можуть використовувати гравіметр, щоб знайти труби, прокладені глибоко під землею, – так вдасться уникнути випадкового їх пошкодження. Існуючі технології для такого роду геофізичного картування громіздкі, складні у використанні і не так чутливі, як квантовий гравіметр.

Пристрій може використовуватися і в сейсмічному картографуванні, допомагаючи прогнозувати стихійні лиха, такі як цунамі або виверження вулканів.

Оскільки застосовується лазерне охолодження, а не громіздка кріогеніка, розмір прототипу гравіметра становить всього близько одного кубічного метра. В принципі його можна зробити ще більш компактним.

Спиридон Міхалакіс з Каліфорнійського технологічного інституту зазначає: «Квантова фізика сьогодні лежить в основі багатьох технологій, які ми вважаємо само собою зрозумілими, але тільки недавно ми навчилися використовувати квантові властивості для отримання неймовірно точних, недорогих і компактних версій приладів попередніх технологій – таких, як гравіметри ».

Фізики з Німеччини, США та Канади розробили портативний атомний гравіметр – прилад для точного вимірювання сил гравітації. Пристрій заснований на інтерференції атомів в конденсаті Бозе-Ейнштейна, вільно падаючих в полі сили тяжіння. Розміри приладу

приблизно відповідають коробці від взуття, а точність всього в 10 разів менше, ніж у масивних і малорухомих аналогів. Ряд істотних удосконалень, які намагаються зараз внести в конструкцію гравіметра, дозволять в подальшому вимірювати прискорення вільного падіння з точністю до мільярдних часток величини. Подібні вимірювання допоможуть в розвідці родовищ руди та карстових порожнин. Дослідження опубліковане в журналі *Physical Review Letters*, коротко про нього повідомляє *Physics*.

Гравіметри використовуються для аналізу варіацій сили тяжіння в різних точках Землі. Традиційно такі прилади засновані на дослідженні руху тіл в гравітаційному полі: вимірі часу вільного падіння або частоти коливань пружинних маятників. Більш сучасні прилади використовують для аналізу левітації надпровідних кілець (ефект Мейсснера) і атомну інтерферометрію. Точність вимірювань абсолютної величини прискорення таких гравіметрів досягає десятимільярдних її часток.

Робочим тілом в атомних гравіметри є бозе-ейнштейнівський конденсат – хмара холодних атомів (частки Кельвіна), стислих настільки, що їхні хвильові функції перекриваються і всі вони ведуть себе як єдина квантова система. Такий конденсат за допомогою лазерного імпульсу пускають у вільне падіння з двох плечей (каналів). При цьому початкова швидкість конденсату в цих каналах відрізняється на заздалегідь відому величину (вона дорівнює «віддачі» від імпульсу). У точці перетину відбувається явище інтерференції. Хвильові функції атомів будуть складатися та результат цього додавання буде залежати від різниці фаз, внесеної різницею швидкостей. А ця величина прямо залежить від прискорення вільного падіння.

Розміри таких установок можна порівняти з ростом людини – через це вони маломобільні та їх не можна застосовувати в польових дослідженнях. Зараз на Заході знайшли спосіб мініатюризувати атомні гравіметри, використавши для цього так звані атомні чіпи і багаторазове повторення вільного падіння.

В основі експериментальної установки знаходиться «атомний чіп» – портативний пристрій, здатний генерувати хмару бозе-ейнштейнівського конденсату. Хмара в чіпі містить 10 тисяч атомів рубідію, охолоджених до 50 наноКельвінів і захоплених магнітною пасткою. Для початку вимірювання на хмару направляється

спеціально підготовлений лазерний імпульс, який змінює магнітний стан рівно половини атомів. Цей же імпульс надавав їм додаткову початкову швидкість.

Атоми пролітали біля одного сантиметра – між запуском вільного падіння та вимірювальним імпульсом встигало пройти близько 10 мс. Вчені знайшли спосіб збільшити цей час, використовуючи додатковий імпульс лазера, що підкидає конденсат майже до вихідного положення. У сукупності з повторенням роздільного лазерного імпульсу та подальшим падінням час експерименту збільшувався до 50 мс.

Точність вимірювань за допомогою портативного гравіметра виявилася приблизно в 10 разів менше, ніж у повнорозмірних приладів – $1,7 \times 10^{-7}$ прискорення вільного падіння. Без зворотного підкидання точність вимірювання була приблизно в 100 разів гірше (статистика набиралася протягом восьми годин). За словами авторів, використання досконаліших атомних чіпів (генеруючих конденсат з 100 тисяч атомів) та обладнання, портативний прилад може досягти точності мільярдних часток прискорення.

Величина гравітаційних аномалій вимірюється в галах – сотих частках метра в секунду в квадраті. Величина прискорення вільного падіння в цих одиницях дорівнює на поверхні Землі приблизно складає 980 гал. Прийнята точність гравіметрії відповідає десяткам і сотням мікроГал. Щоб оцінити розмір цієї величини, можна вказати, що приріст прискорення вільного падіння через додаткову масу в один кілограм на глибині одного метра під землею становить 0,007 мкГал. Варіації прискорення вільного падіння через вплив Місяця складають 24000 мкГал. Гори та моря викликають регіональні аномалії з величиною в сотні тисяч мкГал, розкид прискорення вільного падіння між полюсами та екватором складає кілька мільйонів мкГал. Точність оптимізованого приладу, пропонованого фізиками, може досягти величин менше 1 мкГал.

7. ВІДНОСНІ ВИМІРЮВАННЯ СИЛИ ТЯЖІННЯ

7.1. СИСТЕМА «ВЕРТИКАЛЬНА ПРУЖИНА – МАСА»

Раніше були описані принципи вимірювальних пристроїв, у яких елементарна маса рухається під дією гравітаційного поля. Приклади таких методів – маятник і тіло, що вільно падає. Розглянемо гравіметри, які називаються статичними, оскільки вимірювання виконуються при непорушній елементарній масі. Відповідно, існує рівновага між гравітаційною силою і силою, що їй протидіє. Остання сила, як правило, створюється пружною силою. Вочевидь, перед тим як досягти стану рівноваги, маса приводиться в рух, який може бути або переміщенням, або обертанням. З цієї, а також історичної точки зору, прийнято розрізняти дві групи статичних гравіметрів – вони називаються вертикальними пружинними терезами та важільними пружинними терезами.

Розглянемо фізичні принципи вимірювань для гравіметрів першої групи.

7.2. ВЕРТИКАЛЬНІ ПРУЖИННІ ТЕРЕЗИ

Розглянемо підвішену вертикальну пружину довжиною l_0 (рис.7.1, а). Уявимо, що в деякий момент до її нижнього кінця прикріплений вантаж [98]. Потім під дією сили тяжіння вантаж починає рухатися, що викликає зміну довжини пружини і появу пружної сили. Досить швидко рух припиняється (тіло зупиняється). Це відбувається тоді, коли вага і пружна сила мають однакові величини і протилежні за напрямком. У відповідності з законом Гука величина пружної сили для пружини

$$F = k(l - l_0) \quad (7.1)$$

Тут l – довжина пружини, $l - l_0$ – видовження пружини під дією ваги:

$$P = mg, \quad (7.2)$$

а k – параметр пружності пружини, який залежить від матеріалу, з якого вона виготовлена, її конструкції та геометрії. Суттєвим є те,

що k обернено пропорційний довжині пружини: $k \sim \frac{1}{l}$. З закону Гука слідує, що за наявності тільки нормального напруження σ та деформації ε , в напрямку сили:

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (7.3)$$

Тут σ – нормальне напруження, яке дорівнює відношенню сили $\vec{F}$ до елементарної поверхні dS , за умови що ця сила має тільки одну складову, що нормальна до dS :

$$\sigma = \frac{F}{dS}.$$

Деформація ε звичайно має дуже невелике значення і може бути представлена як

$$\varepsilon = \frac{l-l_0}{l_0} \ll 1, \quad (7.4)$$

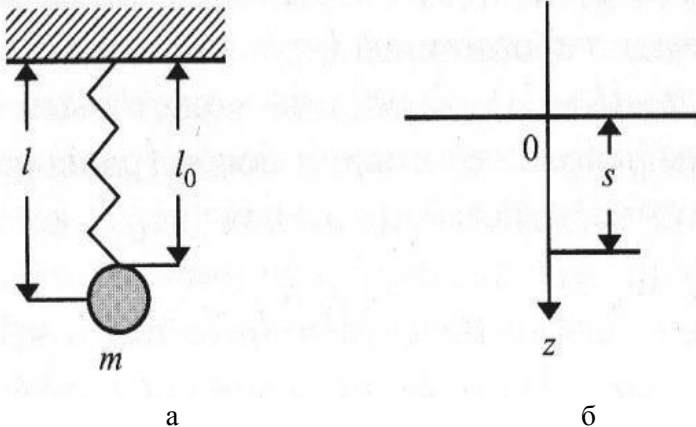


Рис. 7.1. Система: пружина та маса(а); ілюстрація рівняння (7.9) (б)

Та замість рівняння (7.3) маємо

$$F = \frac{EdS}{l_0} (l - l_0). \quad (7.5)$$

Тут E – модуль Юнга. Порівняння з рівнянням (7.1) ясно показує, що параметр k , який ще називають жорсткістю пружини, обернено пропорційний її довжині. Іноді k також називається постійною пружності, проте це легко може викликати плутанину внаслідок його залежності від довжини. За визначенням закон Гука справедливий, коли є лінійна залежність між напругою і

деформацією (рівняння 7.3). Наприклад, якщо $l_0 = 0$, то $(l - l_0)$ звичайно не може бути більшим за 1 мм. Запишемо умову стану спокою (рівноваги) для всіх елементів системи «маса – пружина»:

$$mg = k(l - l_0) \quad (7.6)$$

або

$$g = \frac{k}{m}(l - l_0). \quad (7.7)$$

7.2.1 Механічна чутливість системи

Вимірюючи видовження пружини, можна оцінити гравіметричне поле. Проте основною метою статичного гравіметра є визначення зміни поля як функції точки спостереження. Нехай g_1 і g_2 – значення поля в двох точках. Тоді в відповідності з рівнянням (7.7) маємо:

$$g_2 = \frac{k}{m}(l_2 - l_0), \quad g_1 = \frac{k}{m}(l_1 - l_0),$$

і відповідно,

$$\Delta g = g_2 - g_1 = \frac{k}{m}(l_2 - l_1) = \frac{k}{m}\Delta l$$

або

$$\Delta l = \frac{m}{k}\Delta g \quad (7.8)$$

Остання залежність характеризує механічну чутливість вертикальних пружинних терезів, оскільки показує зміну переміщення, викликану зміною поля; відношення $\frac{m}{k}$ – параметр цієї чутливості. Цілком зрозуміло, що зі збільшенням цього відношення можна спостерігати менші зміни поля, оскільки різниця Δl стає більшою. Ця залежність між m і k практично очевидна. Наприклад, зі збільшенням маси сила тяжіння збільшується та для досягнення рівноваги потрібно більше видовження пружини. Те ж саме справедливо при зменшенні жорсткості, оскільки в цьому випадку потрібно більше видовження для компенсації даної ваги. В подальшому ми розглянемо методи, які дозволяють підвищити механічну чутливість, один з них оснований на зменшенні параметра k пружної системи. Для того, щоб продемонструвати важливість підвищення чутливості, наведемо числовий приклад. Нехай гравітаційне поле Землі ($g = 9,8 \frac{m}{c^2}$) викликає видовження

пружины $(l - l_0)$, яке дорівнює 10^{-1} м. Тоді з рівняння (3.101) параметр чутливості дорівнює

$$\frac{m}{k} \approx 10^{-2} \text{ с}^2.$$

Відповідно, зміна поля приблизно на $1 \text{ мкГал} = 10^{-8} \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ викличе надзвичайно малу зміну довжини пружини: $\Delta l = 10^{-10} = 0,1 \text{ нм} = 1 \text{ \AA}$, тобто порівняно за величиною з діаметром атома водню. Можна сказати, що історія розробки статичних гравіметрів – це історія дивовижного підвищення чутливості цих приладів із застосуванням різних підходів і здібності вимірювати переміщення маси, які порівняні з розмірами атома.

Розглянемо характеристики динамічних властивостей статичних гравіметрів.

7.2.2. Рівняння вільних коливань маси

Як вже було розглянуто піше, ми спостерігаємо рівновагу системи, яка знаходиться в русі і складається з вантажу (маси), який прикріплений до вертикальної пружини. Для описання цього руху виберемо систему координат з початком у точці рівноваги $z = 0$, де вісь Z направлена донизу (рис.3.6, b). У відповідності з другим законом Ньютона зміщення маси s представляється рівнянням:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = F. \quad (7.9)$$

Тут $s(t)$ – відстань від маси до початку координат, F – повна сила, що діє на елементарну масу. Відзначимо, що в точці рівноваги $z = 0$ пружна сила пружини не дорівнює нулю і вона компенсує вагу. Якщо масу m видалити з цієї точки, виникає додаткова пружна сила, і результуюча сила F є сумою наступних сил.

1. Вага $P = mg$
2. Пружна сила $F_{\text{пр1}} = -k(l - l_0)$, яка разом з вагою забезпечує рівновагу. Знак «мінус» означає, що ця система направлена вгору, тобто в напрямку, протилежному осі z .

3. Пружна сила $F_{\text{пр2}}$, яка пов'язана з додатковою деформацією внаслідок руху пружини; у відповідності з законом Гука

$$F_{\text{пр2}} = -ks.$$

Тут s – переміщення маси від початку координат, знак «мінус» вказує, що напрямок цієї сили і руху протилежні одне одному. В дійсності, коли маса рухається вниз, пружина видовжується, і внаслідок цього пружна сила намагається перемістити цю масу вгору. Теж саме спостерігається і при стисненні пружини.

4. В процесі руху маса зазнає опору, який викликаний різними факторами, наприклад, повітрям. Сила опору повітря протидіє руху, вона прямо пропорційна швидкості:

$$F_x = -\alpha \frac{ds}{dt},$$

де α – коефіцієнт опору.

Таким чином, рівняння (7.9) перетворюється в

$$m \frac{d^2s}{dt^2} + \alpha \frac{ds}{dt} + ks + mg - k(l - l_0) = 0$$

Приймаючи до уваги рівняння (7.7), отримаємо:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2n \frac{ds}{dt} + \omega^2 s = 0 \quad (7.10)$$

Тут

$$2n = \frac{\alpha}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (7.11)$$

І це параметри пружинно-масової системи. Відзначимо, що маса пружини неістотна в порівнянні з m . Отримали однорідне звичайне лінійне диференціальне рівняння другого порядку. Для розв'язку цього рівняння представимо функцію $s(t)$ у вигляді

$$s(t) = Ce^{rt}.$$

Підстановка в рівняння (7.10) дає характеристичне рівняння

$$r^2 + 2nr + \omega_0^2 = 0,$$

у якого є два корені

$$r_{1,2} = -n \pm (n^2 - \omega_0^2)^{\frac{1}{2}} \quad (7.12)$$

Відповідно розв'язок рівняння (7.10):

$$s(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}. \quad (7.13)$$

Тут C_1 і C_2 – постійні, які визначаються тільки з початкових умов, оскільки рівняння (7.10) не вміщує ніякої інформації про них. Перш ніж описувати поведінку функції $s(t)$, відзначимо наступне: спочатку система знаходиться в рівновазі, оскільки зовнішня сила, вага, компенсуються пружною силою, викликаною розтягненням

пружини. Іншими словами результуюча сила дорівнює нулю. Потім в момент $t = 0$ маса переміщується з початкового положення $z = 0$. Це може відбутися різними способами, наприклад, шляхом застосування імпульсної сили, що діє впродовж нескінченно короткого часу (миттєвої). Внаслідок зміщення маси баланс між вагою і пружною силою порушується, і спостерігається рух під дією тільки внутрішніх сил, а саме пружної сили і сили тертя. Відповідно, цей рух називається вільними коливаннями, слово «вільні» підкреслює той факт, що зовнішні сили під час руху відсутні.

7.2.3. Граничний випадок, $n = 0$

Дослідимо поведінку функції $s(t)$ для різних параметрів системи; насамперед розглянемо граничний випадок, коли затухання відсутнє, $n = 0$. Як слідує з рівняння (7.12), його корені чисто уявні:

$$r_1 = i\omega_0 \text{ та } r_2 = -i\omega_0 \quad (7.14)$$

Використовуючи формулу Ейлера

$$e^{\pm i\omega t} = \cos \cos \omega_0 t \pm i \sin \sin \omega_0 t$$

і підставляючи її в рівняння (7.13), отримуємо:

$$s(t) = (C_1 + C_2) \cos \cos \omega_0 t + i(C_1 - C_2) \sin \sin \omega_0 t.$$

Введемо наступні позначення

$$C_1 + C_2 = A \sin \sin \emptyset \text{ та } i(C_1 - C_2) = A \cos \cos \emptyset.$$

і тоді отримаємо

$$s(t) = A \sin \sin (\omega_0 t + \emptyset) \quad (7.15)$$

В останньому рівнянні A – амплітуда, $\emptyset$ – початкова фаза, ω_0 – частота вільних коливань. Таким чином, за відсутності затухання вільні коливання є синусоїдальними функціями, і цей результат легко передбачити, оскільки маса зазнає дії тільки пружної сили. Інакше, сума кінетичної і потенціальної енергій системи залишається незмінною будь-який момент часу, і маса виконує періодичний рух по відношенню до початку координат, що супроводжується періодичним розтягненням і стисканням пружини. Як слідує з рівняння (7.11), період вільних коливань дорівнює

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.16)$$

Таким чином,

$$\frac{m}{k} = \frac{T_0^2}{4\pi^2}. \quad (7.17)$$

Це залежність механічної чутливості вертикальної пружинно-масової системи від періоду вільних коливань. Відповідно, можна стверджувати, що чутливість збільшується як квадрат періоду T_0 .

7.2.4. Три типи затухання вільних коливань

В дійсності завжди є затухання ($n \neq 0$), і вільні коливання можуть вести себе зовсім по-різному. Можна розглядати три випадки.

Слабке затухання

У відповідності з рівнянням (7.12) корні комплексні і

$$(n^2 - \omega_0^2)^{\frac{1}{2}} = ip.$$

Як слідує з рівнянь (7.12) і (7.13) функція $s(t)$ може бути представлена у вигляді

$$s(t) = Ae^{-nt} \sin \sin (pt + \emptyset). \quad (7.18)$$

Тут

$$p = (\omega_0^2 - n^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (7.19)$$

Таким чином, функція $s(t)$ є добутком двох функцій: спадаючої експоненціальної і синусоїдальної функції з частотою p . Наприклад, якщо $n \ll \omega_0$, вільні коливання близькі до функції, яка описується слабо спадаючою з часом синусоїдою, їх частота приблизно дорівнює ω_0 .

Критичне затухання, $n = \omega_0$

Зі збільшенням параметра n експоненціальне спадання посилюється, а частота вільних коливань знижується. Якщо $n = \omega_0$, коливання описуються функцією

$$s(t) = (C_1 + C_2)e^{-nt} \quad (7.20)$$

і періодична поведінка зникає. Замість цього можна спостерігати збільшення зміщення, доки не буде досягнуто максимуму, а потім плавне повернення в стан рівноваги.

Сильне затухання

В цьому випадку, як випливає з рівняння (7.12), обидва корені від'ємні, і функція $s(t)$ є сумою двох експонент:

$$s(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \quad (7.21)$$

а її поведінка практично аналогічна попередньому випадку.

7.2.5. Вимушені коливання

Розглянемо більш загальний і реальний випадок, коли вільні коливання все ще відіграють певну роль. Припустимо, що вертикальна пружина з масою знаходиться в стані рівноваги до моменту $t = 0$, потім ми прикладаємо деяку зовнішню силу $F_3(t)$, яка діє впродовж інтервалу часу $0 \leq t \leq t^*$. Відповідно рівняння (7.9) може бути представлено як

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = F_3 - \alpha \frac{ds}{dt} - ks$$

або

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2n \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = f_3(t), \quad (7.22)$$

де

$$f_3(t) = \frac{F_3}{m}.$$

Отримали неоднорідне диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами. Виходячи з теорії лінійних рівнянь, його розв'язок є сумою

$$s(t) = s_0(t) + s_1(t). \quad (7.23)$$

де $s_0(t)$ – вільне коливання, тобто ця функція є розв'язком однорідного рівняння ($f_3 = 0$), а $s_1(t)$ – частковий розв'язок неоднорідного рівняння, яке сильно залежить від зовнішньої сили $F_3(t)$ і існує тільки впродовж часу прикладання зовнішньої сили. Таким чином, в перший проміжок часу $0 \leq t \leq t^*$ зміщення вантажу є суперпозицією вільних і вимушених коливань, а потім спостерігаються тільки вільні коливання, $t > t^*$. Оскільки тільки параметри системи, тобто корені характеристичного рівняння визначають часову залежність вільних коливань, вони звичайно ускладнюють вивчення зовнішньої сили. Для зменшення їх впливу затухання використовується так, що в межах першого проміжку часу

є момент, коли можна почати бачити тільки вимушені коливання. Іншими словами, на відміну від вільних коливань затухання не впливає на зменшення вимуваних коливань з часом. Розглянемо тепер приклад, який має пряме відношення до вимірів гравітаційного поля. Нехай в деякій точці, де гравітаційне поле дорівнює g_1 , пружинно-масова система знаходиться в рівновазі, тобто вага компенсується пружною силою пружини. Такий пристрій переміщується до точки з полем g_2 , де $g_2 = g_1 + \Delta g$ і починаються вимірювання зміщення в момент $t = 0$. Відповідно, рівняння (7.22) перетворюється в

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2n \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = \Delta g \quad (7.24)$$

Якщо ми допустимо, що цей пристрій починає вимірювати негайно, функція Δg описується ступінчастою функцією (рис.7.2, а). Щоб знайти зміщення маси, яке викликане силою, що описується ступінчастою функцією, вимушені коливання, можна застосовувати різні підходи, наприклад перетворення Фур'є. Розв'яжемо цю задачу інакше і представимо, що права частина рівняння (7.24) веде себе таким чином

$$\Delta g = 0 \quad \text{при } t < 0$$

та

$$\Delta g(t) = \Delta g[1 - e^{-\beta t}] \quad \text{при } t > 0 \quad (7.25)$$

де β – додатне число. В межах, коли β прямує до нескінченності, отримуємо ступінчасту функцію. Застосовуючи метод проб і помилок, представимо частковий розв'язок у вигляді

$$s(t) = A + B e^{-\beta t}.$$

Його підстановка в рівняння (3.118) дає

$$(\beta^2 - 2n\beta + \omega_0^2) B e^{-\beta t} + A \omega_0^2 = \Delta g[1 - e^{-\beta t}],$$

звідки отримуємо

$$A = \frac{\Delta g}{\omega_0^2} iB = - \frac{\Delta g}{\beta^2 - 2n\beta + \omega_0^2}.$$

У випадку ступінчастої функції маємо $B = 0$, а коефіцієнт A залишається тим самим і дорівнює

$$A = \frac{\Delta g}{\omega_0^2} = \frac{\Delta P}{k}, \quad (7.26)$$

це визначає статичне переміщення маси між двома точками, викликане зміною її ваги.

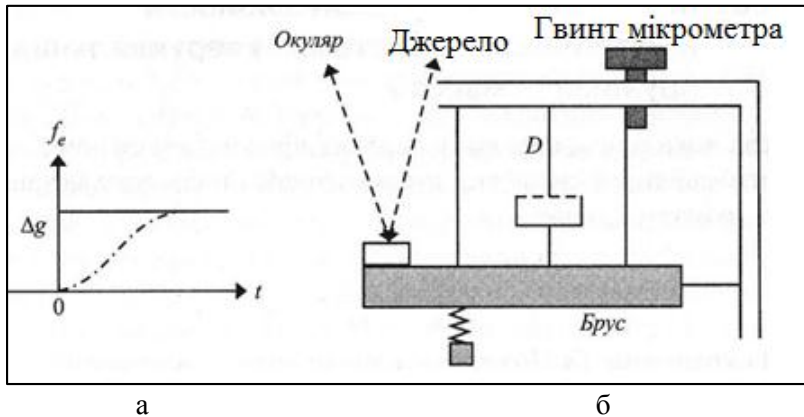


Рис. 7.2. Ілюстрація до роботи гравіметра
Ступінчата сила (а); гравіметр Хартлі (б)

Таким чином, повне переміщення

$$s(t) = \frac{\Delta g}{\omega_0^2} + C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad (7.27)$$

і постійні, що характеризують вільні коливання, можуть бути знайдені з початкових умов. Оскільки метою є, використовуючи затухання, видалити вплив цієї частини переміщення і отримати рівновагу, ці постійні обчислювати не будемо. Вочевидь, можна представити постійну переміщення як різницю:

$$s = s_2 - s_1 = \Delta s = \frac{m}{k} \Delta g,$$

де s_1 і s_2 – зміщення вантажу в двох точках під дією поля g_1 і g_2 відповідно. Було б правильно відзначити, що за відсутності вільних коливань ступінчата функція негайно переміщує вантаж в положення рівноваги.

7.2.6. Механічна чутливість і стійкість системи «вертикальна пружина – маса»

Як вже було сказано, коефіцієнт пропорційності між змінами зміщення і змінами поля є механічною чутливістю

$$\frac{m}{k} = \frac{T_0^2}{4\pi^2}.$$

З рівняння (7.24) слідує також, що у рівновазі

$$\omega_0^2 s = g.$$

Провівши диференціювання по g , отримаємо

$$\frac{\partial s}{\partial g} = \frac{m}{k} = \frac{T_0^2}{4\pi^2}. \quad (7.28)$$

Таким чином, механічна чутливість – це швидкість зміни переміщення, яке викликане зміною гравітаційного поля. І для того, щоб оцінити її в цілому, необхідно взяти похідну. Ймовірно, слід відзначити, що у відповідності з рівнянням (7.7)

$$\frac{\partial s}{\partial g} = \frac{\Delta l}{g} = \frac{l-l_0}{g}, \quad (7.29)$$

де Δl – видовження пружини під дією гравітаційного поля. І в області пружних деформацій воно має бути значно менше, ніж початкова довжина. Припускаючи, що параметри системи постійні (рівняння 7.24 – лінійне), ми маємо справу з лінійною системою. Крім того, є лінійна залежність між зміщенням і зміною поля.

Розглянемо деякі особливості одного з найпростіших гравіметрів, який був створений багато років тому Хартлі (рис.7.2, б). Він добре ілюструє можливості системи «вертикальна пружина – маса». Сам гравіметр складається з бруска, підвіски, пружного елемента (пружини) з вантажем, регулюючої пружини з мікрометричним гвинтом, джерела світла, лінз, дзеркала, окуляра та шкали. Зміна гравітаційного поля викликає зміну положення маси, де за допомогою регулюючої пружини маса повертається в початкове положення, що відповідає полю в опорній точці. Шкала мікрометра дозволяє виміряти це зміщення, яке пропорційне зміні гравітаційного поля між точкою спостереження і опорною точкою.

Схема оптичного шляху дозволяє підсилити дуже малі зміни довжини пружини, що забезпечує точність приблизно 1 мГал. Механічний пристрій (мікрометр) приводить масу в початкове положення після досягнення рівноваги. Згодом були застосовані електричні методи компенсації, вони постійно утримували масу в початковому стані. В обох випадках передбачається, що пружна сила прямо пропорційна зміщенню, тобто виконується закон Гука.

Відзначимо, що сучасні пристрої дозволяють враховувати вплив нелінійності між напругою та деформацією. В той же час впродовж багатьох років головною метою було підвищення механічної чутливості гравіметра для вимірювання відносно малих змін поля, і тільки нещодавно завдяки помітним удосконаленням методів вимірювання малих сигналів ця задача стала менш важливою.

Тепер повернемося до системи – вертикальній пружині з вантажем. У відповідності з рівнянням (7.29) при збільшенні маси чи зменшенні жорсткості механічна чутливість підвищується. Проте на практиці вимірювання цих двох параметрів відносно невеликі. Наприклад, збільшення маси швидко приводить до відносно великих переміщень, які не задовольняють закон Гука, якщо початкова довжина пружини досить мала. Той же ефект спостерігається при зменшенні жорсткості.

Аналогічна проблема підвищення механічної чутливості існувала для вертикальних сейсмографів, і для удосконалення цих пристроїв Л. Ла-Коста більш 70 років тому розробив так звану пружину нульової довжини.

7.2.7. Стійкість вертикальної пружинно-масової рівноваги

Вертикальна пружина та маса – це приклад стійкої системи, і за визначенням, це означає, що довільно мала зовнішня сила не викликає великого зміщення маси від положення рівноваги. Відповідно, маса коливається на незначному відтинку від положення рівноваги. Стійкість цієї системи прямо слідує з рівняння (7.8), доки механічна чутливість має кінцеве значення, воно справедливе для будь-якого положення маси. Нехай в початковий момент прикладається малий імпульс сили, дельта-функція.

Тоді виникають малі коливання, і маса в результаті затухання повертається в своє початкове положення. Якщо зовнішня сила мала і постійна, тоді маса після невеликих коливань займає нове положення рівноваги, яке лише незначно відрізняється від початкового. В обох випадках пружна сила пружина направлена до положення рівноваги, і це забезпечує стійкість.

7.3. ПРУЖИНА З ПОЧАТКОВИМ СТИСНЕННЯМ І ЗАКОН ГУКА

Далі ми розглянемо винахід Ла-Коста і покажемо, що він дозволяє зробити пружину з суттєво меншою жорсткістю. З умови рівноваги слідує

$$T_0 = 2\pi \left(\frac{l-l_0}{g} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (7.30)$$

і це чітко показує, що зі збільшенням різниці $\Delta l = l - l_0$ механічна чутливість стає більшою. Оскільки для звичайних пружин ця величина занадто мала, Ла-Кост підняв наступне питання. Чи можливо виготовити таку пружину, щоб замість різниці була загальна довжина пружини l ? В цьому випадку період істотно збільшиться, і те ж саме відбудеться з механічною чутливістю, в результаті отримаємо

$$T_0 = 2\pi \left(\frac{l}{g} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (7.31)$$

У відповідності з законом Гука l – довжина пружини при її деформації. Порівнюючи рівняння (7.30) і (7.31) можна сказати, що нова пружина в нерозтягнутому стані повинна мати нульову довжину. Безсумнівно, для звичайної пружини це неможливо, але формально все відбувається так, ніби $l_0 = 0$. По цій причині таку пружину часто називають пружиною нульової довжини, що легко і просто викликає плутанину. Існує декілька способів виготовлення такого типу пружини, для приклада розглянемо деякі з них. Перший просто вимагає вигинання проволочи пружини, яка щільно прижата до сердечника. Другий підхід включає скручування проволочи в процесі намотки. Врешті-решт, кожний виток проволочи спершу прокладається з однієї сторони на іншу, і якщо між ними є проміжок, робиться зворотний виток, і вони щільно притискаються один до одного. В результаті нова пружина має чудову властивість, а саме їй притаманна пружна сила F , навіть до прикладання вантажу до кінця пружини (рис. 7.3, а).

Коли пружину знімають з сердечника, існує та ж сама відновлювальна сила F_r в кожному її перетині. Слід відзначити, що ця сила забезпечує однорідну деформацію пружини і має напрямок,

що протилежний вантажу. Тепер подумки проведемо деякі експерименти і виведемо закон Гука для такої пружини.

Спочатку будемо вважати, що вантаж з масою m прикріплений до нижнього кінця пружини і сила F , що прикладається до маси, задовольняє нерівність

$$F < F_r, \quad (7.32)$$

і вона направлена вниз. Тому, загальна сила, що діє на кожний елемент пружини, дорівнює

$$\vec{F} - \vec{F}_r,$$

і взаємодія між нитками проволоки зменшується. Звичайно, ці зміни невидимі і вважається, що довжина пружини не залишається незмінною, проте в дійсності має місце дуже мале видовження, яке зменшує стиснення.

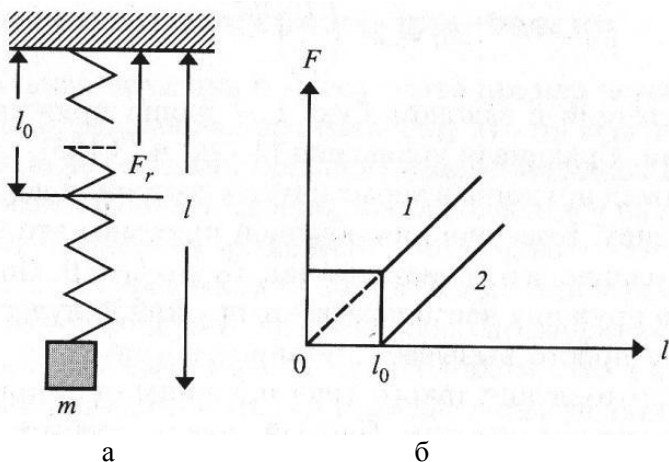


Рис.7.3. Ілюстрація до закону Гука

Пружина з силою F_r (а) ; загальна сила як функція довжини (б)

Зі збільшенням сили F деформація зменшується, і в момент коли

$$F = F_r,$$

вона зникає. При подальшому збільшенні сили можна побачити видовження пружини, оскільки $F > F_r$ і величина пружної сили, яка викликана видовженням пружини, дорівнює $k_0(l - l_0)$, де l_0 –

початкова довжина пружини з відновлювальною силою F_r . Відповідно, повна сила, яка прикладена до маси і направлена донизу, дорівнює сумі відновлювальної сили і сили, яка викликана розтягненням пружини. Обидві вони мають однаковий напрямок

$$F = F_r + k_0(l - l_0), \quad (7.33)$$

де k_0 – жорсткість пружини з відновлювальною силою, а рівняння (7.33) може розглядатися як закон Гука для такої пружини. Будемо вважати, що маса коливається біля точки рівноваги. Тоді рівняння руху трохи зміниться і набуде вигляду:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2n \frac{ds}{dt} + \frac{1}{m} [F_r + k_0(S - S_0)] = \Delta g,$$

і умова рівноваги при $F = mg$ має наступний вид:

$$F_r + k_0(l - l_0) = mg. \quad (7.34)$$

Припустимо, що пружина зроблена таким «розумним» чином, що відновлювальна сила прямо пропорційна початковій довжині l_0 і коефіцієнт пропорційності точно дорівнює пружному параметру k_0 :

$$F_r = k_0 l_0. \quad (7.35)$$

Тоді замість рівняння (7.33) отримаємо

$$F = k_0 l, \quad (7.36)$$

і рівняння руху набуде виду:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2n \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = g,$$

де

$$\omega_0 = \left(\frac{k_0}{m} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

В той же час умова рівноваги дає

$$k_0 l = mg. \quad (7.37)$$

Отже показано, що якщо відновлювальна сила підпорядковується рівнянню (7.35), замість періоду

$$T_0 = 2\pi \left(\frac{l - l_0}{g} \right)^{\frac{1}{2}}$$

отримуємо

$$T_0 = 2\pi \left(\frac{l}{g} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (7.38)$$

і це означає, що квадрат періоду зростає в $\frac{l}{l-l_0}$ разів. Звичайно, це сильне збільшення механічної чутливості системи, і це було метою винаходу Ла-Коста. Для ілюстрації на рис.3.8, б (лінія 1) показана поведінка загальної пружної сили, яка прикладена до маси. Для порівняння лінія 2 показує залежність пружної сили для звичайної пружини.

В цьому випадку існує мінімальна довжина l_0 ($l_0 \neq 0$), де пружна сила зникає, і це означає, що пружина не деформується. В присутності відновлювальної сили спостерігається інша поведінка. Якщо початкова довжина задана, тоді в усіх її перетинах сила має одне й те саме значення. Проте, коли ми починаємо зменшувати довжину l_0 , відновлювальна сила також стає меншою, ця лінійна залежність показана пунктирною лінією. В цьому випадку відновлювальна сила зникає, коли довжина стає нульовою, проте ця вірогідність не є сильним аргументом називати реальну пружину з кінцевою довжиною пружиною з нульовою довжиною. Відзначимо, що є простий спосіб перевірити, що дана пружина має «нульову» довжину.

Нехай, в рівновазі довжина пружини дорівнює l і навколо цієї точки відбуваються вільні коливання маси з періодом T_0 . Якщо це значення задовольняє рівняння (7.38), це означає, що пружина має «нульову» початкову довжину. Як було показано раніше, такий тип пружини підвищує механічну чутливість в $\frac{l}{l-l_0}$ раз і, враховуючи розмір реального гравіметра, це значення може досягати 20 – 30.

Звичайно, це було відчутне підвищення чутливості, і ці пружини знайшли широке застосування, особливо в гравіметрах, де маса бере участь у обертанні. Корисно зробити один коментар, розглянемо рівняння (7.33). Припустимо, що відновлювальна сила задовольняє нерівність

$$F_r = k_0 l_0.$$

Тоді можна записати

$$F_r = k_0 l_0 + k_0 l_0^*.$$

Підстановка цього рівняння в (7.33) дає

$$F = k_0 [l - (-l_0^*)], \quad (7.39)$$

і це ілюструє, чому іноді використовується досить дивна назва «пружина з від'ємною довжиною».

Тепер розглянемо системи, в яких маса обертається, і розглянемо найпростіший випадок.

7.4. ОБЕРТАЛЬНА СИСТЕМА «ПРУЖИНА – МАСА»

Основні особливості цього пристрою показані на рис.7.3,а. Вісь z направлена вздовж поля (вертикально), а важіль з невеликим вантажем масою m обертається навколо горизонтальної осі, проходячи через точку O . Довжина важеля дорівнює a . Крутильна пружина прикріплена до осі, її постійна кручення дорівнює μ . Вона є коефіцієнтом пропорційності між моментом τ і кутом обертання α :

$$\tau = \mu\alpha.$$

Також припустимо, що пружина має момент попереднього закручування:

$$\tau_0 = \mu\alpha_0, \quad (7.40)$$

де α_0 можна назвати кутом попереднього закручування, він характеризує деформацію пружини до дії гравітаційної сили. Як видно з рис.7.3,а, обертання маси відбувається під дією двох моментів, які орієнтовані вздовж горизонтальної осі Ox і направлені в протилежні сторони. Перший викликаний закручуванням пружини і переміщує вантаж проти часової стрілки:

$$\tau_0 = \mu(\alpha + \alpha_0). \quad (7.41)$$

Тут α_0 – кут між вертикаллю і важелем.

Другий момент викликаний вагою, і його величина дорівнює добутку довжини важеля на проекцію сили тяжіння на напрямок, перпендикулярний важелю. Таким чином, маємо

$$\tau_g = mga \sin \alpha, \quad (7.42)$$

і цей момент обертає масу по часовій стрілці. Рівновага настає при рівності величин обох моментів:

$$\mu(\alpha + \alpha_0) = mga \sin \alpha, \quad (7.43)$$

де m, a, μ, α_0 – параметри системи. Зрозуміло, що рівновага може наступити при будь-якому куті α , і величина цього кута залежить від гравітаційного поля g . Відзначимо, що крутильний момент лінійно залежить від кута α , але між цим кутом і другим моментом залежність нелінійна. Приклади поведінки обох моментів в залежності від кута показані на рис.7.3, б – г. При кутах, при яких криві перетинаються, спільний момент

$$\tau = mga \sin \alpha - \mu(\alpha + \alpha_0) \quad (7.44)$$

дорівнює нулю, в цих місцях спостерігається рівновага.

В якості ілюстрації розглянемо залежність результуючого моменту від кута для функцій τ_g і τ_s , що показана на рис.7.3 б. Якщо допустити, що $mga < \mu\alpha_0$, тоді при малих кутах переважає крутильний момент і $\tau < 0$. Відповідно, в інтервалі $0 < \alpha < \alpha_1$ (рис. 7.3, д) вантаж з масою m рухається проти часової стрілки. При куті $\alpha = \alpha_1$ загальний момент дорівнює нулю, і якщо масу помістити в це положення, вона залишиться в спокої.

При більших значеннях кута момент стає додатнім, і тому маса рухається по часовій стрілці. Зі збільшенням кута α момент також зростає до максимуму, а потім зменшується. Є ще один кут, коли момент дорівнює нулю, $\alpha = \alpha_2$, і ми спостерігаємо рівновагу, але при більших кутах маса знову намагається обертатися проти часової стрілки.

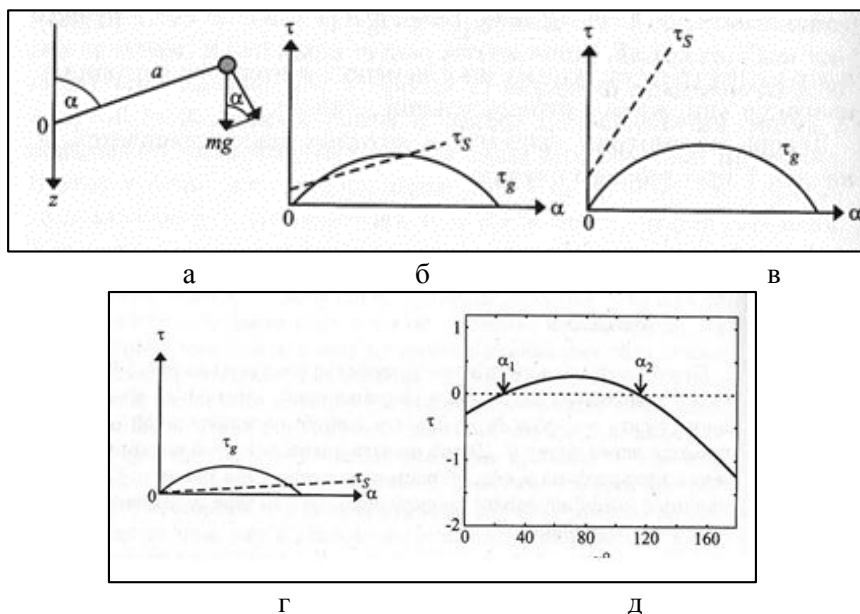


Рис.7.3. Ілюстрація щодо оберальної системи «пружина – маса»:

Обертальна система «пружина – маса» (а); функція $\tau(\alpha)$; (д) результуючий момент як функція кута (б-г)

Тепер зосередимо увагу на кутах, при яких загальний момент дорівнює нулю.

7.4.1. Три типи точок рівноваги

Спочатку припустимо, що положення маси (матеріального тіла) m характеризується кутом α_1 і маса знаходиться в спокої, потім вона переміщується в сторону більших значень кута. Розглянемо рух маси під дією обох моментів τ_g і τ_s . Оскільки результуючий момент додатний, маса починає рухатися по часовій стрілці, тобто від точки рівноваги. Те ж відбувається, якщо маса рухається в напрямку менших значень кутів. В дійсності, результуючий момент від'ємний, і маса намагається рухатися проти часової стрілки. Відповідно, відстань від початкової точки знову збільшується. Іншими словами, будь-яке мале зміщення веде до руху маси від цієї точки. За визначенням, точка з $\alpha = \alpha_1$ називається нестійкою. Відзначимо, що в цій точці похідна покуту від моменту додатна. Отже, ця точка відзначається двома умовами:

$$\tau = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} > 0. \quad (7.45)$$

З рівняння (7.44) слідує

$$\frac{\partial \tau}{\partial \alpha} = mga \cos \cos \alpha - \mu. \quad (7.46)$$

Це дозволяє записати умову (7.45) у вигляді

$$\tau = 0, \quad mga \cos \cos \alpha > \mu. \quad (7.47)$$

Далі припустимо, що положення маси характеризується кутом α_2 . Це друга точка рівноваги, оскільки результуючий момент тут дорівнює нулю. Як і раніше, трохи змістимо масу з положення рівноваги і вивчимо її рух, викликаний дією ваги і пружної сили пружини. Якщо це початкове положення характеризується більшими значеннями кута, результативний момент від'ємний, і маса рухається проти часової стрілки, тобто ближче до точки рівноваги. Така ж тенденція спостерігається при русі маси в протилежному напрямку, оскільки в цьому випадку момент додатний. Це означає, що мале початкове зміщення не уводить масу далеко від початкового положення, і ця точка називається стійкою.

Іншими словами, маємо стійку рівновагу. Як видно з рис. 3.9, є умова стійкої рівноваги:

$$\tau = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} < 0, \quad (7.48)$$

або

$$\tau = 0, \quad m g a \cos \alpha < \mu. \quad (7.49)$$

Ми розглянули два типи точок рівноваги, де похідна $\frac{\partial \tau}{\partial \alpha}$ або додатна, або від'ємна. Є ще один випадок, який має місце, якщо

$$\tau = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} = 0. \quad (7.50)$$

Щоб вивчити цей випадок, як два інших, розглянемо вільні коливання маси.

7.4.2. Рівняння обертання маси

Як і раніше, припустимо, що спочатку видовження пружини компенсує вагу і система пружин і важеля знаходиться в рівновазі. Потім в деякий момент часу маса зміщується з цього положення, і зовнішня сила прибирається. Після цього починаємо спостерігати поворот маси, викликаний результируючим моментом. Як слідує з другого закону Ньютона, рух елементарної маси описується рівнянням

$$I \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = \tau \quad \text{або} \quad I \ddot{\alpha} - \tau = 0. \quad (7.51)$$

Тут $I = m a^2$ – момент інерції, $\ddot{\alpha}$ – кутове прискорення, τ – результируючий момент. Відзначимо, що ми знехтували затуханням, але в дійсності, звичайно, воно завжди присутнє. Це рівняння характеризує рух для будь-якого кута α , але ми розглядаємо тільки околиці точок рівноваги. По цій причині результируючий момент в лінійному наближенні може бути представлений як

$$\tau(\alpha) = \tau(\alpha_*) + \frac{\partial \tau}{\partial \alpha}(\alpha - \alpha_*) + \dots \quad (7.52)$$

По суті ми розклали момент в околиці точки рівноваги $\alpha = \alpha_*$ в степеневий ряд і прийняли, що в цьому діапазоні похідна $\frac{\partial \tau}{\partial \alpha}$ постійна. Беручи до уваги, що в точках рівноваги $\tau(\alpha_*) = 0$ і ввівши позначення

$$\beta = \alpha - \alpha_*,$$

рівняння (7.51) може бути представлено у вигляді

$$I\ddot{\beta} - \frac{\partial \tau}{\partial \beta} \beta = 0 \quad \text{або} \quad \ddot{\beta} - n^2 \beta = 0. \quad (7.53)$$

Тут β – кутове зміщення маси по відношенню до точки рівноваги,

$$\ddot{\beta} = \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}, \quad n^2 = \frac{1}{I} \frac{\partial \tau}{\partial \beta} = \frac{1}{I} \frac{\partial \tau}{\partial \alpha}.$$

В кінцевому варіанті маємо

$$\frac{\partial \tau}{\partial \beta} = \frac{\partial \tau}{\partial \alpha},$$

швидкість зміни моменту в залежності від кута в точці рівноваги. Тепер покажемо, що рівняння (7.53) знову дозволяє побачити різницю між трьома типами точок рівноваги.

Нестійка рівновага, $\frac{\partial \tau}{\partial \beta} > 0$

В цьому випадку коефіцієнт n^2 додатний, і розв'язком рівняння (7.53) є

$$\beta(t) = Ae^{nt} + Be^{-nt}.$$

Таким чином, з часом маса m віддаляється від точки рівноваги.

Стійка рівновага, $\frac{\partial \tau}{\partial \beta} < 0$

Це означає, що $n^2 < 0$ і рівняння (7.53) може бути записано

$$\ddot{\beta} - \omega_0^2 \beta = 0.$$

Тут

$$\omega_0 = \left[\frac{1}{I} \left| \frac{\partial \tau}{\partial \beta} \right| \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (7.54)$$

і кутове зміщення описується синусоїдальною функцією:

$$\beta(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}. \quad (7.55)$$

В даному випадку маса коливається навколо точки рівноваги і за присутності затухання повертається в початкове положення $\beta = 0$. Очевидно, що період вільних коливань дорівнює

$$T_0 = 2\pi \left\{ \frac{I}{\left| \frac{\partial \tau}{\partial \beta} \right|} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (7.56)$$

Байдужа рівновага, $\frac{\partial \tau}{\partial \beta} = 0$

Як слідує з рівняння (7.46) це означає, що

$$mga \cos \alpha = \mu.$$

Відповідно, замість рівняння (7.53) маємо

$$\ddot{\beta} = 0,$$

і інтегрування дає результат:

$$\beta(t) = At + B. \quad (7.57)$$

Припускаючи, що в початковий момент кутова швидкість $\frac{\partial \tau}{\partial \beta}$ дорівнює нулю, робимо висновок, що маса m , яка поміщена в будь-яку точку поблизу точки рівноваги, залишається в спокої. Звичайно, це тільки наближення, оскільки в степеневих рядах (7.52) ми зберігали тільки лінійний член і видалили члени більш високих порядків. Формально цей випадок характеризується нескінченно великим періодом вільних коливань

$$T_0 \rightarrow \infty, \quad (7.58)$$

проте з фізичної точки зору це означає, що в околиці точки, де

$$\frac{\partial \tau}{\partial \alpha} = 0,$$

будь-яка точка є точкою рівноваги. В дійсності завжди існує деяка початкова швидкість і маса m не залишається у спокої, а віддаляється від точки рівноваги.

7.4.3. Механічна чутливість крутильних терезів

Визначимо механічну чутливість цієї системи в точці рівноваги, тобто залежність між зміною поля і зміною кута. Диференціювання рівняння (7.43) по g дає:

$$\mu \frac{d\alpha}{dg} = ma \sin \alpha \sin \alpha + mga \cos \alpha \cos \alpha \frac{d\alpha}{dg}.$$

Таким чином,

$$\frac{d\alpha}{dg} = \frac{mas \sin \alpha}{\mu - mg a \cos \alpha}, \quad (7.59)$$

а одиниці вимірювання чутливості $\frac{\text{рад}}{\frac{\text{м}}{\text{с}^2}}$. У випадку системи

«вертикальна пружина – маса» чутливість залежить тільки від двох параметрів k і m , проте тут присутній також вплив кута α . Застосовуючи умову рівноваги, рівняння (7.43), замість рівняння (7.59) отримуємо:

$$\frac{d\alpha}{dg} = \frac{\alpha - \alpha_0}{g[1 - (\alpha + \alpha_0) \cot \cot \alpha]} = \frac{(\alpha + \alpha_0) \tan \alpha}{g[\tan \alpha - (\alpha + \alpha_0)]}. \quad (7.60)$$

Припустимо, що параметри системи вибрані таким чином, що крутильний момент, викликаний гравітаційним полем g , коли $\alpha =$

$\frac{\pi}{2}$ виконуються відповідні виміри малих змін цього поля навколо цього положення. Для механічної чутливості маємо:

$$\frac{d\alpha}{dg} = \frac{\frac{\pi}{2+\alpha_0}}{g}. \quad (7.61)$$

Як слідує з рівняння (7.60) зміна кута α може істотно підвищувати механічну чутливість системи; це є важливою перевагою системи з пружини і важеля. Припустимо, що

$$\tan \tan \alpha_c = \alpha_c + \alpha_0. \quad (7.62)$$

Це означає, що механічна чутливість прямує до нескінченності, тобто малі зміни поля ведуть до необмежених змін кута, і система стає нестійкою. Очевидно, що в деякому інтервалі кутів, що близькі до критичного кута α_c , механічна чутливість може бути досить великою, а система досягає стану нестійкої рівноваги. Вибір параметрів, які задовольняють цій умові, називається астазуванням, ця процедура дозволяє значно підвищити механічну чутливість пружної системи гравіметра. В той же час ця система повинна бути стійкою, тобто маса повинна повертатися в своє початкове положення після дії малої сили; очевидно, що механічна чутливість і стійкість системи тісно пов'язані одне з одним поблизу положення рівноваги.

7.5. ВАЖІЛЬНА СИСТЕМА «ПРУЖИНА – МАСА»

Розглянемо умову рівноваги важільної системи «пружина – маса», яка представлена на рис. 7.4: вона має спільні риси з гравіметром Ла-Коста – Ромберга. Введемо наступне позначення $OA = d$ – відстань між горизонтальною віссю обертання O і верхнім кінцем пружини, за який вона підвішена, $AC = l$ – довжина пружини, $OB = h$ – перпендикуляр з точки O до пружини. $OC = b$ і $OD = a$, δ – кут між віссю зі лінією OA , α – кут, утворений лінією OA і важелем OD .

Як і в попередніх випадках, тут діють два моменти, що викликані вагою і пружиною, і вони рівні

$$\tau_0 = mga \sin \sin (\alpha + \delta)$$

і

$$\tau_0 = k(l - l_0)h. \quad (7.63)$$

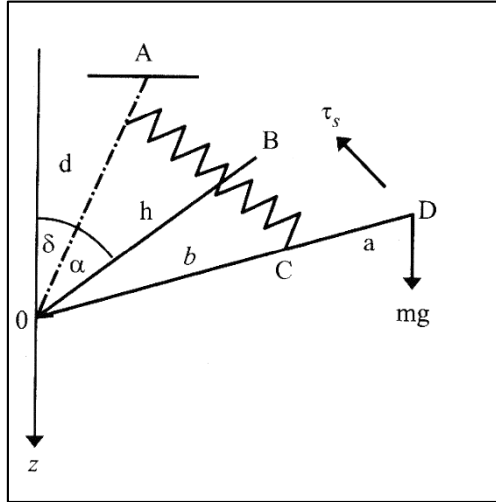


Рис. 7.4. Принципова схема гравіметра Ла-Коста – Ромберга

Зручно виражати цей момент через кут α , з цією метою розглянемо трикутник AOC . У відповідності з теоремою синусів

$$\frac{\sin \sin \alpha}{l} = \frac{\sin \sin A}{b}.$$

В той же час з трикутника AOB отримуємо

$$\sin \sin A = \frac{h}{a}.$$

Таким чином,

$$\frac{\sin \sin \alpha}{l} = \frac{h}{bd}$$

i

$$\tau_s = k(l - l_0) \frac{bd}{l} \sin \sin \alpha. \quad (7.64)$$

Відповідно, загальний момент системи дорівнює

$$\tau(\alpha) = mga \sin \sin (\alpha + \delta) - k(l - l_0) \frac{bd}{l} \sin \sin \alpha. \quad (7.65)$$

В цьому рівнянні $m, g, k, \delta, a, b, d, l_0$ – параметри системи.

Умова рівноваги очевидна:

$$mga \sin \sin (\alpha + \delta) = k(l - l_0) \frac{bd}{l} \sin \sin \alpha, \quad (7.66)$$

та для кожного значення гравітаційного поля можна очікувати два положення маси, де спостерігається стійка або нестійка рівноваги. Розглянемо їх детальніше.

7.5.1. Система пружин з нульовим вантажем

Якщо $l_0 = 0$, вплив довжини l зникає і рівняння (7.66) спрощується до

$$mga \sin \sin (\alpha + \delta) = kbd \sin \sin \alpha . \quad (7.67)$$

При визначенні похідної від τ (наприклад, з рівняння (3.159)) по α і прийнявши $l_0 = 0$, отримаємо:

$$\frac{\partial \tau}{\partial \alpha} = mga \cos \cos (\alpha + \delta) - kbd \cos \cos \alpha .$$

Потім підстановка рівняння (7.67) дає в точках рівноваги:

$$\frac{\partial \tau}{\partial \alpha} = - kbd \frac{\sin \sin \delta}{\sin \sin (\alpha + \delta)} . \quad (7.68)$$

Якщо $(\alpha + \delta) < \pi$, рівновага стійка, у випадку, коли $(\alpha + \delta) > \pi$, рівновага нестійка. У випадку, коли точка підвісу A розташована на осі z , $\delta = 0$, спостерігається байдужа рівновага.

Знайдемо вираз для механічної чутливості. Диференціювання рівняння (7.67) по g дає:

$$ma \sin \sin (\alpha + \delta) + mga \cos \cos (\alpha + \delta) \frac{d\alpha}{dg} = kbd \cos \cos \alpha \frac{d\alpha}{dg} .$$

Таким чином,

$$\frac{d\alpha}{dg} = \frac{ma \sin \sin (\alpha + \delta)}{kbd \cos \cos \alpha - mga \cos \cos (\alpha + \delta)} .$$

Із врахуванням умови рівноваги (7.67) останнє рівняння спрощується:

$$\frac{d\alpha}{dg} = \frac{ma \sin \sin (\alpha + \delta)}{mga \cos \sin \sin (\alpha + \delta) \cos \alpha - mga \cos \cos (\alpha + \delta) \sin \sin \alpha} \sin \sin \alpha ,$$

або

$$\frac{d\alpha}{dg} = \frac{\sin \sin (\alpha + \delta) \sin \sin \alpha}{g \sin \sin \delta} . \quad (7.69)$$

Очевидно, що, зменшуючи кут δ , можливо виконати астазування системи і підвищити механічну чутливість. Аналогічний підхід застосовується в загальному випадку, коли ми маємо справу з

пружиною ненульової довжини або системою таких пружин, і закон Гука має традиційний вид: $F = k(l - l_0)$.

7.5.2. Про вимірювання в присутності високочастотних завад

Розглянемо ще одну важливу особливість вертикальної, або важільної, системи «пружина – маса». Вона відноситься до застосування гравіметрів в морській геофізиці, до присутності як мінімум трьох додаткових джерел завад: зміна орієнтації гравіметра, сила Коріоліса та вплив сил, які викликаються хвилями. В процесі руху корабля гравітаційне поле і сили хвиль змінюються з часом, і величина останніх може бути на декілька порядків вище, ніж величина дії $g(t)$. Проте, вони мають зовсім різні спектри, що дозволяє суттєво знизити вплив цих завад. Для ілюстрації припустимо, що система «вертикальна пружина – маса» зазнає впливу синусоїдальної сили з частотою ω , і відповідно, рівняння руху має вид:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 2n \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = f \cos \omega t. \quad (7.70)$$

Щоб знайти зміщення маси, викликаною цією силою, введемо функцію $z(t)$ виду

$$z(t) = s(t) + in(t) \text{ або } s(t) = \text{Re} z(t), \quad (7.71)$$

і замість рівняння (7.70) розглянемо наступне рівняння:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2n \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = f e^{-i\omega t}. \quad (7.72)$$

Будемо шукати частковий розв'язок у вигляді

$$z(t) = A e^{-i\omega t}, \quad (7.73)$$

де A невідоме. Підстановка функції $z(t)$ в рівняння (7.72) дає

$$(-\omega^2 - 2i\omega n + \omega_0^2)A = f,$$

або

$$A = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega n}. \quad (7.74)$$

Отже,

$$z(t) = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega n} e^{-i\omega t},$$

і у відповідності з рівнянням (7.71) вимушені коливання маси, що викликані хвилями, також є синусоїдальними коливаннями:

$$s(t) = f \operatorname{Re} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega n}.$$

Виділивши реальну частину цього виразу, отримаємо:

$$s(t) = \frac{f}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2]^{\frac{1}{2}}} \cos \cos(\omega t - \phi), \quad (7.75)$$

де

$$\phi(\omega) = \frac{2n\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Як слідує з рівняння (7.75), якщо частота вільних коливань підпорядковується умові $\omega_0 \ll \omega$, тоді зміщення функції $s(t)$ стає надто малим: $s(t) \sim \frac{1}{\omega^2}$. Приймаючи це до уваги, можливо сильно зменшити вплив хвиль. Крім того, відносно сильне затухання дозволяє зменшити вплив вільних коливань, які викликані цією силою.

7.6. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО СТАТИЧНІ ГРАВІМЕТРИ

Принцип дії гравіметра з'ясуємо на простому прикладі (Рис. 7.5).

Нехай на тягарець масою m , який підвішений до пружини, діє сила $P_1 = mg_1$. Під дією цієї сили пружина розтягується, і тягарець здобуває статичну рівновагу, що відповідає відліку S_1 , знятому за спостереженням відлікової шкали.

При перенесенні гравіметра в інший пункт, в якому прискорення сили тяжіння є більшим, ніж у вихідному, додатково розтягнеться пружина і тим самим збільшить відлік гравіметра S_2 . Якщо виміряну різницю відліків $\Delta S = S_2 - S_1$ перемножити на деякий сталий коефіцієнт k , то одержимо різницю прискорень сили тяжіння Δg між цими пунктами в мілігалах

$$\Delta g = k(S_2 - S_1). \quad (7.76)$$

Всі статичні гравіметри побудовані на принципі пружної ваги (рис. 7.6), тобто такої, у якій за еталонну силу використовують силу деформації твердого тіла (кручення, розтягування, стиснення, згину). Саме такою високоточною пружинною вагою зважують один і той же тягарець сталої маси. Мірою зміни сили тяжіння є деформація пружинного елемента. Цю деформацію можна реєструвати за допомогою спеціальних індикаторів малих переміщень. Для цього

використовують оптичні мікроскопи, електроємнісні і фотоелектричні індикатори малих переміщень.

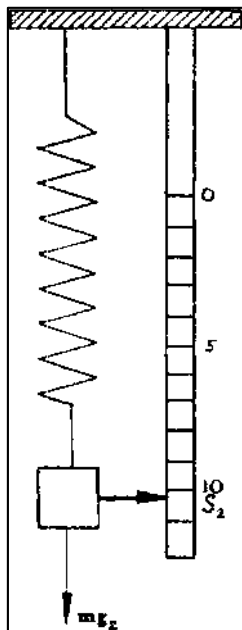


Рис. 7.5 Принцип дії гравіметра

За типом компенсуючої сили статичні гравіметри розділяють на три групи:

1. гравіметри газові, в яких прискорення сили тяжіння компенсується силою пружності стисненого газу;
2. гравіметри механічні, в яких прискорення сили тяжіння компенсується силою пружної деформації твердих тіл (пружин і закручених ниток);
3. гравіметри електромагнітні.

В середині XVIII століття російським вченим Ломоносовим був сконструйований перший газовий гравіметр, точність відносних визначень з допомогою якого була дуже низькою. В тридцятих роках XX століття почали конструювати механічні гравіметри, точність вимірювання якими почала конкурувати з маятниковими приладами.

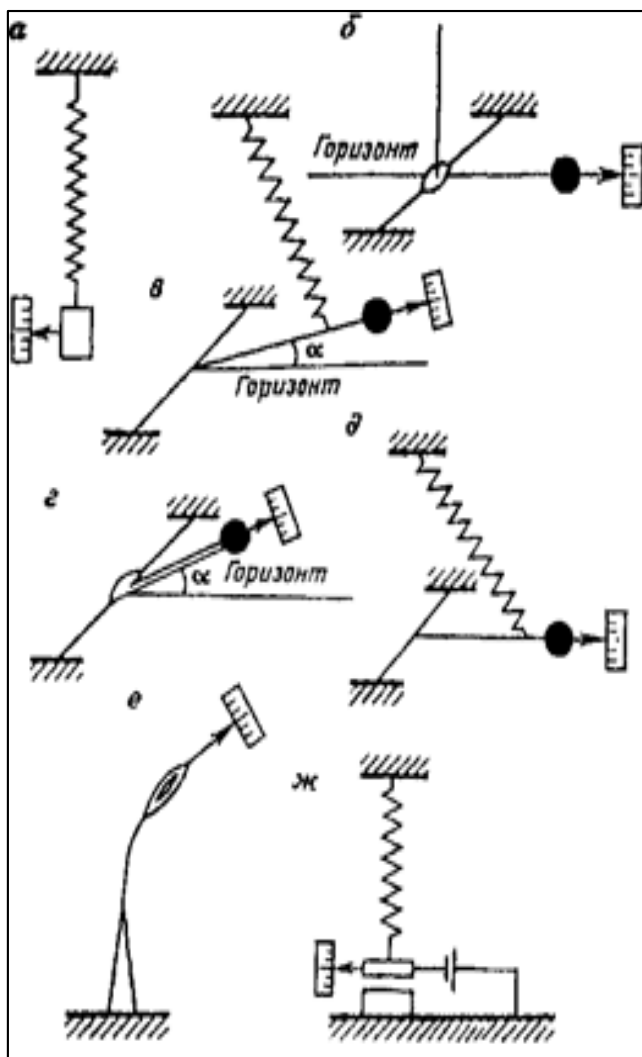


Рис. 7.6. Схеми пружних систем гравіметрів

Механічні гравіметри в залежності від матеріалу пружного тіла ділять на металеві та кварцові, і вони в основному використовуються в даний час. Механічний гравіметр складається з:

1. чутливого елемента;
2. індикатора малих переміщень;

3. пристрою для компенсації і вимірювання зміни поля сили тяжіння;
4. пристрою для компенсації впливу температури;
5. пристрою для компенсації впливу атмосферного тиску;
6. діапазонного пристрою;
7. пристрою для нівелювання чутливого елемента.

Деякі типи гравіметрів мають герметизацію, барокомпенсацію, екранування від впливу магнітного і електричного полів та інше.

7.7. КЛАСИФІКАЦІЯ ГРАВІМЕТРІВ

В даний час у різних країнах світу розроблені і експлуатуються різні типи гравіметрів [99]. Але такі гравіметри різних систем відрізняються між собою будовою пружних систем, матеріалом, із якого виготовлений пружний елемент та інше. Тому гравіметри різних типів можна класифікувати за певними ознаками:

- за принципом будови пружної системи;
- за матеріалом, із якого виготовлена пружна система;
- за методом фіксації малих переміщень;
- за діапазоном вимірювання приросту сили тяжіння;
- за способом врахування температури;
- за призначенням.

За принципом будови пружної системи гравіметри ділять на гравіметри з поступальним переміщенням мас і з обертальним переміщенням мас. У даний час найбільш широке застосування одержали гравіметри з обертальним переміщенням мас, які мають більшу чутливість.

Чутливі системи гравіметрів виготовляють із сплавів металів або плавленого кварцу, у відповідності до цього розрізняють кварцові і металеві гравіметри.

Фіксація малих переміщень здійснюється з допомогою індикаторів оптичного типу (мікроскопи зі збільшенням у сотні разів), електроємні сні, фотоелектричні, телевізійні пристрої.

За діапазоном вимірювання приросту сили тяжіння гравіметри ділять на вузькодіапазонні та широкодіапазонні. Вузькодіапазонні гравіметри одержали застосування в гравіметричній розвідці і мають високу точність.

Широкодіапазонні або геодезичні гравіметри мають широку шкалу вимірювання приросту сили тяжіння до 4 – 5 Гал, для них необхідна висока точність еталонування.

За способом врахування температури гравіметри ділять на термостатні та нетермостатні. Для термостатованих гравіметрів його чутливий елемент знаходиться в електронагрівальній печі. За призначенням гравіметри класифікують на такі типи:

- наземні – для вимірювання на суші;
- донні – для вимірювання на дні водоймищ;
- морські – для вимірювання з надводних і підводних суден;
- свердловинні - для вимірювання в шахтах, свердловинах;
- аерогравіметри - для вимірювання на літаках і інших космічних літальних апаратах;
- стаціонарні - для вивчення припливних змін прискорення сили тяжіння і реєстрації змін гравітаційного поля Землі.

Сучасні статичні гравіметри дозволяють вимірювати приріст сили тяжіння з високою точністю і з великою продуктивністю праці. Крім того, самі прилади є портативними, тривалість спостереження на пункті не перебільшує 5 хвилин. Сам процес спостережень з гравіметром і обробка таких результатів набагато простіші, ніж з маятниковим приладом. Отже, сучасний статичний гравіметр має ряд переваг перед маятниковим приладом, а саме: висока точність і продуктивність роботи, транспортабельність, використання в будь-яких фізико-географічних умовах (малодоступні та важкопрохідні райони).

Але поряд з перевагами, гравіметри мають ряд суттєвих недоліків. До них належать: зміщення нуль-пункту, визначення ціни поділки гравіметра, обмежений діапазон вимірювання приросту сили тяжіння. Зміщенням нуль-пункту називають неперервну зміну відліку гравіметра в пункті спостереження, обумовлену зміною пружних властивостей чутливої системи з часом. Визначення ціни поділки гравіметра або задача еталонування гравіметра пов'язані з тим, що вимірювання приросту сили тяжіння виконують в умовній системі одиниць. Щоб перейти від умовної системи вимірювального пристрою до показів приладу в мілігалах, необхідно визначати ціну поділки гравіметра.

7.8. ТЕОРІЯ МЕХАНІЧНИХ ГРАВІМЕТРІВ. ЧУТЛИВІСТЬ ГРАВІМЕТРА

Як вже було згадано основною частиною механічного гравіметра є пружна система, яка деформується під дією ваги тягарця або його моменту, які залежать від прискорення сили тяжіння. При розгляді теорії гравіметра приймемо, що при зміні сили тяжіння маса може здійснювати поступальне або обертальне переміщення [98]. Якщо x – деформація пружної системи, тоді рівняння рівноваги системи з обертальним переміщенням записують у вигляді:

$$gM(x) + W(x) = 0, \quad (7.77)$$

де: $gM(x)$ – момент сили тяжіння,

$W(x)$ – момент внутрішніх пружних сил.

Відповідно для системи з поступальним переміщенням маємо:

$$mg + fx = 0, \quad (7.78)$$

де: m – маса, яка переміщується,

f – жорсткість пружної системи.

Вага рухомого тягарця і її момент залежать від температури t , атмосферного тиску P , кута нахилу системи β . Пружна сила деформації та її момент залежать від температури. Тоді

$$gM(x, t, p, \beta) + W(x, t) = 0. \quad (7.79)$$

Диференціюючи вираз (6.4) за всіма змінними, одержимо основне рівняння пружної системи гравіметра

$$M + \left(g \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \cdot \frac{dx}{dg} + \left(g \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial t} \right) \cdot \frac{dt}{dg} + g \frac{\partial M}{\partial P} \frac{dP}{dg} +$$

$$+ g \frac{\partial M}{\partial \beta} \frac{d\beta}{dg} = 0. \quad (7.80)$$

У цьому рівнянні:

$\frac{dx}{dg}$ – характеризує зміну деформації пружної системи, обумовлену зміною прискорення сили тяжіння, називається механічною чутливістю гравіметра;

$\frac{dg}{dt}$ – характеризує вплив температури на положення чутливої системи або вплив температури при зміні сили тяжіння. Ця величина називається температурним коефіцієнтом гравіметра;

$\frac{dg}{dP}$ – характеризує вплив атмосферного тиску на положення пружної

системи або уявної зміни сили тяжіння та називається барометричним коефіцієнтом гравіметра;

$dg/d\beta$ – величина, яка характеризує залежність показів гравіметра від кута нахилу пружної системи;

Якщо покласти в основному рівнянні гравіметра t , P і β сталими, тоді рівняння чутливості гравіметра

$$\frac{dx}{dg} = -M \left(g \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \right)^{-1}. \quad (7.81)$$

Для чутливості гравіметра з поступальним переміщенням маси одержимо

$$\frac{dx}{dg} = \frac{m}{f}. \quad (7.82)$$

Це означає, що чутливість таких систем є сталою і не залежить від деформації x . Такі системи називають неастазованими. Системи, чутливість яких змінюється при зміні деформації, залежить від сили тяжіння та визначається знаменником формули (8.6), називають астазованими. Астазовані системи називаються нелінійними, і вони працюють в положенні рівноваги, яке близьке до нестійкого. Підвищення чутливості астазованих систем здійснюється зміною кута нахилу, з використанням додаткових пружин, за рахунок електричних і магнітних сил. Типовим прикладом астазування пружних систем є вертикальний сейсмограф Голіцина, який представлено на рис. 7.7.

Цю ідею використано в конструкціях більшості статичних гравіметрів.

Механічна чутливість пропорційна квадрату періоду їхніх власних коливань. Для пружинних терезів обертового типу

$$\frac{d\alpha}{dg} = \frac{T^2}{4\pi^2 l}, \quad (7.83)$$

де $\frac{d\alpha}{dg}$ – кутова чутливість,

T – період власних коливань,

l – зведена довжина важеля.

Для пружинних терезів з поступальним переміщенням маси

$$\frac{dx}{dg} = \frac{T^2}{4\pi^2}, \quad (7.84)$$

де: $\frac{dx}{dg}$ – лінійна чутливість

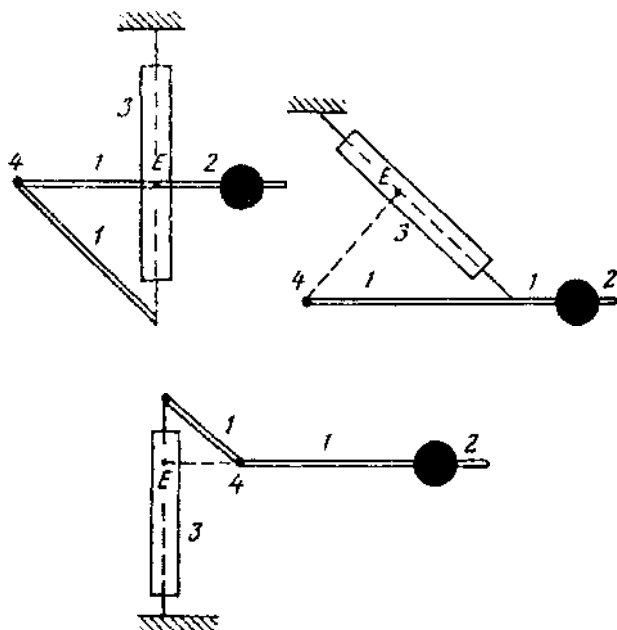


Рис. 7.7. Різні варіанти форми вертикального сейсмографа
Голіцина

1 – важіль

2 – тягарець

3 – пружина,

4 – вісь обертання важеля

Період власних коливань астазованих пружинних терезів часто досягає величини 10 – 30 с, а неастазованих – рідко перебільшує 1 с

7.9. ВПЛИВ ТЕМПЕРАТУРИ І АТМОСФЕРНОГО ТИСКУ НА ПРУЖНУ СИСТЕМУ ГРАВІМЕТРА

Якщо прийняти в рівнянні (6.5) деформацію, атмосферний тиск і нахил сталими, то тоді температурний коефіцієнт

$$\frac{dg}{dt} = \frac{g \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial t}}{M}. \quad (7.85)$$

При зміні температури момент зовнішніх і внутрішніх сил можна представити наближено у вигляді

$$M = M_0(1 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \dots), \quad (7.86)$$

$$W = W_0(1 + \mu_1 t + \mu_2 t^2 + \dots), \quad (7.87)$$

де: M_0 і W_0 – моменти мас і пружних сил при деякій вихідній температурі;

t – зміна температури від вихідного значення,

λ_1 і λ_2, μ_1 і μ_2 – відповідно лінійні і квадратичні ефективні температурні коефіцієнти пружної системи, які залежать від коефіцієнтів лінійного розширення матеріалів, з яких виготовлені окремі елементи пружної системи

Диференціюючи рівняння (7.86 і 7.87) і підставляючи результати в (7.85), одержимо величину температурного коефіцієнта гравіметра

$$\frac{dg}{dt} = -g[(\lambda_1 - \mu_1) + 2(\lambda_2 - \mu_2)t]. \quad (7.88)$$

Уявну зміну сили тяжіння, яка реєструється гравіметром при зміні температури $\Delta t = t_2 - t_1$ можна одержати, якщо проінтегрувати вираз в інтервалі температур від t_1 до t_2 . Тоді

$$\Delta g_{\Delta t} = -g[(\lambda_1 - \mu_1)\Delta t + (\lambda_2 - \mu_2)\Delta t^2]. \quad (7.89)$$

В останньому рівнянні обидва члени включають різницю ефективних температурних коефіцієнтів. Якщо ця різниця близька до нуля, то тоді і температурний коефіцієнт $\frac{dg}{dt}$ буде рівний нулеві, і коливання температури не впливають на покази гравіметра. На цьому базується можливість виключення впливу температури – температурна компенсація. Застосовують дві пружини, які мають різні термоеластичні коефіцієнти. В першому випадку пружні моменти пружин обернено пропорційні їхнім термоеластичним коефіцієнтам, а в другому випадку – різні значення пружних моментів, які діють в протилежні сторони. В гравіметрах часто застосовують вимушене (пасивне) термостатування та добру теплоізоляцію.

Найкраща теплоізоляція досягається за допомогою сосуду Дьюара. Крім того, застосовують пінопласти, органічну та неорганічну вати, органічне скло, теплоізоляційні порошки та інше. При активному термостатуванні незмінність температури підтримується за допомогою електричних термостатів – електрична піч, всередині якої автоматично підтримується стала температура за допомогою контактного термометра та реле. В термостаті використовують одну або дві нагрівальні обмотки, що дає можливість застосовувати багатоступеневе термостатування.

Температурний коефіцієнт гравіметра можна визначити, якщо гравіметр помістити в термокамеру. Задаючись інтервалом

температур, знімають відліки гравіметра та температури, за результатами таких досліджень будують криву. З цього графіка визначають температурний коефіцієнт. Дослідження з нетермостатними гравіметрами показали, що введення поправки за температуру погіршує результат, і тому намагаються виконувати спостереження при монотонній зміні температури в коротких інтервалах часу.

При зміні атмосферного тиску змінюється густина повітря, що обумовлює уявну зміну ваги тягарця. Із зміною вологості повітря змінюються модулі пружності та їхні термопружні властивості. Вираз для барометричного коефіцієнта гравіметра дорівнює

$$\frac{dg}{dP} = -g \frac{\partial M}{\partial P} \cdot M^{-1}, \quad (7.90)$$

або

$$\frac{dg}{dP} = -g \frac{\partial M}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} \cdot M^{-1}. \quad (7.91)$$

Густину повітря визначимо як

$$\rho = \rho_0 P \left[P_0 \left(1 + \frac{t}{273} \right) \right]^{-1}. \quad (7.92)$$

Тоді після диференціювання останнього виразу одержимо

$$K_p = \frac{dg}{dP} = -g \frac{\rho_0}{\sigma_{\text{эф}}} \left[P_0 \left(1 + \frac{t}{273} \right) \right]^{-1}, \quad (7.93)$$

де: ρ_0 – густина повітря при температурі 0°C і нормальному атмосферному тиску $P=1013,25$ Мбар;

$\sigma_{\text{эф}}$ – ефективна густина пружної системи.

Величина барометричного коефіцієнта залежить від густини матеріалу маси пружної системи та буде меншою, якщо буде більша густина. Наприклад, якщо важіль виготовлено із плавленого кварцу, то $\frac{dg}{dp} = 0,7$ мГал/мм.рт.ст., а якщо із платини – 0,07 мГал/мм.рт.ст.

Щоб виключити вплив атмосферного тиску, пружні системи гравіметрів герметизують або вакуумують. У кварцових астазованих гравіметрах пружинні терези знаходяться в герметичних камерах при атмосферному тиску в 1 – 8 мм.рт.ст. В гравіметрах з рідинною температурною компенсацією повністю виключається вплив атмосферного тиску на його покази. В гравіметрах обертового типу барометричний ефект можна звести до нуля, використовуючи барокомпенсатор.

7.10. ВПЛИВ НАХИЛУ ГРАВІМЕТРА

При зміні кута нахилу пружинних терезів змінюється величина проекції сили тяжіння на напрям осі чутливості. Якщо пружна система гравіметра буде нахилена на кут β до горизонту, то тоді відбувається уявне зменшення прискорення сили тяжіння на величину

$$\Delta g = g \cos \cos \beta - g. \quad (7.94)$$

Розкладаючи $\cos \cos \beta$ в ряд (рис. 7.8)

$$\cos \cos \beta = 1 - \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^4}{4!}$$

одержимо

$$\Delta g = -\frac{1}{2} g \beta^2 \left(1 - \frac{\beta^2}{12} + \dots\right). \quad (7.95)$$

При $\beta=0$ зміна $\Delta g = 0$, а це означає, що в такому положенні гравіметр має мінімум чутливості до нахилу. Під час спостережень гравіметр встановлюють так, щоб був відсутній його нахил. Для цього існують рівні (поздовжній і поперечний), з допомогою яких гравіметр встановлюють на мінімум чутливості до нахилу.

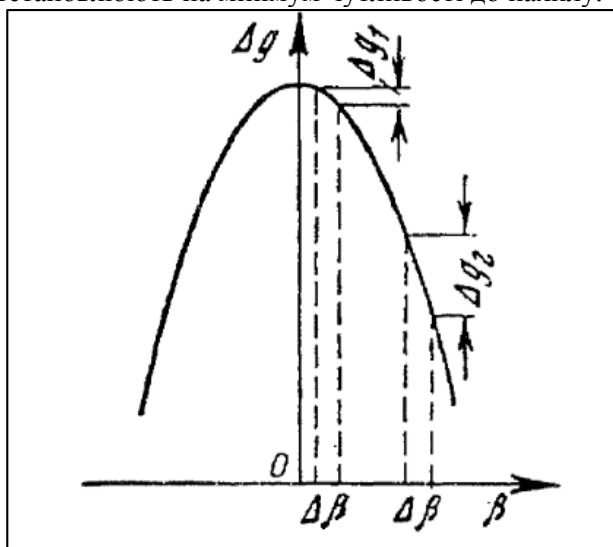


Рис. 7.8. Зміна кута нахилу пружинних терезів від зміни величини проекції сили тяжіння

Зміна відліку гравіметра відбувається таким чином, що чим більший кут нахилу гравіметра, тим сильніше впливає зміна кута нахилу на відлік. Якщо $\beta = 0,5'$ то $\Delta g = 0,01$ мГал, а при $\beta = 1'$ $\Delta g = 0,04$ мГал. Звідси випливає, що достатньо використати рівні точності $0,5'$. На цій залежності зміни сили тяжіння від нахилу гравіметра існує метод визначення ціни поділки відлікового пристрою.

7.11. ВПЛИВ МАГНІТНОГО ТА ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛІВ І МІКРОСЕЙСМІЧНИХ КОЛИВАНЬ ҐРУНТУ

Пружні системи гравіметрів виготовляють із плавленого кварцу або металевих сплавів. Покази гравіметрів з металевими пружинами залежать від впливу зовнішнього магнітного поля. Джерелами магнітного впливу є магнітне поле Землі або місцеві магнітні поля ліній високовольтних передач, електродвигунів і т.інш. Для зменшення впливу магнітного поля на пружинні системи металевих гравіметрів при складанні їхніх деталей розмагнічують в сильному змінному магнітному полі, а під час спостережень використовують спеціальні магнітні екрани.

Електричні поля також впливають на положення рівноваги в пружних кварцових системах гравіметрів. Це проявляється в тому, що поверхня кварцу електризується і внаслідок цього відлік може бути зміненим на десятки долі мілігала. Для зменшення впливу електричних зарядів у кварцових гравіметрах застосовують радіоактивні іонізатори, поверхню кварцу металізують, створюють сприятливі умови для стікання зарядів.

На положення чутливої системи діють інерційні сили, обумовлені мікросейсмічними рухами ґрунту. Коливання ґрунту з великим періодом (до і після землетрусу) змінюють покази гравіметрів, які повністю входять в похибки вимірювань. Тому в дні землетрусів не потрібно проводити роботи з гравіметром. Причиною мікросейсмічних коливань є шторми в океані, землетруси, вітер, рух транспорту, робота двигунів. Для зменшення впливу мікросейсмічних коливань гравіметри встановлюють подалі від джерел коливань (дерева, шосейні дороги, працюючі двигуни і т.д.).

7.12. ДОСЛІДЖЕННЯ, РЕГУЛЮВАННЯ І ВИЗНАЧЕННЯ ОСНОВНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ГРАВІМЕТРІВ

Перед початком виконання польових робіт необхідно ретельно провести дослідження, регулювання та визначити основні характеристики гравіметрів. Але деякі дослідження та регулювання проводять під час виробництва самих приладів. Якщо врахувати результати цих досліджень і юстировок як під час підготовки, так і в процесі виконання гравіметричних робіт, то фактична точність вимірювання різниці прискорення сили тяжіння буде підвищуватись. У процесі таких досліджень повинні бути визначені основні характеристики гравіметрів і їх регулювання. Основними приладами для вимірювання приросту сили тяжіння, які використовуються в Україні і в інших державах світу, є астазовані кварцові гравіметри. Розглянемо основні дослідження та регулювання стосовно цього типу приладів, а саме:

- 1) регулювання оптичної системи;
- 2) регулювання рівнів на мінімум чутливості до кута нахилу;
- 3) контроль чутливості гравіметра;
- 4) визначення часу стабілізації відліку;
- 5) еталонування гравіметрів;
- 6) дослідження нелінійності відлікової шкали;
- 7) визначення температурної характеристики та температурного коефіцієнта;
- 8) розрахунок діапазону вимірювань і його зміни.

7.12.1. Регулювання оптичної системи

Перед початком роботи з гравіметром необхідно окуляром і освітлювачем відрегулювати чіткість зображення окулярної шкали і рухомого індексу, а також освітленість поля зору. Це регулювання виконують, змінюючи відносне розміщення лампочки освітлювача і окуляра мікроскопа. Це регулювання можна виправити, якщо повернути гніздо лампочки або її замінити новою. Крім цього, чіткість зображення індексу підвищують шляхом підняття і опускання окуляра по висоті. Внаслідок регулювання окулярна

шкала повинна добре освітлюватись, а ширина рухомого індексу не повинна бути більшою від потрібної ширини штриха окулярної шкали. Якщо в полі зору помітні плями, то для усунення їх треба протерти лінзи окуляра.

7.12.2. Регулювання рівнів на мінімум чутливості до кута нахилу

Важливим етапом підготовки гравіметрів до польових вимірювань є юстування рівнів. Таке регулювання рівнів на мінімум чутливості до кута нахилу виконують у заводських умовах для нульового штриха окулярної шкали. Але це юстування порушується через температурні та інші деформації та тому його необхідно дуже часто контролювати. Регулювання рівнів полягає в суміщенні горизонтального положення площини, в якій повинні лежати вісь обертання і центр ваги важеля, з нульовим положенням рівнів, Взаємне розміщення підймальних гвинтів рівнів і важеля чутливої системи представлено на рис. 7.9.

Поздовжній рівень 7 є рівнем чутливості та паралельним до площини важеля 4 чутливої системи, Його бульбашку приводять в нуль-пункт за допомогою підймальних гвинтів 6. Поперечний рівень 2 є паралельним до осі обертання важеля 3. В більшості приладів видимий індекс у полі зору 5 окуляра розміщений паралельно до поздовжнього рівня. Якщо рівні встановлені правильно, то при приведенні їх бульбашок в нуль-пункт вісь обертання 3 та важіль 4 будуть горизонтальними, а вісь чутливості вертикальна. Положення буде таким, при якому чутливість до нахилу буде мінімальною, а відлік гравіметра відповідатиме повній величині g . При цьому рухомий індекс повинен бути суміщеним з нульовим штрихом у полі зору окуляра. Рівні гравіметра повинні бути відрегульовані так, щоб при нахилі приладу на певний невеликий кут зміна відліку була мінімальною. Для малих кутів нахилу відлік гравіметра буде змінюватись за косинусоїдальною залежністю, яка добре апроксимується параболою (рис. 7.10), вершина якої відповідає горизонтальному положенню важеля. Тоді

$$\Delta g = g - g \cos \cos \alpha = \frac{1}{2} g \alpha^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{12} + \dots \right), \quad (7.96)$$

$$\Delta g \approx \frac{1}{2} g \alpha^2. \quad (7.97)$$

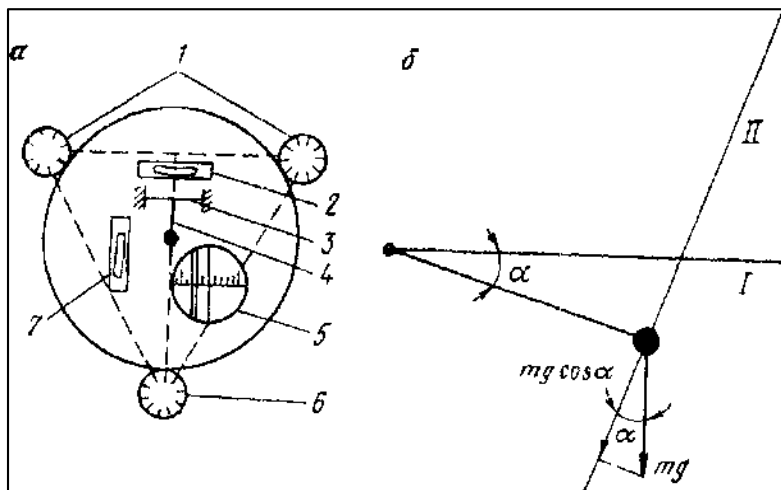


Рис. 7.9. Схема розміщення деяких пристроїв гравіметра (а) і положення його осі чутливості в площині обертання важеля (б)

При регулюванні рівнів спостерігають залежність уявної зміни Δg від зміни кута нахилу в напрямі поперечного та поздовжнього рівнів. Кут нахилу гравіметра задається та вимірюється на екзаменаторі або з допомогою установчих гвинтів гравіметра.

Юстування рівнів виконують у такій послідовності:

- 1) Гравіметр встановлюють за рівнями в горизонтальне положення за допомогою підймальних гвинтів на стійкій основі.
- 2) Суміщають рухомий індекс з нульовою поділкою окулярної шкали за допомогою гвинтового мікрометра.
- 3) Знімають покази лічильника відлікового пристрою гравіметра S_1
- 4) Нахиляють прилад у площині поперечного рівня на 1 – 2 поділки рівня, а бульбашка поздовжнього рівня при цьому повинна залишатись на середині.
- 5) Знімають покази відліку S_2 який повинен бути меншим від S_1 .
- 6) Нахиляють прилад на 1 – 2 поділки у протилежному напрямі.
- 7) Знімають покази відліку S_3 Якщо цей відлік S_3 є меншим від

вихідного S_1 , і наближається до S_2 , то це означає, що рівень встановлений правильно. Якщо не виконується ця умова, то тоді необхідно встановити рівень на мінімум чутливості до нахилу.

8) Методом послідовних проб нахилиють прилад до положення, для якого відлік лічильника є найбільшим.

9) Для максимального відліку $S_{\text{за}}$ допомогою виправних гвинтів приводять бульбашку рівня в горизонтальне положення.

10) Контроль регулювання рівнів і повторення цілого циклу.

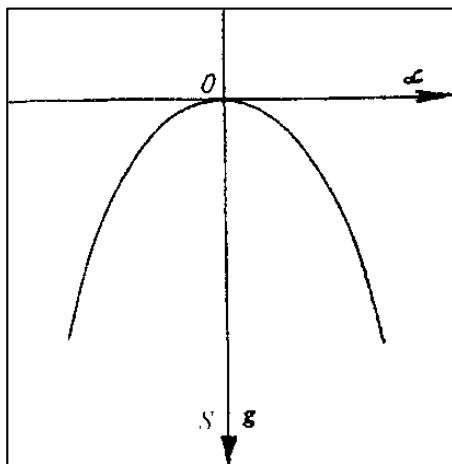


Рис. 7.10 Відлік гравіметра при малих кутах його нахилу

Аналогічні дослідження виконують і для поздовжнього рівня. Таке регулювання, як правило, проводять в безвітряну погоду, в тіні на певній відстані від працюючих двигунів, дерев і т.п. Крім цього, юстування рівнів проводять при температурі, яка близька до температури при польових вимірюваннях. У відповідності до формули (6.21), неточність регулювання рівнів з похибкою до $0,5'$ складає $0,01$ мГал, а при високоточних вимірюваннях з похибкою $0,001$ мГал рівні регулюють з похибкою до $9''$. Для цього використовують рівні, ціна поділки яких відповідно дорівнює $40''$ і $10''$.

7.12.3. Контроль чутливості гравіметра

Під чутливістю гравіметра розуміють відношення переміщення рухомого індексу важеля гравіметра до величини зміни прискорення сили тяжіння. Чим вища чутливість, тим точніше можна сумістити рухомий і нерухомий індекси. Але збільшення чутливості пов'язане із збільшенням періоду власних коливань важеля, що збільшує тривалість часу вимірювань. Чутливість змінюється, якщо за нерухомий індекс приймати різні поділки окулярної шкали. Її визначають після ретельного дослідження і регулювання рівнів на мінімум чутливості до нахилу та визначення ціни поділки гравіметра. Чутливість гравіметра **K** можна визначити в такій послідовності:

1 Впродовж декількох годин знімають відліки доти, поки не стабілізується зміна нуля-пункту.

2 Після цього знімають відлік за вихідним нерухомим індексом окулярної шкали S_1 , а потім на десятому або будь-якому штриху з однієї сторони шкали S_{10} , а тоді на такому ж штриху з іншої сторони S_{10} і повторюють покази відліку в вихідному нерухомому індексі.

3 За відліками у вихідному нерухомому індексі (штриху) вводять поправку за зміну нуля-пункту, а потім обчислюють чутливість за формулою.

$$K = \left[\left(\frac{S_1 - S_{10}}{20} \right) \cdot C \right], \quad (7.98)$$

де S_1 і S_{10} – виправлені за зміну нуля-пункту відліки;

C – ціна поділки гравіметра.

Якщо чутливість є дуже малою або дуже великою, тоді за нульову риску окулярної шкали приймають іншу поділку цієї шкали (наприклад +15, +20). Для цього штриха проводять повторне регулювання на мінімум чутливості до нахилу та аналогічне описаним способом визначення чутливості.

7.12.4. Визначення часу стабілізації відліку

Рухомий індекс важеля не завжди стабілізується після приведення приладу до горизонтального положення. Через те відлік, знятий відразу після установки приладу, буде мати деяку похибку.

Щоб виключити із результатів спостережень цю похибку, визначають час стабілізації відліку. Час стабілізації необхідно визначити перед польовим сезоном. Після приведення гравіметра в горизонтальне положення знімають відліки впродовж 10 – 15 хвилин через кожну хвилину і одержують графічну залежність відліку з часом (див. рис. 7.11).

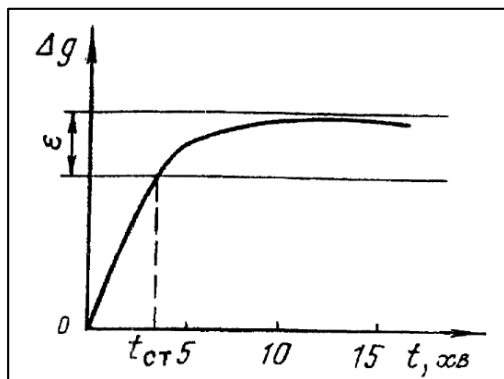


Рис. 7.11. Визначення часу стабілізації відліку.

На рисунку верхня горизонтальна лінія відповідає максимальному (мінімальному) знятому відліку. Нижня горизонтальна лінія знаходиться на відстані величини середньоквадратичної похибки одиничного виміру ϵ . Від точки перетину графіка з нижньою прямою опускають перпендикуляр на вісь абсцис, де визначають час стабілізації відліку $t_{\text{стаб.}}$.

Найкращі гравіметри характеризуються часом стабілізації меншим, ніж одна хвилина.

7.12.5. Еталонування гравіметрів

Приріст сили тяжіння одержують в умовній системі одиниць при спостереженнях з гравіметром. Для того, щоб перевести результати вимірювань в одиниці сили тяжіння, необхідно визначити ціну поділки C відлікового пристрою або сталу гравіметра. Дослідження, пов'язані з визначенням сталої C гравіметра, а також її залежності від температури, атмосферного тиску та інших зовнішніх факторів,

називають еталонуванням гравіметрів. Для визначення величини C треба знати відому еталонну різницю сили тяжіння i , відповідно до неї, виміряну різницю відліків приладу. Тоді ціну поділки гравіметра з лінійною відліковою шкалою визначимо із співвідношення

$$C = \frac{\Delta g}{\Delta s}$$

У залежності від того, як визначається еталонна різниця прискорення сили тяжіння, розрізняють такі методи еталонування:

1. на гравіметричних базисах або полігонах,
2. методом нахилу;
3. методом навішування додаткових тягарців.

7.12.5.1. Еталонування гравіметрів на полігоні

Цей метод є універсальним для виконання еталонування всіх типів гравіметрів. Теоретично достатньо мати на полігоні два пункти, між якими різниця прискорення сили тяжіння є точно відомою, і вона не перевищує 80 мГал, щоб забезпечити еталонування вузькодіапазонних геофізичних гравіметрів. Для збільшення точності еталонування використовують декілька пунктів полігону. Для вузькодіапазонних гравіметрів похибка в значеннях прискорення сили тяжіння на базисних (полігонних) пунктах повинна бути 0,1 мГал, а для широкодіапазонних – (0,02 – 0,03) мГал.

Для створення еталонного базису виконують точні вимірювання з маятниковим приладом або балістичним гравіметром у пунктах полігону. Пункти полігону вибирають таким чином, щоб значення сили тяжіння на їх кінцях відрізнялись максимально.

Цього можна досягти, якщо базиси розмішувати уздовж меридіанів, використовуючи залежність сили тяжіння від широти або, якщо розмішувати пункти еталонного базису на різних поверхах високих будинків, схилах гір з використанням залежності зміни сили тяжіння з висотою. В даний час еталонування цим методом проводять на Міжнародних, національних і місцевих базисах. Для еталонування широкодіапазонних гравіметрів створені три Міжнародних базиси, а саме:

1. Американський: Барроу, Фербенкс, Вайтхорс, Едмоігт, Грейт-Фелс, Денвер, Мантерей, Мехіко, Ланас;

2. Європейсько-Африканський: Хаммерфест, Водо, Копенгаген, Бад, Нарзбург, Мюнхен, Медюлан, Рим, Катанія, Нйяробі, Йоганесбург, Кейптаун;

3. Західно-Тихоокеанський від півночі Аляски (Барроу $\varphi = 71^\circ$ до півдня Австралії (Мельбурн $\varphi = -38^\circ$)

В Україні створено два еталонних місцевих полігони в гірських районах Карпат і Криму. Визначення ціни поділки виконують окремими рейсами з короткою тривалістю в часі. Як правило, вимірювання проводять на всіх пунктах полігону від першого до останнього, а тоді повторюють спостереження на першому пункті. Це дає можливість більш точно врахувати лінійне зміщення нуля-пункту. Виконують шість або більше рейсів із загальною різницею прискорення сили тяжіння Δg не менше п'ятдесяти, при цьому половину рейсів виконують з використанням початкової частини діапазону вимірювань. Другу половину – в кінці цього діапазону. Обчислюють і вводять поправки за зміщенням нуля-пункту

$$\Delta S_0 = \frac{S_{in} - S_{ik}}{t_{in} - t_{ik}} \cdot (t_j - t_{in}), \quad (7.99)$$

де S_{in} і S_{ik} – початковий і кінцевий відлік на вихідному пункті полігону;

t_{in} і t_{ik} – відповідні цим відлікам часи спостережень;

t_j і t_{in} – інтервал часу між вимірюванням на j -ому пункті і початковим вимірюванням на вихідному пункті полігона.

Після цього обчислюють приріст сили тяжіння в одиницях відлікової шкали між всіма пунктами полігона, ввівши попередньо поправки за зміну нуля-пункту, а далі, ділять на них відомі для цих пунктів прирости сили тяжіння. Для кожного приросту сили тяжіння визначають ціну поділки гравіметра C_j . Середньозвагову ціну поділки визначають за формулою

$$C = \frac{\sum_{j=1}^m C_j \Delta g_{ji}}{\sum_{j=1}^m \Delta g_{ji}}.$$

З відповідною відносною похибкою

$$\varepsilon_C = \frac{1}{C} \sqrt{\sum_{j=1}^m \frac{(C_j - C)^2}{m(m-1)'}}$$

де: Δg_{ji} – різниця прискорення сили тяжіння між пунктами полігона;
 m – число незалежних визначень ціни поділки гравіметра C_j .

Для визначення залежності сталої гравіметра C від температури намагаються декілька рейсів виконувати при температурах на $10 - 15^\circ$ вищою і нижчою, ніж в перших рейсах.

7.12.5.2. Еталонування гравіметрів методом нахилу

Краще, ніж на полігоні, можна визначити ціну поділки гравіметра для всієї відлікової шкали та точніше знайти її залежність від температури методом нахилу. Покази гравіметра змінюються в залежності від кута нахилу

$$\Delta g_j = -\frac{1}{2} g \beta_i^2 \left(1 - \frac{\beta_i^2}{12} + \dots \right), \quad (7.100)$$

де: g – прискорення сили тяжіння в пункті спостереження, в якому виконують еталонування.

При діапазоні вимірювань меншому від 200 мГал, можна другим членом знехтувати. Тоді для різних кутів нахилу β можна обчислити величину Δg .

Як видно із таблиці, кут нахилу β для вузькодіапазонних гравіметрів складає біля 1° . Ціна поділки гравіметра

$$C = -\frac{g \beta_j^2}{2 \Delta S}. \quad (7.101)$$

При відносній похибці еталонування методом нахилу 10^{-4} , прийнявши, що похибка різниці відліків ΔS дорівнює нулю, запишемо:

$$\left(\frac{m_c}{c} \right)^2 = \left(\frac{m_g}{g} \right)^2 + \left(\frac{2m_\beta}{\beta} \right)^2. \quad (7.102)$$

β	Δg , мГал
$0^\circ 15' 32''$	10
$0^\circ 34' 44''$	50
$0^\circ 49' 07''$	100
$1^\circ 09' 27''$	200

Звідси одержимо $m_g = 70$ мГал, $m''_\beta = 7,3 \beta$, якщо прийняти $\frac{m_g}{g} = \frac{2m_\beta}{\beta}$, а кут β виражати в радіанах. Отже, прискорення сили

тяжіння для пункту, в якому проводять еталонування, необхідно знати з точністю 50 –100 мГал, а точність вимірювання кута буде залежати від величини самого кута.

Ціну поділки методом нахилу визначають у такій послідовності:

1. Регулюють гравіметр на мінімум чутливості до нахилу.
2. Змінюють діапазон вимірювань таким чином, щоб можна було виміряти максимально велике зменшення прискорення сили тяжіння, та знімають відлік.

3. Послідовно нахилиють гравіметр на додатні кути β_{j+} , пізніше на від'ємні кути β_{j-} , знімаючи при цьому відліки гравіметра S_{j+} і S_{j-} . При кожному нахилі знімають серію відліків кута і відліків гравіметра.

4. Знаходять середнє арифметичне із відліків гравіметра для однакових додатних і від'ємних кутів і обчислюють ціну поділки C'_j для кожної пари додатних і від'ємних кутів нахилу.

Тоді:

$$C'_j = \frac{g \left(\beta_j^2 - \frac{\beta_j^4}{2} + \dots \right)}{2(S_j - S_0)}, \quad (7.103)$$

де: S_0 – відлік гравіметра в горизонтальному положенні;

S_j – середнє із відліків гравіметра при додатних і від'ємних кутах нахилу.

Середньо вагове значення ціни поділки C

$$C = \frac{\sum_{j=1}^m C'_j \Delta g_j}{\sum_{j=1}^m \Delta g_j}, \quad (7.104)$$

де: Δg_j – уявна зміна прискорення сили тяжіння, обчислена за формулою для кожного кута нахилу β .

Для еталонування методом нахилу розроблені спеціальні установки з вертикальним кутомірним кругом або установки, в яких для вимірювання кутів використовують тангенціальний метод. Метод нахилу має ряд переваг у порівнянні з методом еталонування на полігоні. До них належать:

- 1) висока точність;
- 2) менші фінансові затрати для виконання еталонування;
- 3) можливість дослідити залежність ціни поділки гравіметра від температури;
- 4) можливість дослідити залежність ціни поділки від

прискорення сили тяжіння без зміни місця еталонування;

5) спрощена процедура дослідження нелінійної відлікової шкали гравіметра і дослідження похибок поділок лічильника.

7.12.5.3. Еталонування гравіметрів методом навішування додаткових тягарців

Цим методом наближено еталонують гравіметри в лабораторно-заводських умовах при виготовленні та юстуванні приладів. Для точного еталонування методом навішування тягарця у деяких гравіметрів передбачено спеціальні пристосування. Так, в гравіметрі Асканія *GS* на важелі пружної системи зроблені дві ямки. Ямки виготовлені так, що кулька (діаметр її 2,5 мм) при невеликих нахилах і при переїздах завжди залишається в одній і тій же ямці. Нахиливши прилад на 90° , можна цю кульку переносити із однієї ямки в іншу. Відстань від осі обертання важеля пружної системи до центра маси кульки в одній і другій ямці відомі. Це переміщення кульки із однієї ямки в іншу змінює момент маси на сталу величину, яка відповідає певній різниці $\Delta g \approx 200$ мГал. Значення Δg залежить від температури приладу, від ділянки шкали вимірювального пристрою та від величини прискорення сили тяжіння в пункті еталонування. Перші дві залежності визначають експериментально, а третю вираховують за формулою

$$\Delta g = \Delta g_0 \left(1 + \frac{g_1 - g_0}{g_0} \right)$$

де: Δg_0 – визначене із досліджень приладу в пункті з відомим значенням сили тяжіння;

g_1 – сила тяжіння в пункті еталонування з точністю ± 100 мГал.

За різницею відліків ΔS (в поділках шкали) до і після переміщення кульки визначають ціну поділки

$$C = \frac{\Delta g}{\Delta S} \text{ мГал/поділку.}$$

7.12.6. Дослідження нелінійності відлікової шкали гравіметра

Нелінійністю відлікової шкали називають змінне співвідношення між приростом відліку та приростом сили тяжіння в різних частинах відлікової шкали. Критерієм нелінійності відлікової шкали гравіметра є те, що ціна поділки є різною, яка визначена в декількох інтервалах вимірювання Δg на полігоні. Існують декілька способів визначення нелінійності поправок до показів гравіметра:

1) вимірювання між двома пунктами з невеликою, але точно визначеною різницею прискорення сили тяжіння. Змінюючи діапазон вимірювань, два рази знімають відліки гравіметром в цих пунктах;

2) багаторазові вимірювання різниць відліків, які відповідають двом завжди одним і тим самим штрихам окулярної шкали в різних положеннях діапазонів вимірювань;

3) вимірювання між трьома (або більше) пунктами, в яких відомі значення сили тяжіння;

4) за результатами еталонування гравіметрів методом нахилу в усіх серіях відліку гравіметра необхідно виконати на тих самих місцях лічильника

Залежність між зміною сили тяжіння і зміною відліку можна приблизно виразити рівнянням квадратної параболі

$$\Delta g = g_i - g_j = a_1(S_i - S_j) + a_2(S_i^2 - S_j^2), \quad (7.105)$$

де: a_1 і a_2 – невідомі коефіцієнти параболі,

S_i і S_j – відліки гравіметра на i -ому і вихідному пунктах. Це рівняння можна звести до вигляду

$$\Delta g = a_1 \left[\left(S_j + \frac{a_2}{a_1} S_j^2 \right) - \left(S_i + \frac{a_2}{a_1} S_i^2 \right) \right], \quad (7.106)$$

або

$$\Delta g = a_1 [(S_i + NS_j^2) - (S_j + NS_i^2)], \quad (7.107)$$
$$N = \frac{a_2}{a_1}.$$

Приймаючи відлікову шкалу лінійною, знаходимо прирости сили тяжіння. Але в відліки необхідно ввести поправки NS_j^2 , щоб шкала стала лінійною з ціною поділки a_1 . Для знаходження a_1/a_2 або a_1 і N виконують вимірювання між трьома пунктами або між двома пунктами, змінюючи при цьому діапазон вимірювання. В такому

випадку коефіцієнти a_1 , a_2 і N однозначно обчислюються. Якщо пунктів і вимірювань багато, тоді обчислення виконують за методом найменших квадратів. Величини N і a_1 знаходять із співвідношення

$$N = \frac{\sum_{j=2}^i \Delta g_{ij} (S_i - S_j) \sum_{j=2}^i (S_i - S_j) (S_i^2 - S_j^2) - \sum_{j=2}^i \Delta g_{ij} (S_i^2 - S_j^2) * \frac{\sum_{j=2}^i (S_i - S_j)^2}{\sum_{j=2}^i (S_i^2 - S_j^2)}}{\sum_{j=2}^i \Delta g_{ij} (S_i^2 - S_j^2) \sum_{j=2}^i (S_i - S_j) (S_i^2 - S_j^2) - \sum_{j=2}^i \Delta g_{ij} (S_i - S_j) * \frac{\sum_{j=2}^i (S_i^2 - S_j^2)^2}{\sum_{j=2}^i (S_i^2 - S_j^2)}}, \quad (7.108)$$

$$a_1 = \frac{\sum_{j=2}^i \Delta g_{ij} (S_i^2 - S_j^2) \sum_{j=2}^i (S_i - S_j) (S_i^2 - S_j^2) - \sum_{j=2}^i \Delta g_{ij} (S_i - S_j) \sum_{j=2}^i (S_i^2 - S_j^2)^2}{\sum_{j=2}^i (S_i - S_j) (S_i^2 - S_j^2) - \sum_{j=2}^i (S_i - S_j)^2 \sum_{j=2}^i (S_i^2 - S_j^2)^2}, \quad (7.109)$$

де: Δg_{ij} – різниця прискорень сили тяжіння між i -тим і вихідним пунктом;

S_i – відлік гравіметра в i –тому пункті, який виправлено поправками за зміщення нуля-пункту і припливні зміни;

S_j – відлік гравіметра у вихідному пункті, який виправлено поправками за зміщення нуля-пункту і припливні зміни;

j – кількість пунктів бази або кількість перестановок діапазону.

7.12.7. Визначення температурної характеристики і температурного коефіцієнта

Криві залежності відліку гравіметра від температури або температурної характеристики кожного гравіметра можуть змінюватися внаслідок деформації металевої нитки температурного компенсатора, зміни зміщення нуля-пункту, великої зміни діапазону вимірювань. Цю залежність визначають в термокамерах, задаючи режим зміни температури з швидкістю 1 – 3°C за годину. Спочатку підтримують такий режим, щоб внутрішня температура в гравіметрі не відрізнялась від попередньої не менше, ніж на 15°C. Пізніше змінюють температурний режим в камері, щоб температура змінювалася з такою самою швидкістю, але в протилежному напрямі. Експериментальна залежність зміни відліку від температури при її підвищенні не збігається з залежністю при її пониженні, а залежить тільки від швидкості зміни температури.

Чим повільніше буде змінюватись температура, тим ближчими

між собою будуть криві прямого і зворотного ходу. Так за результатами досліджень будують графік (див. рис. 6.8), за яким визначають температурний коефіцієнт K_t температуру повної компенсації t_0 і температурний гістерезис u .

Температуру повної компенсації визначають за формулою

$$t_0 = \frac{1}{2}(t_{01} + t_{02}), \quad (7.110)$$

де t_{01} і t_{02} – значення температури на графіку, які відповідають екстремальним показам гравіметра в прямому та зворотному ходах.

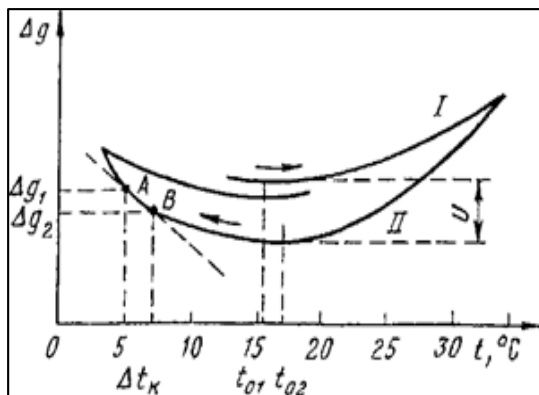


Рис. 7.12. Визначення температурних характеристик гравіметра

Для визначення температурного коефіцієнта K_t вибирають на графіку інтервал біля 2°C (інтервал АВ), на якому крива має найбільш високий градієнт, щоб визначити максимальний температурний коефіцієнт гравіметра

$$K_t = \frac{\Delta g_2 - \Delta g_1}{\Delta t}, \quad (7.111)$$

де: Δg_1 і Δg_2 – покази гравіметра на початку та в кінці вибраного інтервалу.

Δt – відповідна різниця температур, яка міститься в діапазоні $t_0 = \pm 15^\circ\text{C}$.

Температурний гістерезис u визначають як максимальну різницю показів гравіметра при одній і тій же температурі в прямому та зворотному ходах температурної залежності на інтервалі $t_0 = \pm 15^\circ\text{C}$.

7.12.8. Розрахунок діапазону вимірювань і його зміни

Під час підготовки гравіметра для виконання спостережень необхідно налагодити його діапазон, який відповідав би вимірюваній різниці сили тяжіння. Треба завчасно знати, інтервал значень сили тяжіння на ділянці робіт, на скільки зміниться і в яку сторону сила тяжіння. Таку наладку діапазону вимірювання проводять дуже часто в процесі виконання польових робіт для вузько діапазонних, і один раз на весь період польового сезону для широкодіапазонних гравіметрів.

Зміну сили тяжіння на значних територіях розраховують за нормальним полем і зміною висот. При використанні вузько діапазонних гравіметрів значення сили тяжіння в обмежених районах змінюється в більш широких межах, ніж те, що забезпечує діапазон. При зміні діапазону повторюють вимірювання різниці сили тяжіння між пунктом, в якому відбулась наладка діапазону, та попереднім. Послідовність операцій при зміні діапазону є така:

1. Спостереження в пункті А, в якому є необхідність наладки діапазону ;
2. зміна діапазону спостереження на пункті А;
3. спостереження на пункті А;
4. спостереження на попередньому пункті;
5. спостереження на пункті А;
6. спостереження на інших пунктах.

Для кожного гравіметра необхідно знати ціну оберту діапазонного гвинта. Діапазонний гвинт повертають плавним повільним рухом і одночасно стежать в окулярі за переміщенням індексу. Після наладки діапазону спеціальним ключем затискається контргайка за ходом годинникової стрілки.

7.13. МЕТОДИКА ВИМІРЮВАНЬ СТАТИЧНИМИ ГРАВИМЕТРАМИ

Існують різні методи вимірювання різниці прискорення сили тяжіння в залежності від точності визначення. Щоб можна було визначити лінійне зміщення нуль-пункту, відповідно проектують гравіметричні вимірювання. В зв'язку з цим розрізняють такі

найважливіші методи вимірювань, які виконують окремими рейсами, що прив'язуються до пунктів опорної мережі:

1) ланцюговий метод АВАВАСВ..., який використовують у високоточних вимірюваннях при створенні опорної мережі;

2) профільний метод АВСББСВА, який використовують на гравіметричних базисах;

3) метод поверхневий АВСБ...А, який використовують при згущенні опорної мережі меншої точності або при гравіметричній зйомці поверхні Землі;

4) посередній метод - AbcdB, який використовується з меншою точністю вимірювання. Зміщення нуль-пункту враховують за величинами прискорення сили тяжіння на опорних пунктах.

Польові гравіметричні вимірювання вимагають від оператора (спостерігача) дуже ретельного ставлення до приладу і дотримання певних правил. Це необхідно особливо знати при вимірюваннях з високою точністю. До них належить:

1) дуже уважно ставитись до приладу як під час самих вимірювань, так і при його транспортуванні. Для цього гравіметр під час транспортування ставлять в спеціальний ящик або на сидіння автомобіля;

2) необхідно підтримувати сталий температурний режим. Якщо виконують роботу з термостатним гравіметром, то для його стабільної роботи живлення включають не пізніше, ніж за 12 годин до польових вимірювань. Саму заміну акумулятора краще провести в кінці попереднього робочого дня. Для гравіметрів без термостата необхідно підтримувати їхній температурний режим у стані, при якому будуть виконуватись вимірювання. На ніч прилади залишають в неопалюваному сухому приміщенні, а в холодну погоду їх виносять напередодні робочого дня із опалюваного приміщення;

3) перед виконанням вимірювання за одну годину гравіметр виводять у робочий стан (приведення бульбашок рівнів на середину за допомогою підймальних гвинтів і суміщення індексу з нульовим штрихом окулярної шкали);

4) перед початком польового сезону необхідно виконати всі дослідження і регулювання, які передбачені інструкцією;

5) місце спостережень вибирають так, щоб воно було віддалене від природних або штучних мікросейсмів;

6) у вітряну погоду гравіметр встановлюють так, щоб оператор стояв спиною до напрямку вітру. При сильному вітрові спостереження з гравіметром не виконують;

7) після установки гравіметра на пункті необхідно почекати деякий час, щоб стабілізувався відлік;

8) пам'ятати, що знімати відлік треба тоді, коли повертається головка відлікового пристрою тільки в одному напрямі (за годинниковою стрілкою) для суміщення рухомого індексу важеля з нерухомим нульовим штрихом окулярної шкали;

9) на кожному пункті ретельно нівелюють прилад і знімають три відліки гравіметра з фіксацією середнього моменту спостереження;

10) виміряти з точністю до 1 см перевищення штатива гравіметра над пунктом;

11) не залишати прилад на довгий час під прямим сонячним промінням.

7.14. СУЧАСНІ ТИПИ СТАТИЧНИХ ГРАВІМЕТРІВ

Перші статичні гравіметри почали конструювати з 1932 року і їх використовували для геофізичної розвідки з похибкою вимірювання приросту сили тяжіння 1 мГал. В даний час у різних країнах світу широко застосовується декілька марок наземних статичних гравіметрів, якими можна виміряти приріст сили тяжіння між пунктами з точністю в межах 0,1 – 0,01 мГал. Такої високої точності вимірювання досягнуто завдяки вдосконаленню виготовлення гравіметричної апаратури. Як відомо, всі сучасні типи механічних гравіметрів розділяють на п'ять груп.

1) кварцові астазовані – Уорден. Шарп, Содін, Сцінтрекс, ГНУК-В, ГНУК-С, ГАГ-2, ГАГ-3;

2) кварцові неастазовані – Норгард. СН-3, ГАЕ;

3) металеві астазовані ГМТ-1, ГМТ-2, “Північна Америка”, Лакоста-Ромберг;

4) металеві неастазовані - Асканія GS-11, GS-12, GS -15, C8-25;

5) кварцові автоматизовані.

В Україні, як і в інших республіках колишнього СРСР, найбільш широко використовується в практиці гравірозувальних робіт

радянські гравіметри ГНУ-КВ, ГНУ-КС, ГАГ-2, GMT-1, GMT-2. В інших країнах світу найчастіше використовують американські гравіметри Лакоста-Ромберг і Уорден, а також канадські гравіметри Шарп, Содін і Сцінтрекс. Для вивчення припливних змін прискорення сили тяжіння використовують металічні неастровані гравіметри німецької фірми Асканія Верке різних моделей GS-11, GS-12, GS -15, C8-25.

Розглянемо деякі типи сучасних кварцових і металевих гравіметрів

7.14.1. Автоматизовані гравіметри

В даний час широке розповсюдження отримали автоматизовані гравіметри, що використовують мікропроцесорну технологію зарубіжного виробництва: CG-5 CG-3М (SCINTREX), ГНУ-01 (ВНШгеофізика), ГНШ-КВ (Геологоразведка). Чутливий елемент автоматизованих гравіметрів – та ж сама пружна система з плавленого кварцу. Автоматизований гравіметр складається з кварцової чутливої системи з електростатичною компенсаційною системою вимірів, розміщених у термозахисному корпусі, і електронного блоку, на базі мікро-ЕОМ, для управління гравіметром і попередньої обробки даних. Нівелювання приладу здійснюється за двома електронними рівнями. Автоматично компенсуються зміни нахилу до 200".

У гравіметрах CG-3 сила тяжіння, яка діє на вантаж, урівноважується кварцовою пружиною та невеликим за величиною електростатичним полем. Зсув вантажу під дією сили тяжіння фіксується ємнісним індикатором малих переміщень. До важеля закріплена одна обкладка конденсатора, а до корпусу інша. При зміні сили тяжіння змінюється відстань між обкладинками, а відповідно змінюється ємність. Ємнісний спосіб дозволяє реєструвати малі переміщення менше, ніж 0,0001 мк.

Через ланцюг зворотного зв'язку напруга подається на пластини конденсатора, електричне поле якого діє на вантаж, повертаючи його на нульовий стан. Напруга в колі зворотного зв'язку є мірою поля сили тяжіння. Вона перетворюється в цифровий сигнал, що передається в систему збору даних приладу для обробки, виводу на дисплей та збереження. Гравіметр CG-3М дозволяє вимірювати

зміни сили тяжіння до 0,005 мГал, яке викликає зсув важеля по вертикалі на 10^{-10} м. Відлік беруть натисканням клавіші, вони отримуються як середнє з відліків по секундних інтервалах; час осереднення обирається в залежності від місцевих мікросейсмічних умов (зазвичай 20 сек.). Інформація, що зберігається, містить показання гравіметра, виправлені за вплив припливів, величини нахилу, внутрішню температуру приладу, дату, час, тривалість вимірів, дані про пункт спостережень.

Автоматичні гравіметри характеризуються високою роздільною здатністю (0,01-0,005 мГал), незначним часом вимірювання на точці (2 – 5 хв.), повною автоматизацією процесу вимірювання, проте й підвищеною масою приладу від 7 до 15 кг. Вся інформація відображається на рідкокристалічному дисплеї (80 символів, 4 рядки), одночасно забезпечується збереження даних в пам'яті, що дозволяє згодом вивести їх на друк, модем або комп'ютер. Разом з приладом виробник постачає програмне забезпечення для обробки результатів вимірювань. Аналогічні автоматизовані гравіметричні комплекси створені для морських і аерогравіметричних вимірювань.

Для прикладу наведемо характеристику гравіметру CG-5 AutoGrav (рис. 7.13.). Він є останньою модернізацією галузевого стандарту - гравіметра CG-3 AutoGrav. В наш час гравіметр CG-5 є кращим і найбільш точним приладом на ринку.

У CG-5 AutoGrav застосовані нові технології: автоматична діагностика приладу після включення живлення, надійний датчик вищої якості, покращене усунення завад (шумів), незначна вага, швидкий USB & RS-232 порт, стандартна точність – 1 мкГал, надійні батареї, гнучкі формати даних, великий графічний VGA дисплей, 27-ми клавішна клавіатура, автоматичне вирівнювання приладу, корекція за висоту пункту спостереження в реальному часі. Інформація і меню чітко відображені на великому графічному дисплеї відеостандарту VGA "1/4".

Висока точність CG-5 AutoGrav забезпечується завдяки: автоматизації, міцній конструкції, низькому залишковим дрейфу, точному калібруванню.

Повторюваність польових тестів є головним показником надійної роботи гравіметра. Польові випробування CG-5 AutoGrav показують, що різниця між окремими вимірами та середнім значенням по пікету не перевищує 0,005 мГал.

Чутлива система CG-5 AutoGrav базується на пружній конструкції з плавленого кварцу. Гравітаційна сила, прикладена до пробної масі, врівноважується пружиною та відносно маленькою електростатичною силою. Властива міцність плавленого кварцу і відмінна пружність разом з обмежувачами руху пробної маси дозволяють працювати без аретиру. Захист від зовнішніх впливів забезпечується надійними амортизаторами.



Рис. 7.13 Гравіметр CG-5 AutoGrav (а) і його верхня панель (б)

Завдяки маленькій масі та відмінним пружним властивостям плавленого кварцу, спеціальна тара не є необхідною умовою роботи. Навіть після транспортування в умовах поганих дорогах і різких перепадів температур дрейф виключно малий. CG-5 може витримувати удар більше ніж 20 G, і при цьому зміна показань гравіметра буде не більше, ніж 5 мкГал.

До складу CG-5 AutoGrav входить гравітаційний датчик, контрольна панель управління і батареї, що розміщені в захисному корпусі, який стійкий до різних метеорологічних умов. Не потрібні

зовнішні кабелі, ноутбуки, а тільки простий у використанні, автономний гравіметр.

CG-5 AutoGrav постійно отримує дані від вбудованого датчика нахилу. CG-5 AutoGrav може автоматично компенсувати вимірювання за похибку нахилу датчика. При виборі оператором цієї функції похибки при вимірюванні на нестабільній платформі автоматично виключаються. Згідно введених оператором даних про географічне положення і часовий пояс, CG-5 AutoGrav автоматично вираховує поправку за припливи до кожного виміру в реальному часі.

Чутливий елемент CG-5 AutoGrav розміщений в стабілізованому за температурою вакуумному відсіку, що захищає його від змін температури. Сигнал від датчика температури, встановленого поблизу пружної системи, дозволяє вводити програмну поправку за маленькі залишкові зміни температури. Температурний коефіцієнт - зазвичай менше ніж 0,2 мкГал/ Цельсій.

Одночасно чутливий елемент CG-5 AutoGrav захищений від змін атмосферного тиску. Коефіцієнт атмосферного тиску – зазвичай менше за 0,02 мкГал /добу.

Помилки вимірювання, що походять від ударів і вібрацій, подавляються математичною обробкою сигналу. CG-5 має дуже ефективний сейсмічний фільтр, який дозволяє видаляти великий мікросейсмічний шум. Виключно стійка робоча середа пружної кварцової системи дозволяє точно вимірювати і вводити програмні поправки в реальному часі за довготривалий дрейф, зменшуючи його до менш ніж 0,02мГал/добу.

Відображені та зареєстровані дані:

- виправлене значення сили тяжіння,
- стандартне відхилення,
- нахил відносно осей X і Y,
- температура датчика,
- поправка за місячно-сонячне притягання,
- тривалість вимірювання,
- час початку вимірювання,
- відомості, що наводяться в головній частині (включаючи дані і константу ініціалізації),
- графічні можливості відображення оцифрованих даних гравітації,

- зберігання необроблених даних.

Стандартна комплектація: блок CG-5 AutoGrav, тринога, 2 акумулятори, зарядний пристрій, 110/220 В, Зовнішнє джерело живлення 110/220 В, набір запчастин, кабель RS-232 і USB, сумка для перенесення, програма перезапису даних, оновлення системи, SCTUTIL, інструкція, футляр для перевезення. Опції: Дистанційне керування, Пояс для акумуляторів, Розширення триніжок.

7.14.2. Кварцові гравіметри ГНУК-В, ГНУК-С, ГАГ-2

Гравіметр ГНУК-В (гравіметр наземний вузько діапазонний кварцовий високоточний) складається з внутрішньої частини та зовнішнього кожуха з теплоізоляцією. Внутрішня частина гравіметра – кожух кварцової системи, над якою розміщений теплозахисний шар і верхня панель. Корпус кварцової системи – це вакуумна камера, на верхній платі якої закріплена кварцова система, деталі оптичної системи, діапазонний і вимірювальний мікрометрові пристрої.

На верхній панелі знаходяться окуляр мікроскопа, освітлювач, поздовжній та поперечний рівні та відліковий пристрій. З зовнішнім кожухом гумовим манжетом з'єднана внутрішня частина. Оптична система складається з освітлювача, призми, об'єктива та окуляра, а вимірювальний механізм – мікрометровою гвинта. Мірою зміни довжини вимірювальної пружини є кут повороту вимірювального мікрометровою гвинта. Лічильний пристрій закріплений на мікрометровому гвинті і складається з лімба та ноніуса на верхній панелі, а також пристрою для відліку цілих обертів. Маса гравіметра приблизно дорівнює 5 кг. Температурний коефіцієнт 0,3 мГал на 1°C в діапазоні температури до 30°C. Середня квадратична похибка вимірювання приросту сили тяжіння 0,03 мГал в рейсах тривалістю 4 години. Цей гравіметр використовують при виконанні детальних гравірозвідувальних робіт.

Гравіметр ГНУК-С (гравіметр наземний вузькодіапазонний кварцовий середньої точності) відрізняється від ГНУК-В пристроєм деяких вузлів корпусу та кварцової системи (рис. 7.14.). Мікроскоп об'єктива має менше збільшення та спостерігають переміщення індексу в вертикальній площині обертання важеля, а не в горизонтальній, як у гравіметра ГНУК-В. Однак, менша роздільна

здатність оптичної системи вимагає більшої уваги при знятті відліку з відповідною їхньою кількістю. Це приводить до того, що треба виконувати більше коротких рейсів і більшу кількість вимірювань.

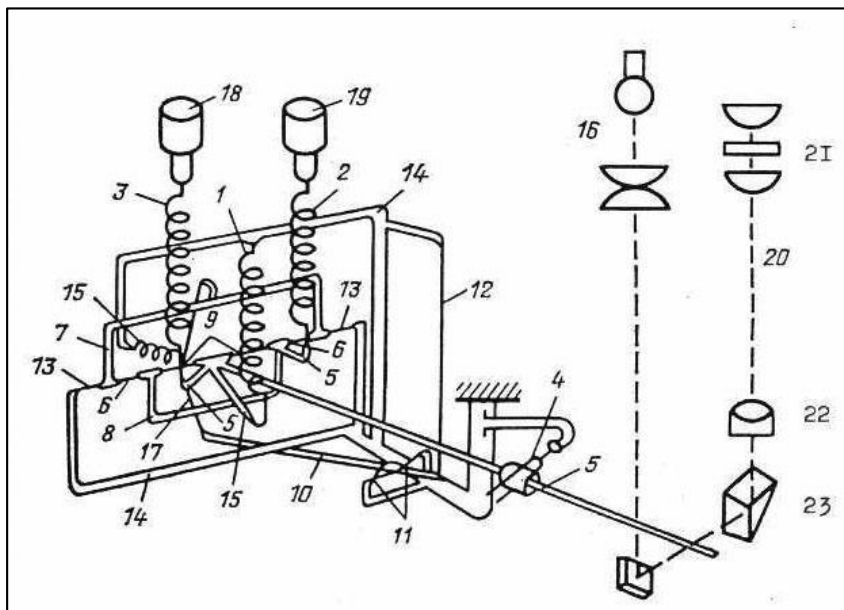


Рис. 7.14. Схема кварцової системи гравіметра ГНУК-С:

1 - головна пружина; 2 - вимірювальна пружина; 3 - діапазонна пружина; 4 - обмежувач; 5 - важіль; 6 - нитки підвісу вимірювальної рамки; 7 - рухома рамка температурного компенсатора (ТК); 8 - вимірювальна рамка; 9 - нитки підвісу важеля; 10 - важіль ТК; 11 - нитки підвісу важеля ТК; 12 - металева нитка ТК; 13 - нитки підвісу рухливої рамки ТК; 14 - каркас кварцової системи; 15 - пружина компенсатора криволінійності; 16 - освітлювач; 17 - цибулеподібна нитка компенсатора криволінійності; 18 - діапазон пристрою; 19 - вимірювальний пристрій; 20 - мікроскоп; 21 - скляна пластинка зі шкалою; 22 - об'єктив; 23 - тригранна призма

Гравіметр ГАГ-2 (геодезичний астазований гравіметр) призначений для високоточних вимірювань різниць сили тяжіння при створенні опорних гравіметричних мереж, при побудові та створенні гравіметричних еталонних полігонів, при регіональних

зйомках в гірських районах (рис. 7.15).

Приріст сили тяжіння вимірюється компенсаційним способом, тобто нахилом осі обертання маятника чутливої системи. Пружну систему гравіметра поміщають в герметичний корпус і двоступеневий термостат. Спеціальним кутомірним пристроєм вимірюють кут нахилу осі обертання маятника, а тому цей гравіметр не треба еталонувати. Повний діапазон вимірювань складає чотири тисячі мілігал. Похибка одного вимірювання 0,1 мГал, якщо різниця сили тяжіння до 1000 мГал при тривалості рейсу до 8 годин.

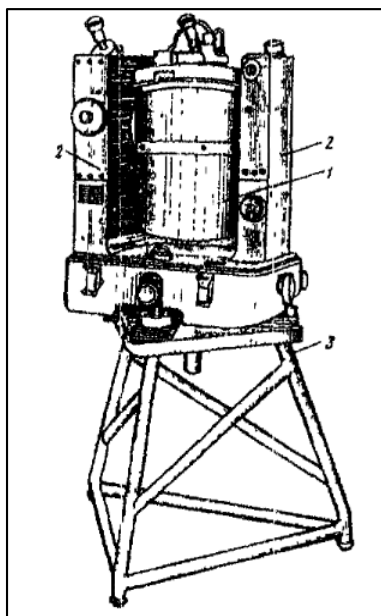


Рис. 7.15. Гравіметр ГАГ-2

Середня квадратична похибка відліку кута нахилу не більше $\pm 03''$. Зміщення нуля-пункту не більше 1,5 мГал/добу при температурі пружної системи $+35^{\circ}\text{C}$. Температура термостатування 25 і 35°C . Маса гравіметра з футляром порядку 25 к., штативу – 6,5 кг.

7.14.3. Кварцові гравіметри Уорден, Шарп, Содін

Гравіметри Уорден, Шарп і Содін (рис. 7.16) є найбільш удосконаленими нетермостатними кварцовими астазованими приладами, які подібні між собою оформленням і конструкцією кварцової системи. Гравіметр Уорден працює за принципом вертикального сейсмографа Голіцина. Основним чутливим елементом гравіметра є кварцова система, яка складається з маятника, підвішеного до кварцової рами пружними кварцовими нитками, і який підтримують в рівновазі пружною силою головної пружини. При зміні сили тяжіння маятник повертається.

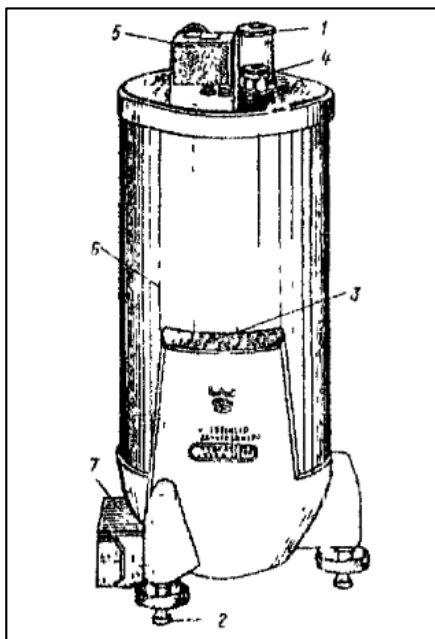


Рис. 7.16. Зовнішній вигляд гравіметра Содін

1-окуляр, 2-підйомні гвинти, 3- ручка для перенесення, 4 – освітлювач, 5 – лічильник, 6- зовнішній кожух, 7-джерело живлення

Для реєстрації горизонтального положення маятника на його осі обертання встановлений вертикальний стержень, до кінців якого

припаяний тонкий кварцовий волосок (індекс), який є паралельним до осі обертання. Цей індекс освітлюється за допомогою лампочки та розглядається в мікроскоп з 600 – 800 кратним збільшенням. Похибка вимірювань гравіметром коливається від 0,02 до 0,08 мГал в залежності від методики вимірювань і моделі приладу. В даний час фірма випускає чотири моделі: Майстер, Розвідник, Учень і Геодезист. Ці гравіметри відрізняються діапазоном і точністю вимірювань, діапазоном дії температурної компенсації, наявністю або відсутністю електричного термостата, масою тощо. З такими модифікаціями гравіметра Уорден була виконана велика кількість світових опорних гравіметричних зв'язків, створена в багатьох країнах національна опорна гравіметрична мережа, виконані регіональні та детальні гравіметричні зйомки.

Гравіметр Шарп відрізняється від Уордена несуттєвим оформленням окремих вузлів. Так, в гравіметрі Уорден оберти мікрометричного гвинта відраховують на циліндричному лімбі, а в гравіметрі Шарп – на багаторозрядному лічильнику. Установчі рівні в гравіметрі Уорден розміщені на верхній панелі, а в гравіметрі Шарп – на основі корпусу кварцової системи.

В гравіметрі Содін чутливим елементом є вертикальний сейсмограф Голіцина. В кварцовій системі застосовують пружину з нульовою початковою довжиною і металевий температурний компенсатор.

7.14.4. Металеві астазовані гравіметри "Північна Америка" та Лакоста-Ромберг

Ці американські гравіметри мають металеві пружинні терези за принципом вертикального сейсмографа Голіцина з пружиною нульової довжини. Пружинну вагу поміщають в електричний термостат. Під час спостережень гравіметри встановлюють на спеціальний штатив. На верхній панелі розміщені окуляр мікроскопа, лічильник мікрометричного пристрою, рівні. Корпус гравіметра "Північна Америка" має циліндричну форму, а Лакоста-Ромберг – майже кубічну (рис. 7.17).

Пружна система гравіметра "Північна Америка" складається із важеля, на одному із кінців якого розміщений барокомпенсатор, а на

іншому – тягарець з індексом. При зміні сили тяжіння важіль разом із індексом відхиляється від положення рівноваги. За переміщенням індексу спостерігають у мікроскоп. Період власних коливань важеля 20 – 30 с, а кутова чутливість 150 – 250 с дуги на 1 мГал. Маса тягарця біля 100 г.

Фірма Лакоста-Ромберг виготовляє багато різних типів гравіметрів, які відрізняються між собою способом реєстрації відліку діапазоном дії, точністю вимірювань тощо. Геодезична модель, гравіметра LGR має можливість виконувати вимірювання між пунктами, різниця сили тяжіння між якими перебільшує 7000 мГал із точністю одного вимірювання 0,01 мГал.

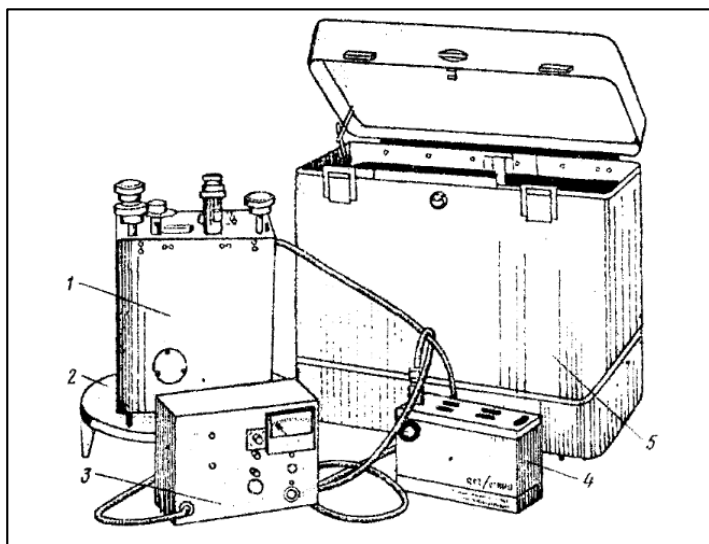


Рис. 7.17. Зовнішній вигляд гравіметра Лакоста-Ромберга:
1-гравіметр, 2- стілець, 3-блок контролю, 4-батарея живлення, 5- футляр

Отже, цим приладом немає потреби змінювати діапазон вимірювань при переході з одного району робіт в інший. Крім того геодезична модель за розмірами та масою набагато менша, ніж розвідувальна, і цей прилад використовують при виконанні регіональних гравіметричних досліджень.

7.14.5. Неастазовані металеві гравіметри фірми Асканія-Верке

Чутливий елемент складається з маси на горизонтальному стержні, який утримується двома спіральними горизонтальними пружинами. Кут закручування пружин пропорційний приросту сили тяжіння, який викликає відхилення стержня. Вимірювання виконують шляхом приведення стержня в нульове положення за допомогою вертикальної компенсаційної пружини. Температурна компенсація здійснюється за рахунок подвійного термостатування. Зовнішній термостат має чутливість порядку $0,01^{\circ}\text{C}$, а внутрішній – забезпечує неперервне регулювання температури. Діапазон шкали гравіметра складає біля 800 мГал, а при зміні діапазону вимірювань виконують в будь-якій точці земної поверхні в межах 6000 мГал.

В гравіметрах “Асканія” є спеціальний пристрій для визначення ціни поділки відліковою пристрою. Перший такий прилад був розроблений в 1937 році. З тих пір було виготовлено декілька вдосконалених моделей.

Сучасна модель GS-15 характеризується точністю 0,01 мГал з відповідним зміщенням нуль-пункту 0,05 мГал/год. Ці гравіметри дуже рідко використовують при польових дослідженнях, а застосовують, в основному, для реєстрації місячно-сонячних варіацій сили тяжіння. В стаціонарних умовах при сталій температурі цим приладом можна реєструвати варіації сили тяжіння до 1 мкГал при зміщенні нуль-пункту 0,1 мГал/місяць. Зараз ця фірма розробила нову модифікацію наземного гравіметра Граф-Аскакія, GS-25, точність якого оцінюється біля 1 мкГал.

8. МЕТОДИКА ПОЛЬОВИХ ГРАВІМЕТРИЧНИХ СПОСТЕРЕЖЕНЬ

8.1. СВІТОВА ОПОРНА ГРАВІМЕТРИЧНА МЕРЕЖА

Світова опорна мережа створена для забезпечення єдності вихідних національних абсолютних значень і масштабу відносних визначень.

У 1900 р. на XIII конференції МАГ була прийнята Віденська система, заснована на абсолютному значенні сили тяжіння у Відні. У 1909 р. на XVI Міжнародній геодезичній конференції була прийнята Потсдамська система, що заснована на визначенні сили тяжіння в Потсдамському геодезичному інституті. У 1971р. в Москві на XV Генеральній асамблеї Міжнародного геодезичного і геофізичного союзу (МГГС) рекомендована до застосування Міжнародна гравіметрична стандартна мережа 1971 р. (International gravity standartization net – IGSN-1971). МГГСМ – 1971 спочатку була створена на основі визначень прискорення сили тяжіння g на 1854 пунктах, на яких сила тяжіння була виміряна з точністю, що перевищує 0,1 мГал. Для цієї системи використані абсолютні вимірювання у 8 пунктах земної кулі та 25000 вимірювань різниць прискорень сили тяжіння, з яких 400 були виконані маятниковими приладами. Міжнародна гравіметрична стандартна мережа опирається на абсолютні вимірювання в Севрі (Міжнародне бюро мір і ваг). Абсолютні визначення, які задають цю систему, наведені в таблиці 8.1 [1].

Абсолютні визначення виконані приладом Хеммонда-Фаллера. Основний обсяг гравіметричних зв'язків виконаний з використанням 18 типів гравіметрів, де переважна більшість спостережень виконана гравіметрами “Ла-Коста – Ромберг”, “Уорден”, “Асканія”, “Північна Америка”. В таблиці 8.2 наводяться деякі дані щодо розміщення 1854 пунктів IGSN-71 на поверхні Землі. Основний обсяг маятникових вимірювань виконано приладами “Галф” і “Кембрідж”. Сумісне врівноважування всіх спостережень показало, що прискорення сили тяжіння в будь-якому пункті світової опорної мережі IGSN-71 оцінюється похибкою меншою, ніж 0,2 мГал.

Таблиця 8.1. Абсолютні визначення, які задають Міжнародну гравіметричну стандартну мережу

Пункт	Автор, рік визначення	Прискорення сили тяжіння, мГал
Севр	Сакума, 1970	980925,957+0,030
Севр	Фаллер, 1971	980925,985+0,041
Теддінгтон	Кук, 1969	981181,840+0,130
Теддінгтон	Фаллер, 1971	981181,891+0,050
Богота	Фаллер, 1971	977389,979+0,087
Вашингтон	Фаллер, 1971	980101,271±0,055
Мідлтаун	Фаллер, 1971	980305,318+0,041
Бостон	Фаллер Д 971	980378,685+0,042
Фербенкс	Фаллер Д 971	982235,007+0,042
Денвер	Фаллер, 1971	979597,716+0,042

Таблиця 8.2 Розміщення пунктів IGSN-71 на поверхні Землі

Область	Кількість пунктів
Північна півкуля	1478 (80 %)
Південна півкуля	376 (20 %)
Північна Америка	572
Європа	482
Південна Америка	229
Африка	198
Азія	148
Тихий океан	95
Австралія	84
Атлантичний океан	34
Антарктида	7
Індійський океан	5

Для переходу від Потсдамської до системи IGSN-71 необхідно ввести поправку Потсдамської системи, яка дорівнює -14 мГал. Вона одержана з багаточисельних зв'язків Потсдама з пунктами сучасних абсолютних вимірювань і врівноваження мережі IGSN-71. В даний час уточняється світова опорна гравіметрична мережа та збільшується з кожним роком кількість пунктів, в яких будуть виконані абсолютні вимірювання.

8.2. СВІТОВА АБСОЛЮТНА ГРАВІМЕТРИЧНА МЕРЕЖА (IAGBN)

МАГ проводить роботи зі створення нової світової опорної мережі, яка повинна замінити систему МГСС-71. Міжнародна мережа пунктів абсолютних вимірів високої точності охоплює всю земну кулю. Вимірювання на цих пунктах періодично повторюють. Основне призначення мережі — спостереження за довготривалими змінами сили тяжіння. У первинному варіанті заплановано 36 таких пунктів.

Пункти фундаментальної мережі повинні задовольняти суворим вимогам:

- геологічна та сейсмічна стабільність;
- гідрологічна стабільність;
- малі штучні мікросейсми;
- пункт має розташовуватися в спеціальному приміщенні на нижньому поверсі капітальної будівлі, мати електропостачання;
- стабільна основа не схильна до нахилів;
- легка доступність і можливість контактів з місцевими геологічними і геодезичними службами;
- зв'язок з геодезичними станціями спостережень ШСЗ (штучних супутників Землі) та пунктами національних геодезичних мереж для контролю планових і висотних координат;
- місцевий гравіметричний контроль прив'язкою до пунктів супутників;
- місцевий геометричний контроль плановими і висотними визначеннями.

Пункти повинні бути закріплені. На кожен пункт складається повний опис, параметри для обчислення редукцій повинні бути опубліковані.

Відносні вимірювання будуть згущувати гравітаційну основу і утворювати мережі у важкодоступних районах континентів.

8.3. ОПОРНІ І РЯДОВІ ГРАВІМЕТРИЧНІ МЕРЕЖІ

Для приведення відносних вимірювань сили тяжіння в єдину систему контролю за зміщенням нуль-пункту гравіметрів і визначення їх масштабних коефіцієнтів необхідно мати систему гравіметричних пунктів підвищеної точності, різниці прискорення сили тяжіння між якими відомі з високою точністю. Така система пунктів підвищеної точності називається опорною гравіметричною мережею. Самі гравіметричні зйомки ділять відповідно на опорні мережі та рядові зйомки.

На території окремих держав створюються національні опорні гравіметричні мережі з вихідним опорним пунктом, прискорення сили тяжіння якого визначене з високою точністю відносно вихідного пункту системи IGSN-71.

Державна опорна гравіметрична мережа включає [98], в основному, мережу гравіметричних пунктів різних класів і, в небагатьох випадках, мережу маятникових пунктів, зв'язок між якими здійснюється відносними визначеннями. Для цього використовують високоточні гравіметри та маятникові прилади. Створена національна гравіметрична опорна мережа являє собою систему полігонів, вздовж кожної сторони (ланки) яких спостереження виконують одночасно групою приладів у декількох незалежних рейсах, тобто використовується методика багаторазових групових вимірювань. Спостереження між пунктами A і B національної опорної гравіметричної мережі виконують за такими схемами 1. $A - B - A' - B'$, 2. $A - B - A$. За результатами виконаних гравіметричних спостережень отримують необхідні похибки та ваги вимірів, а далі врівноважують опорну гравіметричну мережу. Така мережа складається із мережі гравіметричних пунктів I і II класів. Гравіметричні пункти I класу розміщують між собою на відстані 200 – 500 км. Між пунктами I-го

класу створюється мережа опорних пунктів II-го класу, відстань між якими складає 100 – 300 км.

Національна опорна гравіметрична мережа України створюється заново сучасними балістичними та статичними гравіметрами, хоча і будуть використані спостереження, які були проведені в колишньому СРСР. Вихідним пунктом національної опорної гравіметричної мережі буде пункт, який розміщений у приміщенні Полтавської гравіметричної обсерваторії, та в якому раніше були виконані абсолютні визначення прискорення сили тяжіння.

При виконанні гравіметричних зйомок створюється опорна мережа III-го класу та польова опорна мережа, під якою розуміють мережу з гравіметричних пунктів підвищеної точності (в 1,5 – 2 рази похибки вимірювань менші від похибок вимірювань на рядових пунктах). Польова опорна гравіметрична мережа створюється за рахунок найкращих гравіметрів з використанням методики багаторазових групових вимірювань. Для підвищення точності вимірювань скорочують тривалість рейсів ланки, транспортують гравіметри в сприятливих температурних умовах із застосуванням автомобіля, літака, гелікоптера, а також надійних амортизаторів. Один або декілька пунктів польової опорної мережі прив'язують до одного або декількох опорних пунктів Державної гравіметричної мережі. На польовій опорній мережі виконують одноразові вимірювання за схемою 1 – 2 – 3 – 1. Спостереження на пунктах опорної мережі виконують за центральною, двоступеневою та полігональною системами, а також за методикою вузлових пунктів.

При застосуванні центральної системи спостережень гравіметричний рейс виконують так, щоб кожен опорний пункт мав безпосередній зв'язок з центральним опорним пунктом більш високого класу або з пунктом, який надійно зв'язаний багаторазовими вимірюваннями з опорним пунктом вищого класу. Спостереження при цьому виконують за схемами 1) Ц, 1, Ц, 2, Ц, 3, Ц, 4, Ц і т.д., 2) Ц, 1, 2, Ц, 1, 3, Ц, 2, 4, Ц і т.д. Тут літерою Ц позначений центральний опорний пункт. Всі інші опорні пункти будуть пов'язані з центральним і утворюють замкнуті полігони. За спостереженнями на центральному опорному пункті вводять поправку за сповзання нуль-пункту гравіметра. Різницю прискорення сили тяжіння між опорними пунктами обчислюють як середнє арифметичне при рівноточних або середнє вагове при

нерівноточних вимірюваннях. Тоді точність таких опорних мереж, створених центральною системою можна оцінити за формулою:

$$m_{on} = \pm \frac{m}{\sqrt{N_{сер}}}, \quad (8.1)$$

$$N_{сер} = \frac{N}{n}, \quad (8.2)$$

$$m = \pm \sqrt{\frac{\sum \delta^2}{N-n}}. \quad (8.3)$$

Тут m – середня квадратична похибка одного виміру гравіметром,

$N_{сер}$ – середня кількість спостережень на одному пункті,

N – загальна кількість вимірювань,

n – кількість пунктів опорної мережі,

δ – відхилення виміряного значення Δg від його середнього.

Така центральна система використовується при організації каркасних опорних мереж і невеликих за площею зніманих опорних мереж.

Двоступенева система вимірювань складається із каркасної та заповнюючої опорних мереж. Її застосовують тоді, коли неможливо виконати вимірювання у всіх пунктах опорної мережі за центральною системою. Спочатку створюється каркас із опорних пунктів з великими відстанями між ними, а пізніше – щільна заповнююча мережа. Пункти каркасної мережі визначають безпосередньо із вимірювань різниці сили тяжіння між каркасними і центральним пунктами. Заповнюючі опорні пункти визначають в рейсах, які починаються та закінчуються на пунктах каркасної мережі. Точність опорних мереж, які створюються двоступеневою системою, оцінюють за формулою:

$$m_{on} = \pm \sqrt{m_k^2 + \frac{n_3}{n_k + n_3} m_3^2}, \quad (8.4)$$

де: n_k і n_3 – кількість каркасних і пунктів заповнення.

$m_k + m_3$ – середні квадратичні похибки визначення прискорення сили тяжіння на каркасних і заповнюючих пунктах.

Якщо немає можливості створення центральної або двоступеневої опорної мережі, тоді створюється полігональна система. Ця опорна мережа утворюється з сукупності полігонів зі сторонами, визначеними в незалежних рейсах за схемою 1 – 2 – 1. Краще утворювати полігони з малою кількістю сторін. Похибка

визначення прискорення сили тяжіння на опорних пунктах полігональної мережі можна оцінити за емпіричною формулою:

$$m_{on} = \pm \mu \sqrt{\frac{M}{m}}, \quad (8.5)$$

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{\sum \delta^2}{N-S}} \quad (8.6)$$

де: μ – середня квадратична похибка визначення одного приросту Δg ,

m – середня для одного полігона кількість спостережень Δg між двома суміжними пунктами,

M – кількість приростів, яка характеризує середню відстань опорних пунктів від найближчих вихідних пунктів,

S – кількість сторін полігонів опорної мережі

Допустиму нев'язку в полігоні визначають за формулою:

$$\omega_g = \pm 2\mu \sqrt{\frac{K}{m}}, \quad (8.7)$$

де: K – кількість сторін в полігоні. Полігони опорних мереж врівноважують.

У методиці вузлових пунктів виключається попереднє створення опорної мережі. Вузлові пункти – перетин двох або більше рядових рейсів, які опираються на різні каркасні пункти. Кількість перетинів визначається необхідною точністю зйомки, а визначення зміщення нуля-пункту приладів у кожному рейсі забезпечується системою вимірювань. Мережу вузлових пунктів врівноважують, а вузлові пункти використовують як опорні. Методика вузлових пунктів застосовується в умовах поганих доріг, в заболоченій і лісовій місцевості.

Опорні гравіметричні пункти надійно закріплюють на місцевості, і вони повинні мати зручні під'їзди. Крім того, їх суміщають із пунктами Державної геодезичної мережі або з іншими розпізнавальними на місцевості орієнтирами.

Після створення гравіметричної опорної мережі III класу та польової опорної мережі здійснюються спостереження на рядових пунктах. Спостереження в рядових рейсах завжди починають і закінчують на опорних пунктах (на одному і тому ж або на різних). Методика спостережень в рядових рейсах залежить від характеристик гравіметра та від особливостей ходу зміщення нуля-пункту. Якщо в рядових рейсах використовують нетермостатні

гравіметри, то тоді спостереження виконують при монотонній зміні температури. Методика побудови рейсів може бути двох типів:

1. Одноразові спостереження;
2. Повторні спостереження.

У першому типі спостереження на рядових пунктах виконують один раз в прямому ході. На початку, в середині та в кінці рейсу необхідно виконати не менше трьох спостережень на опорних пунктах, або на одному й тому ж опорному пункті. Поправку за зміщення нуль-пункту одержують, порівнюючи виміряну різницю сили тяжіння між опорними пунктами в рейсі із різницею вихідних значень сили тяжіння на цих пунктах. При методиці повторних спостережень вимірювання на пунктах виконують під час прямого та зворотного ходів. Прямий хід починають і закінчують на опорному пункті, а на зворотному повторюють частину рядових пунктів. В залежності від конкретних умов частка повторних спостережень в цих пунктах складає від 30 до 100%. Поправку за зміщення нуль-пункту визначають за результатами повторних спостережень, її вводять пропорційно проміжкові часу між спостереженнями на рядовому та опорному пунктах. У цьому випадку обчислюють середнє вагове зміщення нуль-пункту за всіма повторними спостереженнями в рейсі, приймаючи при цьому за вагу проміжок часу між двома повторними спостереженнями на пункті. Для контролю якості вимірювань у рядових рейсах і для оцінки точності виконують контрольні вимірювання. Контрольні рейси виконують так, щоб частка їх від загальної кількості контрольних пунктів складала 5 – 10%. Тоді середня квадратична похибка $m_{\Delta g}$ вимірювання однієї різниці прискорення сили тяжіння із результатів контрольних спостережень обчислюється за формулою:

$$m_{\Delta g} = \sqrt{\frac{\sum \delta^2}{2n}}, \quad (8.8)$$

де: δ – різниця між двома спостереженнями на контрольному пункті, n – кількість контрольних пунктів.

8.4. НАЦІОНАЛЬНІ ГРАВІМЕТРИЧНІ МЕРЕЖІ.

НАЦІОНАЛЬНА ГРАВІМЕТРИЧНА МЕРЕЖА УКРАЇНИ

Створення національних гравіметричних мереж починаючи з кінця 19 століття можна умовно розділити на три етапи, кожен з яких має свої особливості.

До 1930-х рр. національні мережі будувалися в Потсдамській системі відносних маятникових вимірів (розд. 1.1). Надалі застосовували пружинні гравіметри. При створенні фундаментальних мереж спочатку використовували і маятникові вимірювання, проте їх роль звелася до визначення гравіметричних калібрувальних базисів. Починаючи з 1970-х рр. почали створювати нові національні мережі, прив'язуючи відносні вимірювання до мережі МГСС-71, або використовуючи спільно відносні і абсолютні вимірювання; при цьому число абсолютних вимірювань зростало (розд. 1.1). Побудова нових гравіметричних мереж стала особливо необхідною внаслідок:

- появи системи МГСС-71;
- втрати помітної кількості пунктів наявних мереж;
- підвищення вимог до точності і надійності мереж;
- зростаючого інтересу до моніторингу часових вимірів сили тяжіння;
- можливості використання нових абсолютних і відносних приладів й нових методик.

Національні гравіметричні мережі, як правило, ділять на кілька класів; мережі різних класів створюються послідовно, а при їх обробці значення сили тяжіння на пунктах вищих класів вважають твердими для пунктів нижчих класів. Перевага такої ієрархічної структури в тому, що гравіметричні дані можуть використовуватися до завершення останнього етапу згущення мережі. Середня відстань між пунктами опорних мереж в значній мірі визначається територією країни (для фундаментальної гравіметричної мережі це 100 – 300 км, в мережі 1-го класу – кілька десятків кілометрів, в мережі 2-го класу – близько 10 км, в мережі 3-го класу – кілька кілометрів).

У 1979 – 1983 рр. підприємство № 7 ГУГК СРСР створило Державну гравіметричну мережу на території України, в яку увійшли пункти Державної фундаментальної гравіметричної мережі (ДФГМ) і пункти Державної гравіметричної мережі 1-го класу [124].

Основним приладом для вимірювань приросту прискорення вільного падіння був маятниковий комплекс “АГАТ”, а також використано результати вимірювань статичними гравіметрами типів ГНУ і ГАГ. Абсолютні визначення на фундаментальному вихідному пункті України “Полтава” виконані у 1982 р. балістичним гравіметром ГАБЛ з точністю 0,024 мГал. Середня квадратична похибка одного вимірювання різниці прискорення вільного падіння між опорними пунктами, виконаного за допомогою маятникового комплексу “АГАТ”, дорівнювала 0,04 мГал.

Державна фундаментальна гравіметрична мережа України складається з 17 основних гравіметричних пунктів і одного вихідного гравіметричного пункту “Полтава” (частина Державної гравіметричної мережі 1-го класу (ДГМ-1) і Державної фундаментальної гравіметричної мережі Радянського Союзу) [125]. Більшість пунктів ДФГМ визначено в 1979 – 1983 рр. абсолютним балістичним гравіметром ГАБЛ з точністю близько 10 мГал, а пункти ДГМ-1 – відносними вимірюваннями з використанням маятникових комплексів “Агат” відносно головного гравіметричного пункту Росії “Льодово”, розташованого поблизу Москви, з взаємним врівноваженням надалі з похибкою до 30 мГал. Основний обсяг гравіметричних вимірювань на пунктах 1-го класу виконано маятниковим комплексом “АГАТ”, а вимірювання на пунктах-супутниках – гравіметрами типу ГАГ-2 і ГНУ-КВ. ДГМ-I класу є полігональною системою, яка спиралась (у межах СРСР) на три фундаментальних пункти (“Москва”, “Новосибірськ”, “Ташкент”) які, своєю чергою, прямо пов’язані з центральним світовим гравіметричним пунктом в м. Потсдам (Німеччина). Після врівноваження полігонів гравіметричної мережі середня квадратична похибка значень прискорення вільного падіння на пунктах становила $\pm 0,032$ мГал.

Роботи зі створення Державної опорної гравіметричної мережі 2-го класу на території України виконувались у декілька етапів у 1962, 1969, 1986, 1987 роках. Станом на 01.01.1988 року Україна була забезпечена гравіметричною мережею, яка складається із 126

пунктів 2-го класу (середня квадратична похибка $\pm 0,035$ мГал) густотою один пункт на один планшет масштабу 1: 200 000.

У 2009 р. за проектом [126] фахівцями була встановлена надійність 109 пунктів Державної опорної гравіметричної мережі I і II класу.

У 1993 р. в Україні загалом визначено та оброблено 3760 ОГП 3-го класу (рис. 8.1). Пункти розміщувались у центральній частині і по кутах топографічного планшету масштабу 1:50000, при цьому середня відстань між пунктами дорівнювала 15 км. Врівноваження виконувалось за полігональною системою, за схемою А-Б-А', групою із 4 гравіметрів типу ГНУ-КВ, у двох незалежних рейсах. Середня квадратична похибка значень прискорення вільного падіння на пунктах становила $\pm 0,03$ мГал.

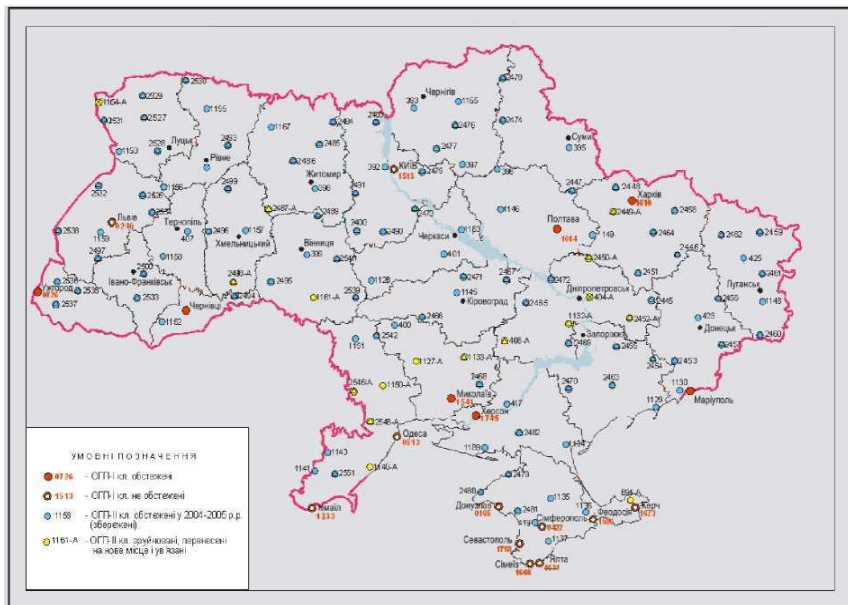


Рис. 8.1. Схема обстеження пунктів гравіметричної мережі 1-го та 2-го класу (станом на 01.09.2009 року) за [124]

Державна гравіметрична мережа України є основою для виконання гравіметричних досліджень, які спрямовані на вивчення гравітаційного поля та зовнішньої фігури Землі та їхніх змін у часі, виконання інших наукових і господарських завдань та

метрологічного забезпечення гравіметричних зйомок. Вона слугує єдиною гравіметричною системою на території України.

Високоточна фундаментальна гравіметрична мережа забезпечить зв'язок зі світовою гравіметричною мережею, стане основою для побудови Державної гравіметричної мережі та вивчення у часі варіацій прискорення вільного падіння. У кожному пункті цієї мережі необхідно виконати абсолютні визначення прискорення вільного падіння за допомогою балістичних гравіметрів з похибкою до 10 мкГал та визначити нормальні висоти в ході високоточного геометричного нівелювання I та II класів. Один із пунктів цієї мережі має стати постійно діючою гравіметричною обсерваторією, в якій повинні проводитись регулярні гравіметричні вимірювання, а також супутникові геодезичні спостереження та спеціальні гідрологічні дослідження.

У роботах [127, 128] запропонований варіант побудови ДФГМ України у вигляді широтно-довготної схеми з наявністю двох майже ортогональних гравіметричних базисів – широтного (Харків – Дніпропетровськ - Сіферополь) та довготного (Харків – Полтава – Київ – Рівне – Луцьк) з вихідним гравіметричним пунктом у селищі Липці Харківської області. У перспективі пропонується створення другого довготного базису (Ужгород - Івано-Франківськ - Вінниця - Кіровоград - Запоріжжя - Донецьк) (рис 8.2).

Прогнозна точність модернізованої гравіметричної мережі 1-го класу має підвищитися не менше ніж удвічі.

Вимоги до національних стандартів прискорення сили тяжіння, як до найвищих ланок систем метрологічного забезпечення гравіметричних мереж, сформульовані Міжнародною гравіметричною комісією (IGC) в 1998 р. Відповідно до рекомендацій IGC необхідно визначати сукупність величин прискорення сили тяжіння, вимірюваних балістичними абсолютними гравіметрами і пройшли звірення в Міжнародному Бюро Мер в Севрі [129]. Більшість зазначених рекомендацій IGC в на даний час вже знаходять практичну реалізацію при модернізації і розвитку національних гравіметричних мереж Японії, Польщі, Венгрії, Словаччини та інших країн [130-133] (табл. 8.3).

Таблиця 8.3. Характеристика деяких національних гравіметричних мереж світу

Страна Параметр мережа	Японія	Польща	Угорщина	Словакія	Україна (проект)
Кількість пунктів ФГС	16	18	14	17	5-7
Тип гравиметра	FG-5 (3 шт)	FG5-101 FG5-107 Jilag-5	DMA (NEV tA)	LCR-2 шт	ДЕТУ 02-02-96 LCR-3 шт
СКО, μ Гал	1-2	10	20	30-40	20-30
Додаткова інформація	1.Пунктів першого класу - 101 2.Похибка мережі після вирівнювання 117 пунктів -10 μ Гал	1. Відстань між пунктами 150-350 км 2. Мережа даних складається з 26 пунктів	1. Мережа ділянок 2-го розряду - 430 точок 2. Довжина калібровочного базису - 300 км	1. Мікрогравіметрична мережа має 3 пункти на відстані від еталону 500 м, 700 м і 15 м 2. Загальне число пунктів мережі - 330	Другий етап - 10 пунктів

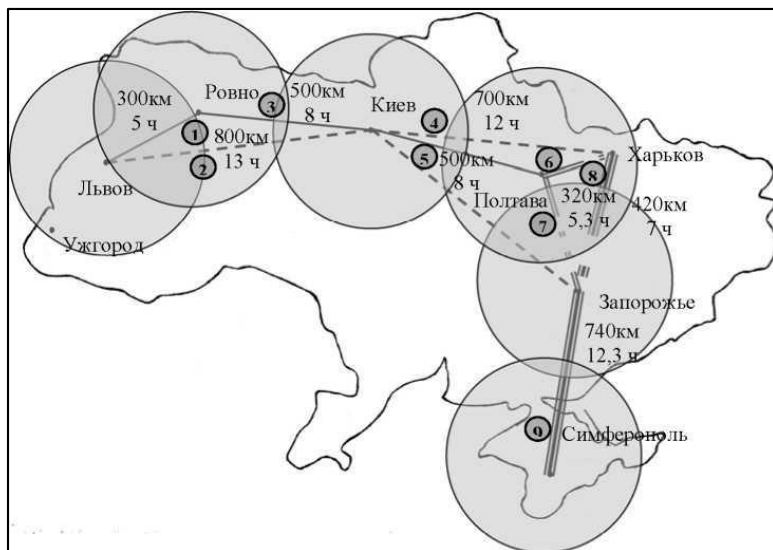


Рис. 8.2. Широтно-довготна схема побудови опорної гравіметричної мережі за [128]

Тоді вона стане основою для розвитку мереж нижчих класів та забезпечення гравіметричного знімання всіх масштабів. Середні квадратичні похибки абсолютних визначень не повинні перевищувати ± 10 мкГал, відносних визначень між пунктами ДФГМ та пунктами гравіметричної мережі 1-го класу - ± 15 мкГал [124].

8.5. МЕТОДИКА ЗЙОМКИ І ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ

8.5.1. Методика гравіметричних зйомок

Методика гравіметрії – це ціла сукупність тісно пов'язаних принципів, що пояснюють вибір тих чи інших рішень при проведенні робіт в залежності від геологічної задачі, наявних матеріальних і людських ресурсів. Ці рішення стосуються вибору конкретної апаратури, проектної точності зйомки, густоти мережі

спостережень, напрямку профілів, способу обробки даних і представлення результатів досліджень.

Перш за все слід розрізнити види робіт за місцем їх проведення. Тут виділяють наземну, морську, повітряну, підземну і свердловинну зйомки. Не менш важливо поділ за масштабом робіт. Зйомки, проведені для виявлення регіональних аномалій і найбільш загальних закономірностей структури поля в масштабах 1: 200 000 і дрібніше, називають регіональними. Вони дають конкретні відомості лише про глибинну будову літосфери. Однак за результатами регіональних зйомок можна виділити окремі великі аномальні зони, де потім виробляються так звані пошукові зйомки. Вони виконуються в масштабах 1: 100 000 - 1: 50 000 і зазвичай спрямовані, як і випливає з їх назви, на пошук родовищ корисних копалин. Якщо вони дають позитивний результат, то це і є підставою припускати перспективність даного регіону і проведення розвідувальних зйомок в масштабі більше 1: 10 000.

8.5.2. Наземна гравіметрична зйомка

Наземна зйомка з гравіметрами називається зазвичай гравіметричною. Найчастіше застосовується пішохідна зйомка, рідше для переміщення між пунктами використовується автотранспорт. Його застосування дозволяє скоротити часові проміжки між спостереженнями на різних точках, що підвищує продуктивність робіт, а також їхню точність, оскільки дозволяє знижувати вплив сповзання нуля-пункту. Однак використання автотранспорту підвищує вартість робіт і часто неможливо здійснити їх за відсутністю доріг. Епізодично (як правило, при дрібномасштабних зйомках) застосовується авіатранспорт.

Зазвичай використовується майданна зйомка, при якій деяка ділянка покривається мережею спостережень. Маршрутна зйомка проводиться за окремим профілем і не дає достатньої інформації про структуру гравітаційного поля. Вона застосовується лише при рекогносцирувальних і пошукових роботах.

Одним з найважливіших етапів методики є вибір масштабу зйомки. Від нього залежить і густота мережі, оскільки відстань між профілями на підсумковій карті не повинна перевищувати 1 см в

масштабі зйомки. Наприклад, при проведенні розвідувальної зйомки в масштабі 1: 10 000 відстань між профілями повинна становити не більше 100 м. Крок за профілем (тобто відстань між точками профілю) або дорівнює відстані між профілями (при квадратній мережі зйомці), або менше нього, але не більше ніж в 5 разів (при прямокутній зйомці). Профілі розташовуються вхрест простягання об'єктів аномальної густини. Довжина профілів повинна в 5 – 10 разів перевищувати видиму ширину шуканих тіл.

Для прив'язки точок на місцевості, обчислення редукцій та аномалій сили тяжіння необхідне проведення геодезичних робіт, що передують гравіметричним. Наявність заздалегідь підготовлених топографічних карт і карт редукцій істотно полегшує роботу. Прив'язка точок проводиться з використанням аерофотознімків або за допомогою теодолітних робіт і нівелювання місцевості. Однак найбільш високу точність забезпечує прив'язка за допомогою супутників. Для цього є спеціальна апаратура, наприклад, GPS.

Методичними інструкціями («Інструкція з гравірозвідки», тощо) рекомендується виконувати певні співвідношення між масштабами зйомок, похибкою топоприв'язок, густотою мережі спостереження та проектною точністю.

Зйомки проводяться рейсами, які починаються та закінчуються на опорних пунктах. Частина рейсу між двома опорними пунктами називається ланкою. Опорна мережа розбивається для обліку сповзання нуля-пункту та знаходження абсолютних значень прискорення сили тяжіння. Вона включає до 5 – 10% від загального числа точок спостереження, рівномірно розподілених по площі. Точність прискорення сили тяжіння на опорних точках повинна в 1,5 – 2 рази перевищувати точність рядових спостережень. Це досягається використанням більш високоточних приладів, багаторазовими вимірами на опорних точках, скорочення проміжку часу між вимірами на сусідніх точках шляхом використання транспорту. При створенні опорної мережі від 50 до 100% всіх спостережень повинні складати повторні (контрольні). Існує кілька способів розбивки опорної мережі. Широко поширені вимірювання по центральній системі, коли один з опорних пунктів (центральный) має зв'язки з усіма іншими, тобто з'єднаний з кожним з них однією

ланкою. Іноді розбивка мережі здійснюється по системам, які не передбачають наявності центральної точки.

У нашій країні існує так звана державна мережа, що включає в себе пункти 1, 2 і 3 класів точності, на яких прискорення сили тяжіння виміряно з високою точністю. Відстані між цими пунктами становлять близько 10 км, що не дозволяє використовувати їх для виявлення аномальних значень поля сили тяжіння. Однак, оскільки на них відомі абсолютні значення прискорення сили тяжіння, до них здійснюється прив'язка опорних мереж.

Необхідно визначати точність опорної мережі, що характеризується середньою квадратичною помилкою. Вона виходить за контрольними спостереженнями і розраховується за формулою:

$$\varepsilon_{\text{оп}} = \pm \sqrt{\frac{\sum \delta^2}{m-n}}, \quad (8.9)$$

де δ - похибки прискорення сили тяжіння за контрольними спостереженнями (різниця між основним і контрольним виміром), m – загальне число всіх спостережень, включаючи контрольні, n – число контрольних точок.

Зйомкам на рядовій мережі передують попередні дослідження, що включають в себе визначення сповзання нуль-пункту. За цими даними виділяють проміжок часу, протягом якого сповзання нуль-пункту можна вважати лінійно залежним від часу. При рядовий зйомці після закінчення даного проміжку (1 – 2 години) необхідно брати вимір на одному з опорних пунктів. Зйомка на рядових пунктах ведеться як шляхом одноразових спостережень, так і з повтореннями при зворотному ході, що дозволяє більш гнучко враховувати сповзання нуль-пункту. Для контролю точності рядової зйомки використовуються повторні спостереження на контрольних точках, які становлять не менше 5 - 10% від загального числа точок. За ним розраховується середньоквадратична помилка рядовий мережі за формулою:

$$\varepsilon_{\text{ряд}} = \pm \sqrt{\frac{\sum \delta^2}{(2n-1)}}, \quad (8.10)$$

де n – число контрольних точок.

Основним видом гравіметричних зйомок є площинна (майданна) зйомка, при якій весь район досліджень більш-менш рівномірно

покривають гравіметричними спостереженнями. При цьому точки спостереження задають зазвичай по системі профілів, які намагаються вибирати прямолінійними, спрямованими вхрест передбачуваного простягання досліджуваних об'єктів, і які мають протяжність, що значно перевищує поперечні розміри цих об'єктів. Відстані між профілями повинні бути принаймні в 3 рази менше поздовжніх розмірів досліджуваних об'єктів для того, щоб аномалія гравітаційного поля від них фіксувалася не менше ніж на трьох сусідніх профілях. Це дозволяє в подальшому по аномаліям встановити планове простягання об'єктів геологічного пошуку. Крок точок спостереження за профілем задають, виходячи з поперечних розмірів розвідувальних структур і об'єктів, і він повинен бути менше $1/3$ поперечного розміру об'єкта. Це необхідно для отримання чіткого аномального ефекту не менше ніж на трьох точках кожного профілю.

Площинна зйомка може бути рівномірною (відстані між профілями та пунктами спостереження за профілем приблизно однакові), якщо досліджувані структури або об'єкти ізометричні в плані, або нерівномірною, якщо вони витягнуті. Масштаб гравіметричної зйомки визначається, перш за все, густотою точок спостереження і граничними відстанями між ними. Максимальна відстань між пунктами спостереження, відповідне відстані між профілями, не повинно перевищувати 1 см результуючої карти, і це визначає масштаб зйомки. Наприклад, при зйомці масштабу 1: 100 000 відстані між профілями на місцевості повинні становити приблизно 1 км.

8.5.3. Похибка зйомки

Проекту похибку зйомки (середньоквадратичне похибка визначення Δg) вибирають в залежності від масштабу зйомки та інтенсивності передбачуваних аномалій Δg над геологічними об'єктами пошуків. Проектна похибка при пошуково-розвідувальній зйомці не повинна перевищувати $1/5$, а при регіональній – $1/3$ мінімального значення інтенсивності (амплітуди) локальних аномалій. Δg На окремих профілях, де передбачається детальне вивчення параметрів аномальних об'єктів, похибка робіт повинна

бути ще менше. Виходячи з величини похибок зйомок, вибирають гравіметричну апаратуру, визначають похибку топогеодезичної прив'язки, тобто отримання висотних позначок точок спостереження (для введення редукцій) і обчислення координат (для обрахунку нормального значення сили тяжіння), а також ступінь обліку зміщення нуль-пункту. Співвідношення між перерахованими параметрами системи спостережень при польових гравіметричних зйомках визначається спеціальною інструкцією.

Система обходу точок спостережень

Після проектування системи спостережень для площі досліджень і вибору гравіметрів з відповідною похибкою приступають до самої зйомки. Основна вимога до роботи з гравіметрами полягає в тому, що за проміжок часу, рівний 2,5 - 3 години, спостереження повинні проводитися на 2 – 3 опорних точках, тобто сукупність послідовних вимірювань, які виконуються, як правило, протягом 2,5 – 3 годин, повинна завершуватися або на одному і тому ж пункті або на пунктах з відомими значеннями g . Виявлені при цьому зміни відліків гравіметра відбуваються через зсув нуль-пункту приладу. Вважається, що зміщення нуль-пункту лінійно в часі за 2 – 3 години спостережень, і тому його розподіляють пропорційно часу спостережень за всіма пунктами даного рейсу. Оскільки гравіметр дозволяє виконувати спостереження тільки за короткий час, то необхідні точки для постійної корекції його показань. Ці точки називають опорними, а їх сукупність – опорною мережею. Опорні точки служать для прив'язки відносних спостережень до абсолютного рівня гравітаційного поля.

Таким чином, при зйомці з гравіметрами вимірюють відносні значення сили тяжіння послідовно у всіх рядових пунктах по відношенню до однієї вихідної або опорної точки району досліджень. У вихідній точці, як правило, визначають абсолютне значення сили тяжіння шляхом перенесення за допомогою високоточних гравіметрів сили тяжіння з найближчих обсерваторій і опорних пунктів регіональної зйомки країни. Абсолютні значення сили тяжіння в кожній точці виходять алгебраїчним складанням абсолютного значення сили тяжіння у вихідній точці з відносним значенням сили тяжіння в даній точці.

Практично при гравіметричній зйомці великих площ спочатку розбивають мережу польових опорних точок для створення жорсткої системи значень сили тяжіння, прив'язаною до опорних точок регіональної зйомки країни. Потім виконують спостереження у всіх рядових пунктах досліджуваного району. Опорні точки розміщують в місцях, зручних для під'їзду та знаходження на місцевості, і більш-менш рівномірно по площі досліджень, а їх число повинне бути в 5 - 10 разів менше, ніж число пересічних пунктів спостережень. Опорна мережа повинна відрізнятися малою похибкою вимірювань значень сили тяжіння, що досягають, проводячи одночасно заміри декількома високоточними гравіметрами, збільшуючи швидкість зйомки (застосування для пересування вертольотів і автомобілів). Виконання робіт у стислі терміни сприяє малому зміщенню нуль-пункту гравіметрів. При створенні опорної мережі від 50 до 100% всіх спостережень складають контрольні вимірювання. Спостереження на опорній мережі починають і закінчують у вихідній точці, по відношенню до якої розраховують приріст сили тяжіння. Після замикання полігону отримують нев'язку, яку розкидають також, як і при топографічних роботах з нівеліром.

8.5.4. Обробка даних гравіметричних зйомок

При первинній обробці гравіметричних зйомок для кожної точки спостережень обчислюються аномалії Фая і Буге. Аномалія Фая обчислюється за формулою:

$$\Delta g_{\Phi} = g_0 - \gamma_0 + \Delta g_1. \quad (8.11)$$

де g_0 – спостережене значення прискорення сили тяжіння на найближчому опорному пункті;

γ_0 – нормальне значення прискорення сили тяжіння в рядовій точці, Δg_1 - приріст прискорення сили тяжіння по відношенню до опорного пункту (при розрахунку аномалії на опорній точці – редукація за висоту).

Аномалія Буге в точці обчислюється за формулою:

$$\Delta g_{\text{Б}} = g_0 - \gamma_0 + \Delta g_2 + \Delta g_p \quad (8.12)$$

де Δg_2 - зведена поправка Буге, що включає поправку за вільне повітря та поправку за густину проміжного шару;

Δg_p – редукція за топографію.

Обчислення аномалій вручну представляє трудомістку задачу і давно не практикується. Для цих цілей ефективно використовуються персональні ЕОМ, оскільки за останні роки накопичився великий обсяг відповідного програмного забезпечення. Далі розраховується загальна похибка виконаних зйомок за формулою:

$$\varepsilon_3 = \pm \sqrt{\varepsilon_{\text{ом}}^2 + \varepsilon_{\text{рм}}^2 + \varepsilon_{\gamma}^2 + \varepsilon_{\text{Б}}^2 + \varepsilon_{\text{рел}}^2}, \quad (8.13)$$

де $\varepsilon_{\text{ом}}$ – середньоквадратична помилка опорної мережі;

$\varepsilon_{\text{рм}}$ – середньоквадратична помилка рядової мережі;

$\varepsilon_{\text{Б}}$ – похибка введення редукції Буге;

ε_{γ} – похибка розрахунку нормального поля;

$\varepsilon_{\text{рел}}$ – похибка введення редукції за топографію. Роботи вважаються успішними лише тоді, коли загальна похибка менше проектної точності зйомки.

За результатами гравіметричної зйомки будуються графіки та карти аномалій Буге. При побудові графіків уздовж профілю в масштабі зйомки проставляються точки спостережень, вгору та вниз – значення аномалії Буге. При побудові карт аномалій Буге на них проставляються точки спостереження, а близько точок записуються реальні значення $\Delta g_{\text{Б}}$. Далі проводяться ізолінії. Перетин ізоліній не повинен бути менше потрібної загальної похибки.

9. ВИМІРЮВАННЯ ДРУГИХ ПОХІДНИХ ПОТЕНЦІАЛУ СИЛИ ТЯЖІННЯ

Розглянемо пристрої, які дозволяють вимірювати зміни поля, тобто другу похідну потенціалу. Перший такий пристрій (гравітаційний варіометр) був винайдений і розроблений угорським геофізиком Роландом фон Етвешем приблизно в 1880 році для оцінки відхилення поверхні Землі від сфери. Це пов'язано з тим, що інші похідні потенціалу характеризують кривизну еквіпотенціальних поверхонь. Трохи згодом було розроблено декілька видів цих приладів, які широко застосовуються в розвідувальній геофізиці.

Суттєвим елементом крутильних терезів Етвеша є стрижень з двома вантажами з масами m на кінцях, розташованих таким чином, що їхній центр підвішений на тонкій пружній нитці. Цей стрижень з масами може обертатися навколо нитки. Якщо такий стрижень зміщується з положення рівноваги, він починає коливатися з відносно великим періодом; цей рух виникає завдяки гравітаційним силам, що діють на маси, і пружній силі нитки. Завдяки затуханню амплітуда руху повільно зменшується і врешті-решт стрижень зупиняється. Це положення рівноваги суттєво залежить від зміни поля g між масами. Наприклад, якщо прилад помістити в однорідне гравітаційне поле, де силові лінії векторного поля паралельні одна одній, це поле не буде викликати обертання, і тому, крутильна сила дорівнює нулю. Це означає, що крутильні терези Етвеша вимірюють відхилення поля від однорідного поля.

9.1. РЕЗУЛЬТАТИВНА СИЛА ТА МОМЕНТ

Для виводу рівняння обертання, а також умови рівноваги, представимо суму двох гравітаційних сил як суперпозицію результуючої сили і моменту. Припустимо, одна гравітаційна сила – це $\vec{F}_1$ (рис. 9.1, а). Нехай сили $\vec{F}_1$ та $-\vec{F}_1$ також прикладаються до центру мас. Очевидно, що дія всіх трьох сил така ж, як дія однієї сили, що діє на масу m_1 ; вони можуть бути представленими як

комбінація сили $\vec{F}_1$, прикладеної до центру мас, і моменту τ_1 , що утворений парою сил $\vec{F}_1$ і $-\vec{F}_1$, що діють в різних точках. Таким же чином замінимо гравітаційне поле $\vec{F}_2$, яке переміщує масу m_2 , силою $\vec{F}_2$ в центрі мас і крутильним моментом τ_2 . Оскільки обидві сили прикладаються до однієї і тієї ж точки (центру мас) можна сказати, що дія двох гравітаційних сил еквівалентна результуючій силі $\vec{F}$ і крутильному моменту:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad \tau = \tau_1 + \tau_2. \quad (9.1)$$

Результативна сила $\vec{F}$ компенсується реакцією нитки та, відповідно, вона не впливає на рух маси. В цілому, загальний крутильний момент τ має довільний напрямок. Проте особливий інтерес має тільки його вертикальна компонента, яка викликає обертання в горизонтальній площині. В той же час прийняті спеціальні міри для усунення впливу руху в вертикальній площині.

9.2. РІВНЯННЯ РІВНОВАГИ ТА РУХУ

Спочатку введемо декартову систему координат з початком O в центрі мас (рис. 9.1, б). Осі x та y направлені на північ та схід, відповідно вісь z вздовж вертикалі. За визначенням, момент сили $F(x, y, z)$ з компонентами F_x , F_y та F_z по відношенню до точки O дорівнює:

$$\tau = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

та $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ – радіус-вектор точки, де прикладається сила $\vec{F}$. Відповідно, вертикальна компонента моменту сили, що діє на елементарну масу dm

$$d\tau_y = xF_z - zF_x,$$

де $F_y = g_y dm$ та $F_x = g_x dm$ – компоненти сили вздовж осей x та y . Загальна компонента моменту, що діє на всі маси і викликана гравітаційним полем, отримується інтегруванням по всім масам:

$$\tau_g = \int (xg_y - yg_x) dm. \quad (9.2)$$

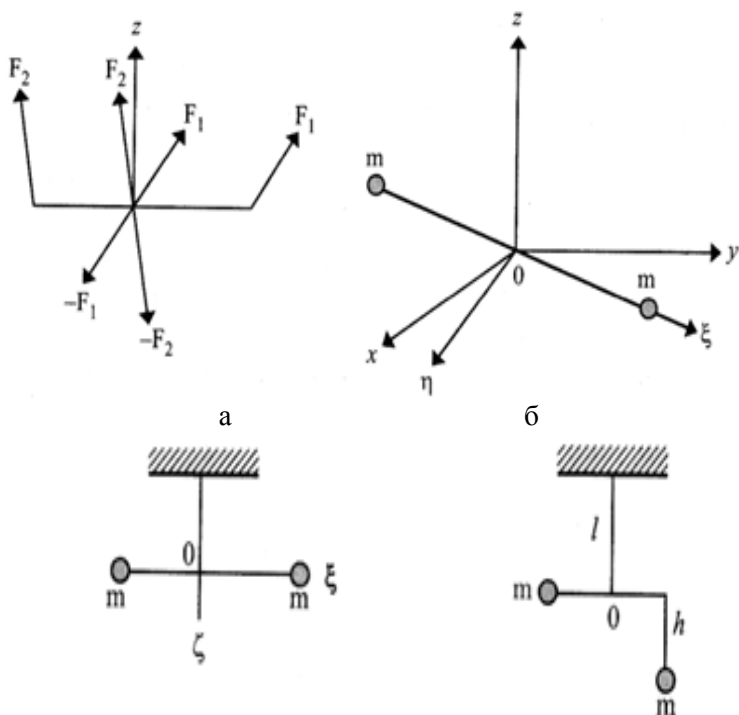


Рис.9.1. Ілюстрація виводу рівняння обертання

Суперпозиція сил, які прикладені до різних точок (а); система координат з початком в центрі мас (б); градієнтометр першого типу(в); градієнтометр L-типу (г)

У випадку, коли маси можуть розглядатися як точкові і можливо знехтувати масою стрижня, об'ємний інтеграл зникає, і ми отримуємо:

$$\tau_g = m \sum_{n=1}^2 [x_n g_y(x_n, y_n, z_n) - y_n g_x(x_n, y_n, z_n)].$$

У рівновазі момент τ_g урівноважується моментом пружної сили нитки

$$\tau_s = \mu(\alpha - \alpha_0), \quad (9.3)$$

де μ – пружна постійна нитки, α – початковий кут закручування.

Відповідно, рівняння рівноваги набуває вигляду:

$$\int (xg_y - yg_x)dm = \mu(\alpha - \alpha_0), \quad (9.4)$$

і вимірний кут α дає інформацію про розподіл гравітаційного поля. Як і у випадку з гравіметром, в околицях рівноваги рух стрижня з масами визначається загальним моментом:

$$\tau = \int (xg_y - yg_x)dm - \mu(\alpha - \alpha_0) \quad (9.5)$$

і у відповідності з другим законом Ньютона рівняння руху набуде вигляду

$$I\ddot{\alpha} + k\dot{\alpha} + \mu(\alpha - \alpha_0) = \tau_g. \quad (9.6)$$

Тут k – коефіцієнт опору, I – момент інерції системи.

Порівняння з гравіметром ясно показує, що вираз для моменту τ_g для гравітометра набагато більш складний, і частково, він вміщує значення гравітаційного поля в усіх точках стрижня. Тепер зробимо значне спрощення цього виразу і покажемо, що воно визначається поведінкою поля і центрі стрижня і параметрами цієї лінійної системи. Оскільки довжина стрижня досить мала, природно зробити припущення, що горизонтальні компоненти поля g_v в межах стрижня змінюються лінійно. Потім, виконуючи розкладання функцій g_x і g_y в степеневі ряди і опускаючи всі члени, крім перших двох, отримаємо для обох компонентів

$$g_x(x, y, z) = g_x(0) + \left(\frac{\partial g_x}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial g_x}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial g_x}{\partial z}\right)_0 z + \dots$$

і

$$g_y(x, y, z) = g_y(0) + \left(\frac{\partial g_y}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial g_y}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial g_y}{\partial z}\right)_0 z + \dots \quad (9.7)$$

Індекс 0 означає, що похідні взяті в початку координат, де $x = y = z = 0$. Оскільки нитка орієнтована вздовж вертикалі (лінії виска), гравітаційне поле впочатку координат має тільки вертикальну компоненту, тобто

$$g_x(0) = g_y(0) = 0. \quad (9.8)$$

Ввівши позначення для других похідних потенціалу U в початку координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_x}{\partial x} &= U_{xx}, & \frac{\partial g_x}{\partial y} &= U_{xy}, & \frac{\partial g_x}{\partial z} &= U_{xz}, \\ \frac{\partial g_y}{\partial x} &= U_{yx}, & \frac{\partial g_y}{\partial y} &= U_{yy}, & \frac{\partial g_y}{\partial z} &= U_{yz}, \end{aligned}$$

замість рівняння (9.8) маємо

$$\begin{aligned} g_x(x, y, z) &= U_{xx}x + U_{xy}y + U_{xz}z \\ g_y(x, y, z) &= U_{yx}x + U_{yy}y + U_{yz}z. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Підстановка останнього в рівняння (8.4) дозволяє представити рівняння рівноваги через другі похідні потенціалу в початку координат

$$\begin{aligned} U_{\Delta} \int xy dm + U_{xy} \int (x^2 - y^2) dm + U_{yz} \int xz dm - \\ - U_{zz} \int yz dm = \mu(\alpha - \alpha_0) \end{aligned} \quad (9.10)$$

де

$$U_{\Delta} = U_{yy} - U_{xx}. \quad (9.11)$$

За результатами отримується залежність між чотирма другими похідними потенціалу та вимірним кутом α , що є параметрами приладу.

9.3. ДРУГІ ПОХІДНІ ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОТЕНЦІАЛУ

Існує шість похідних другого порядку:

$$U_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}; U_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}; U_{zz} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

і

$$U_{xy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}; U_{xz} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}; U_{yz} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}.$$

Існують різні типи гравітаційних варіометрів, наприклад, один з них вимірює чотири похідні U_{xz} , U_{yz} , U_{xy} , і різницю

$$U_{\Delta} = U_{yy} - U_{xx},$$

в той час як інші вимірюють тільки U_{xz} , і U_{yz} . Оскільки потенціал задовольняє рівняння Пуассона

$$U_{\Delta} = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 2\omega^2,$$

похідна U_{zz} може бути обчислена, якщо відомі обидві інші. Другі похідні потенціалу вимірюються в c^{-2} і одиницях, що називаються Етвешами ($1 \times 10^{-9} c^{-2}$).

9.4. РІВНЯННЯ РІВНОВАГИ В СИСТЕМІ КООРДИНАТ θ, H, Z

Зручно ввести систему координат, яка рухається разом з важелем, це показано на рис. 9.1, б. Формули, що пов'язують стару та нову системи координат:

$$x = \xi \cos \cos \theta - \eta \sin \sin \theta, y = \xi \sin \sin \theta + \eta \cos \cos \theta \quad (9.12)$$

і $z = \zeta$

За результатами підстановки отримуємо:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} U_{\Delta} \left[\sin \sin 2\theta \int (\xi^2 - \eta^2) dm + 2 \right. \\ & \left. \cos \cos 2\theta \int \xi \eta dm \right] + U_{xy} \cdot \\ & \cdot \left[\cos \cos 2\theta \int (\xi^2 - \eta^2) dm - 2 \sin \sin 2\theta \int \xi \eta dm \right] + \\ & + U_{yx} \left[\cos \cos \theta \int \xi \zeta dm - \sin \sin \theta \int \eta \zeta dm \right] - \\ & - U_{xx} \left[\sin \sin \theta \int \xi \zeta dm + \cos \cos \theta \int \eta \zeta dm \right] = \mu(\alpha - \alpha_0). \end{aligned} \quad (9.13)$$

Для спрощення рівняння рівноваги приймемо до уваги наступне. Насамперед, важіль звичайно виготовляється з тонкої легкої трубки з масами на його кінцях, які можуть вважатися елементарними масами. Це означає, що відстань вздовж осі ξ значно більша за розміри мас: $\xi \gg \eta$. Це дозволяє отримати:

$$\int (\xi^2 - \eta^2) dm \approx \int \int (\xi^2 + \eta^2) dm = I, \quad (9.14)$$

де I – момент інерції важеля по відношенню до вертикальної осі. Як і у випадку з гравіметром, момент інерції може визначатися за

допомогою вимірювань періоду вільних коливань за формулою (9.6). Оскільки площина $\xi O \zeta$ – площина симетрії, завжди є дві рівні маси, які розташовані на відстанях η і $-\eta$ по відношенню до цієї площини. Таким чином, інтеграли в рівнянні (9.13), що вміщують першу степінь η , дорівнюють нулю, і в результаті маємо:

$$\frac{1}{2}IU_{\Delta} \sin \sin 2\theta + IU_{xy}\cos 2\theta + U_{yz}\cos \theta \int \xi \zeta dm - U_{xz} \cdot \sin \theta \int \xi \zeta dm = \mu(\alpha - \alpha_0) \quad (9.15)$$

Як відомо, завжди існує поверхня рівня, яка проходить через будь-яку точку простору, включаючи початок координат. Відповідно, U_{Δ} та U_{xy} характеризують кривизну цієї поверхні в точці О. В той же час U_{xz} та U_{yz} описують швидкість зміни поля $g(0) = g_x(0)$ вздовж осей x та y . I та τ – відомі параметри, оскільки їхні значення визначаються в лабораторії так само, як і інтеграл в лівій частині рівняння (9.15). Кут α вимірюється, а α_0 – невідомий. Врешті рещт, азимут важеля θ з достатньою точністю відомий в кожній точці спостережень. В цілому рівняння (9.15) вміщує п'ять невідомих, і для їх знаходження ми маємо провести вимірювання для п'яти значень азимута: $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$. Це дає лінійну систему з п'яти рівнянь з п'ятьма невідомими. Для ілюстрації розглянемо дів системи.

Перший випадок

Припустимо, що важіль підвішений горизонтально і, відповідно, його маси розташовані симетрично по відношенню до площини $\xi O \zeta$ (рис. 9.1, в). Це означає, що інтеграли в рівнянні (9.15) зникають, і ми отримаємо:

$$\frac{1}{2}IU_{\Delta} \sin \sin 2\theta + IU_{xy}\cos 2\theta = \mu(\alpha - \alpha_0). \quad (9.16)$$

Враховуючи, що маси розташовані в одній горизонтальній площині цілком однозначно, що похідні потенціалу у вертикальному напрямку не вимірюються.

Другий випадок

В цьому прикладі ми маємо справу з градієнтметром типу L, представленим на рис. 9.1, г. Припустимо, що маси на кінцях важеля точкові, а маса стрижня, що їх з'єднує суттєво мала. Тоді легко обчислити інтеграл в рівнянні (9.15), тобто:

$$\int \xi \zeta \, dm = lhm,$$

і рівняння рівноваги набуває вигляду:

$$\frac{1}{2}IU_{\Delta} \sin \sin 2\theta + IU_{xy} \cos 2\theta + U_{yz} lhm \cos \theta -$$

$$-U_{xx}\theta = \mu(\alpha - \alpha_0). \quad (9.17)$$

Тут l – відстань між масами, h та ζ – координати однієї з них.

Відзначимо, що, як і в випадку зі статичними гравіметрами, механічна чутливість дорівнює швидкості зміни вимірюваного кута в залежності від параметра (другої похідної).

9.5. ПРИЛАДИ ДЛЯ ВИМІРЮВАННЯ ДРУГИХ ПОХІДНИХ СИЛИ ТЯЖІННЯ

Для вимірювання других похідних потенціалу сили тяжіння використовують гравітаційні варіометри і градієнтометри. Якщо гравітаційними варіометрами можна вимірювати горизонтальні градієнти сили тяжіння W_{xz} , W_{yz} та градієнти кривизни рівневої поверхні W_{xy} , W_{Δ} , то гравітаційним градієнтометром – тільки горизонтальні градієнти сили тяжіння.

9.5.1. Будова гравітаційних варіометрів. Техніка спостережень з варіометрами та градієнтометрами. Визначення їхніх сталей

Згідно з теорією гравітаційного варіометра, його конструкція повинна забезпечувати можливість встановлення крутильної системи в різних азимутах і з достатньою точністю відраховувати кут повороту коромисла навколо вертикальної осі. Варіометри та градієнтометри мають вертикальну вісь, навколо якої обертається прилад. Ця вісь закріплюється до підставки, на якій є нівелірні гвинти та рівні, за допомогою яких вісь встановлюють у вертикальне положення. Для вимірювання кута закручення нитки на коромислі встановлено дзеркало. В середині корпусу варіометра закріплене

нерухомо інше дзеркало. Перед цими дзеркалами знаходиться лінза та джерело світла, яке розміщене від лінзи на відстані, рівній фокусній відстані F . На такій відстані від лінзи знаходиться шкала або фотопластинка, на якій реєструється положення променів, відбитих від дзеркал. Відбитий від дзеркал паралельний пучок падає на шкалу або фотопластинку у вигляді світлових точок. Очевидно, що при повороті дзеркала коромисла світлова точка переміщується на шкалі або фотопластинці. Тоді

$$n - n_0 = 2F(\theta - \theta_0) = D(\theta - \theta_0), \quad (9.18)$$

де: n_0 і n – відліки за шкалою, які відповідають положенню коромисла до і після повороту на кут $(\theta - \theta_0)$,

D – оптичний важіль.

Тривалість спостережень з варіометром залежить від періоду коливань коромисла, який визначається чутливістю приладу. Скоротити тривалість спостереження можна, якщо значно знизити чутливість варіометра, застосувати більш точні методи реєстрації, а також використати в варіометрах не одну, а декілька (дві) крутильні системи.

Будь-який варіометр складається з трьох частин. У верхній частині розміщені крутильні системи, які поміщають у спеціальний корпус на певній висоті від поверхні Землі, а також елементи оптичної схеми (фотокамера). В середній частині розміщені годинниковий механізм і автоматичний пристрій для орієнтування верхньої частини в заданому азимуті. Нижня частина являє собою масивний штатив. Градієнтометри не мають автоматичних пристроїв для переведення з одного азимута в інший, а час спостережень з градієнтометром невеликий, і цю операцію виконує сам спостерігач. Відліки візуально знімають із шкали приладу. Чутливі системи варіометрів і градієнтометрів виготовляють із металу, нитку підвісу з вольфраму або платино-іридієвих сплавів, коромисло з легкого немагнітного металу (латунь, алюміній, дюралюміній), а тягарець зі свинцю або вольфраму. Для захисту від коливання температури чутливу систему поміщають у футляр, який виготовляють із декількох шарів теплоізоляційного матеріалу.

В даний час існує біля 30 моделей гравітаційних варіометрів. Найбільше практичне застосування одержали варіометри ВГ-1, Е-60, БГ-63, градієнтометр ГРБМ-2. Варіометр ВГ-1 (рис. 9.2) є одним

із досконалих приладів, який має фотографічну реєстрацію вимірювань і пристрій для автоматичного перевodu азимута. Прилад має дві крутильні *S*-подібні системи, які повернуті на 180° одна відносно іншої. Час заспокоєння коромисла - 15 хвилин, а похибка вимірювань (2 – 3) Е. Загальний вигляд варіометра ВГ-1 показаний на рис. 9.2. Гравітаційний варіометр Е-60 розроблений в Угорському геофізичному інституті. Цей варіометр, як і ВГ-1, має фотореєстрацію та автоматичне переведення з азимута в азимут. Прилад має дві *L*-подібні крутильні системи. Час заспокоєння коромисла в азимуті – 20 хвилин, похибка вимірювань – (1 – 2) Е. В варіометрі Е-60 передбачена можливість і візуальних спостережень.

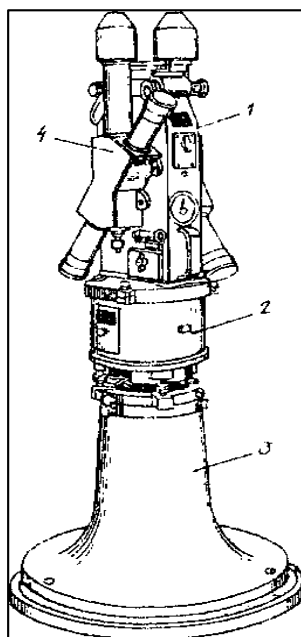


Рис. 9.2. Загальний вигляд варіометра ВГ-1

1- верхня частина, 2 - середня частина, 3 – основа

Варіометр БГ-63 (виробник Угорщина) є комбінованим приладом, який може працювати в режимі або варіометра, або градієнтометра. Чотири крутильних системи розміщені попарно в

двох взаємно перпендикулярних площинах. Спостерігаючи в трьох азимутах положення рівноваги (режим варіометра), або в двох азимутах (режим градієнтометра), одержуємо відповідно градієнти кривизни і горизонтальні градієнти сили тяжіння. Час заспокоєння в азимуті від 4 до 12 хвилин в залежності від режиму роботи, а точність вимірювання градієнтів сили тяжіння біля 3 Е, а градієнтів кривизн – 6 Е.

Гравітаційний градієнтометр ГРБМ-2 – прилад для вимірювання горизонтальних градієнтів сили тяжіння. Цей прилад має чотири чутливі системи Z-подібного типу. Довжина коромисла приблизно в 40 разів менша за відстань між тягарцями по висоті. Час заспокоєння систем в азимуті – 3 хвилини, а похибка вимірювання (5 – 7) Е. Зовнішній вигляд градієнтометра ГРБМ-2 показано на рис. 9.3.

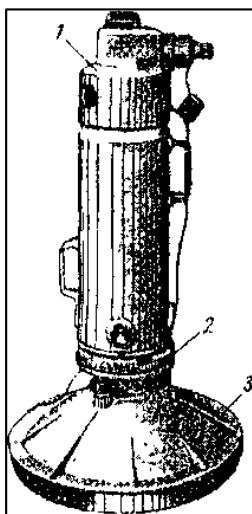


Рис. 9.3. Градієнтометр ГРБМ-2

Процес спостережень із варіометрами в польових умовах проводять у спеціальній захисній будці, яку виготовляють з фанери або брезенту. Для забезпечення стійкості приладу в землю забивають три кілки, на які встановлюють алюмінієвий диск. Висоту кілків вибирають такою, щоб центр ваги коромисла був приблизно на рівні 1 м від землі. Варіометр вносять у будку, скріплюючи всі

його частини. Варіометр нівелюють, орієнтують за допомогою бусолі та контролюють правильність юстування чутливої та оптичної систем. Після підготовки приладу до роботи та встановлення касети з фотопластинкою спостерігач переводить прилад в азимут (попередній нульовому), дезаретує коромисла та вмикає систему освітлення. При цьому на фотопластинці зафіксують тільки відблиски від нерухомих дзеркал. Після того, як верхня частина варіометра буде переведена в нульовий азимут, спостерігач покидає будку.

В польовий журнал записують час запуску приладу, номер пункту, номер пластинки, орієнтування приладу, кількість азимутів у циклі. Після певного часу спостерігач входить у будку, аретує коромисла та записує в журнал час кінця спостережень і його азимут. Виймає із приладу фотопластинку, яку безпосередньо у будці проявляє, щоб впевнитись у якісному запису. У випадку якісного запису прилад розбирають і перевозять на наступний пункт.

При роботі з градієнтметром спостерігач весь час знаходиться біля приладу та виконує візуальні спостереження. Період заспокоєння коромисла градієнтметра значно менший, ніж у варіометра. Все це підвищує продуктивність роботи. Для обчислення других похідних потенціалу сили тяжіння необхідно завчасно визначити сталі варіометрів: ***D, K, h, l, m, τ***. Значення сталих варіометрів достатньо обчислити з точністю 0,25%, оскільки відносна точність вимірювання других похідних не перебільшує 1%.

Оптичний важіль *D* розраховують за формулою

$$D = 2iF, \quad (9.19)$$

де: *F* – фокусна відстань об'єктива,

i - число відбиттів світлового променю від дзеркала коромисла.

Для вимірювання моменту інерції *K* крутильну систему в приладі підвішують на дуже жорстку крутильну нитку з відомим значенням *τ* і вимірюють період коливання системи *T* на цій нитці. За формулою знаходять

$$K = \frac{T^2 \tau}{4\pi^2}, \quad (9.20)$$

Для вимірювання сталої крутильної нитки *τ* до неї підвішують циліндричний тягарець з відомим моментом інерції, який

обчислюють за формулою:

$$K = 0,5mr^2,$$

де: m – маса тягарця,

r – радіус тягарця.

Далі вимірюють за допомогою секундоміра період крутильних майже незатухаючих коливань T цього тягарця і за формулою знаходять τ

$$\tau = \frac{4\pi^2 K}{T^2}. \quad (9.21)$$

Масу тягарця m визначають зважуванням на аналітичних терезах з точністю до 0,01 г. Відстань між центрами тягарців по вертикалі h та довжину плеча коромисла l вимірюють лінійкою. В деяких випадках, коли через конструктивні особливості приладу не можна визначити значення сталих, застосовують метод еталонування на полігоні, в пунктах якого є відомі значення других похідних потенціалу сили тяжіння.

9.5.2. Обробка результатів варіометричних спостережень

Обробка результатів спостережень з варіометром включає:

1. вимірювання запису положень коромисел на фотопластинці;
2. обчислення вимірних значень других похідних потенціалу сили тяжіння;
3. обчислення поправки за вплив рельєфу місцевості на покази гравітаційного варіометра та градієнтометра;
4. обчислення нормальних значень других похідних потенціалу сили тяжіння;
5. обчислення аномальних значень других похідних потенціалу сили тяжіння;
6. графічне зображення результатів спостережень з гравітаційним варіометром і градієнтометром.

За результатами польових спостережень з варіометром для кожного пункту одержують фотопластинку, на якій зафіксовані положення рівноваги коромисел в декількох азимутах і зміни температури всередині приладу. Положення рівноваги вимірюють за допомогою прозорої скляної палетки з півміліметровими

поділками. Одержані з пластинок значення лінійних відстаней використовують у формулах для обчислення других похідних потенціалу сили тяжіння.

Як уже відзначалось раніше, спостереження з варіометрів виконують в п'яти-, чотирьох- і трьох азимутальних циклах. Найбільш розповсюдженим є трьохазимутальний цикл, який дозволяє за короткий час визначити всі чотири других похідних при спільному використанні показів двох коромисел. П'ятиазимутальний цикл застосовують у тих випадках, коли необхідно одержати значення чотирьох других похідних для кожного коромисла окремо. Чотирьохазимутальний цикл застосовують тоді, коли хочуть одержати значення горизонтальних градієнтів сили тяжіння незалежно для кожного з коромисел. Одержимо формули для обчислення других похідних сили тяжіння для випадку, коли спостереження проводять у трьох азимутах: 0° , 120° , 240° . Використаємо співвідношення

$$n - n_0 = D(\theta - \theta_0) \quad (9.22)$$

та введемо позначення

$$\{a = \frac{KD}{\tau}, b = \frac{mhlD}{\tau}\}. \quad (9.23)$$

Тоді рівняння рівноваги представимо у вигляді

$$n - n_0 = a \left(W_{xy} \cos \cos 2\alpha + \frac{1}{2} W_{\Delta} \sin \sin 2\alpha \right) + b (W_{yz} \cos \cos \alpha - W_{xz} \sin \sin \alpha).$$

Для другої крутильної системи, яка повернута на 180° відносно першої, замінюючи a на $a + \pi$, отримаємо:

$$n' - n'_0 = a' \left(W_{xy} \cos \cos 2\alpha + \frac{1}{2} W_{\Delta} \sin \sin 2\alpha \right) + b' (W_{xz} \sin \sin \alpha - W_{yz} \cos \cos \alpha).$$

У двох рівняннях ми маємо шість невідомих: $n_0, n'_0, W_{xy}, W_{\Delta}, W_{xz}, W_{yz}$. Складемо шість рівнянь для обох систем у кожному із трьох азимутів. Тоді одержимо:

$$n_1 - n_0 = aW_{xy} + bW_{yz}, \text{ при } \alpha = 0^\circ \quad n'_1 - n'_0 = a'W_{xy} + b'W_{yz} \text{ при } \alpha = 180^\circ \quad (9.24)$$

$$n_2 - n_0 = -\frac{a\sqrt{3}}{4}W_\Delta - \frac{a}{2}W_{xy} - \frac{b}{2}W_{yz} - \frac{b\sqrt{3}}{2}W_{xz}, \text{ при } \alpha = 120^\circ$$

$$n'_2 - n'_0 = -\frac{a'\sqrt{3}}{4}W_\Delta - \frac{a'}{2}W_{xy} + \frac{b'}{2}W_{yz} + \frac{b'\sqrt{3}}{2}W_{xz} \text{ при } \alpha = 300^\circ$$

$$n_3 - n_0 = \frac{a\sqrt{3}}{4}W_\Delta - \frac{a}{2}W_{xy} + \frac{b\sqrt{3}}{2}W_{xz} - \frac{b}{2}W_{yz}, \text{ при } \alpha = 240^\circ$$

$$n'_3 - n'_0 = \frac{a'\sqrt{3}}{4}W_\Delta - \frac{a'}{2}W_{xy} - \frac{b'\sqrt{3}}{2}W_{xz} + \frac{b'}{2}W_{yz} \text{ при } \alpha = 60^\circ.$$

Звідси

$$n_0 = \frac{1}{3}(n_1 + n_2 + n_3),$$

$$n'_0 = \frac{1}{3}(n'_1 + n'_2 + n'_3).$$

Введемо наступні позначення

$$\{n_i - n_0 = \mu_i, n'_i - n'_0 = \mu'_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (9.25)$$

$$v = \mu_2 - \mu_3,$$

$$v' = \mu'_2 - \mu'_3$$

Шукані чотири невідомих других похідних $W_{xy}, W_\Delta, W_{xz}, W_{yz}$ можна визначити з різних комбінацій рівнянь (9.23 – 9.25). Використовуючи спостереження в азимуті $\alpha = 0^\circ$ одержимо:

$$\square_1 + \mu'_1 = (a + a')W_{xy} + (b - b')W_{yz}, (\square_1 - \mu'_1) = (a - a')W_{xy} + (b + b')W_{yz} \quad (9.26)$$

Із спостережень в азимутах $\alpha=120^\circ$ і $\alpha=240^\circ$ отримаємо:

$$\begin{aligned} \square_2 - \mu_3 &= -\frac{a\sqrt{3}}{2}W_\Delta - b\sqrt{3}W_{xz}, \square'_2 - \mu'_3 = \\ &= -\frac{a'\sqrt{3}}{2}W_\Delta + b'\sqrt{3}W_{xz}. \end{aligned} \quad (9.27)$$

При виготовленні систем варіометрів намагаються їх по можливості роботи ідентичними, щоб коефіцієнти a, a', b і b' були близькими за величиною. Беручи це до уваги, одержимо наближені

формули для обчислення других похідних потенціалу сили тяжіння

$$W_{xy} = \frac{1}{2a}(\mu_1 + \mu'_1), \quad (9.28)$$

$$W_{\Delta} = -\frac{1}{a\sqrt{3}}(v + v'), \quad (9.29)$$

$$W_{xz} = -\frac{1}{2b\sqrt{3}}(v - v'), \quad (9.30)$$

$$W_{yz} = -\frac{1}{2b}(\mu_1 - \mu'_1). \quad (9.31)$$

При геофізичній інтерпретації результатів спостережень найбільший інтерес представляє тільки частина других похідних, яка зв'язана з притяганням внутрішніх аномальних мас. Зміни, зумовлені притяганням рельєфу місцевості та зміною сили тяжіння в нормальному полі, враховують поправками. Поправка за рельєф враховує вплив топографічних мас, розміщених вище та нижче за рівневу поверхню точки спостереження, на другі похідні потенціалу сили тяжіння. Існують три способи врахування впливу рельєфу: аналітичні, графічні й механічні. В аналітичних способах визначають перевищення рельєфу в деяких спеціально вибраних точках навколо спостережного пункту, а потім за формулами враховують поправку за рельєф. У графічних способах використовують карти рельєфу з горизонталями та спеціальні палетки для обчислення поправок за рельєф. У механічних способах застосовують спеціальні пристрої або лічильні механізми.

Поправка за рельєф швидко падає з віддаленням від пункту спостереження. Її ділять на дві частини:

1) поправку за вплив ближнього рельєфу або «ближньої зони» (до 50 – 100 м), яку точніше обчислюють аналітичним способом;

2) поправку за вплив далекого рельєфу («далня зона»), яку визначають у більшості випадків графічним способом. Для врахування впливу ближнього рельєфу навколо пункту спостереження виконують нівелювання в радіусі 50 м з точністю до 1 см.

Поправка за нормальне гравітаційне поле залежить від географічної широти φ району робіт і від напрямку орієнтування осі x приладу відносно меридіана. У випадку, коли орієнтування приладу збігається з напрямом астрономічного меридіана, тоді поправку обчислюють за формулами:

$$U_{\Delta} = 5,12(1 + \cos \cos 2B),$$

$$U_{xz} = -8,11 \sin \sin 2B, \quad (9.32)$$

$$U_{zz} = 0.3086(1 - 0,00142 \sin^2 B).$$

В іншому випадку цю поправку обчислюють за формулами

$$\begin{aligned} U_{xz} &= (U_{xz})_0 \cos \cos A, \\ U_{\Delta} &= (U_{\Delta})_0 \cos \cos A. \end{aligned} \quad (9.33)$$

де: A – азимут орієнтування приладу.

Після введення топографічної поправки та поправки за нормальне поле обчислюють аномальні значення других похідних потенціалу сили тяжіння.

$$(W_{xz})_a = W_{xz} - U_{xz} - (W_{xz})_p, \quad (9.34)$$

$$(W_{yz})_a = W_{yz} - U_{yz} - (W_{yz})_p, \quad (9.35)$$

$$(W_{\Delta})_a = W_{\Delta} - U_{\Delta} - (W_{\Delta})_p, \quad (9.36)$$

$$(W_{xy})_a = W_{xy} - U_{xy} - (W_{xy})_p. \quad (9.37)$$

У цих формулах індексом “ a ” позначені аномальні значення других похідних потенціалу сили тяжіння, а індексом “ p ” поправки за рельєф у відповідні значення других похідних потенціалу сили тяжіння.

Результати варіометричної зйомки графічно подають у вигляді карт векторів горизонтальних градієнтів сили тяжіння і кривизн, карт ізоаномалій сили тяжіння.

Вектори горизонтального градієнта сили тяжіння та кривизни визначають за аномальними значеннями других похідних потенціалу сили тяжіння.

$$G = \frac{\partial G}{\partial s} = \sqrt{[(W_{xz})_a]^2 + [(W_{yz})_a]^2}, \quad (9.38)$$

$$\tan \alpha = \frac{(W_{yz})_a}{(W_{xz})_a}, \quad (9.39)$$

$$R = \sqrt{(2W_{xy})_a^2 + (W_{\Delta})_a^2}, \quad (9.40)$$

$$\tan 2\psi_0 = -\frac{(2W_{xy})_a}{(W_{\Delta})_a}. \quad (9.41)$$

На картографічній основі в кожному пункті, де виконані спостереження з варіометром або градієнтметром, будують в певному масштабі вектор горизонтального градієнта сили тяжіння G , зберігаючи при цьому орієнтування та знак (рис. 9.4). Початок

вектору суміщають із пунктом спостереження.

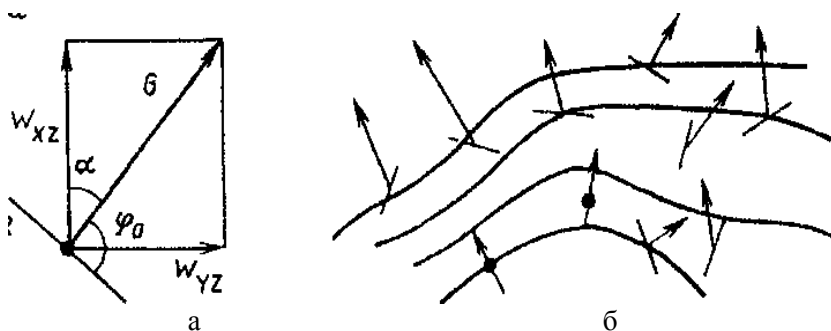


Рис. 9.4. Представлення результатів варіометричної зйомки

- а) зображення вектору горизонтального градієнта і кривизни,
- б) карта ізоаномалій з векторами градієнта і кривини.

Карту векторів кривизн K будують так само, як і карту векторів G , але в цьому випадку пункт спостереження знаходиться всередині вектору K .

При необхідності будують карти ізоаномалій. Для цього приріст обчислюють за відомими формулами чисельного інтегрування, наприклад за формулами трапецій:

$$\Delta g = \frac{(w_{xz})_1 + (w_{xz})_2}{2} \Delta x, \quad (9.42)$$

або

$$\Delta g = (w_{xz})_m \Delta x + (w_{yz})_m \Delta y + (w_{zz})_m \Delta z, \quad (9.43)$$

де: індекс m означає середнє значення відповідного градієнта сили тяжіння;

$\Delta x, \Delta y$ – різниці планових координат пунктів;

Δz – перевищення.

Вертикальний градієнт сили тяжіння w_{zz} не вимірюють, а при обчисленні використовують нормальний вертикальний градієнт.

9.6. ПРО МОЖЛИВІСТЬ ВИМІРЮВАННЯ ВЕРТИКАЛЬНОГО ГРАДІЄНТА СИЛИ ТЯЖІННЯ

Для вимірювання вертикального градієнта сили тяжіння спеціальної апаратури поки що не розроблено. Це насамперед пов'язано з тим, що числове значення цієї другої похідної складає біля 3000 Е, а це вимагає більш високої відносної точності вимірювань. Так, в даний час проводяться дослідження щодо створення приладу для вимірювання вертикального градієнта сили тяжіння, і спроби абсолютних вимірювань W_{zz} за спостереженнями сили тяжіння у двох пунктах, рознесених по вертикалі, використовуючи високоточні гравіметри. Раніше (Хаммер, США, 1938 р.) проводили такі досліди за вимірюванням W_{zz} на висотних будинках з різницею висот від 138 до 291 м. Балавадзе з гравіметром Норгарда на 19 геодезичних пунктах Грузії (різниця висот ΔH від 14 до 45 м) визначив з похибкою (5–45) Е значення W_{zz} . В Канаді для цього був використаний гравіметр Уорден із спеціальною триногою, яка дозволяла встановити прилад на різних висотах. Точність вимірювання склала 10 Е. В Німеччині була сконструйована спеціальна вишка висотою 5 м з п'ятьма площадками, на які можна встановити гравіметр Асканія. Похибка цих визначень – 12 Е. Аналогічні дослідження виконували в США з використанням гравіметра Лакоста-Ромберга. Проблема абсолютних визначень вертикального градієнта сили тяжіння в польових умовах буде розв'язана, якщо використовувати сучасні гравіметри, які на малій базі (1–2 м) дають похибку 1–2 мікрогали.

А це означає, що знаючи розподіл вертикального градієнта сили тяжіння W_{zz} на земній поверхні, можна більш точно редукувати прискорення сили тяжіння, визначати форму рівневої поверхні. Крім того, вертикальний градієнт необхідно знати для обробки аерогравіметричних спостережень, а аномалії вертикального градієнта більш чітко зв'язані з параметрами аномальних тіл, ніж аномалії сили тяжіння. Вимірювання вертикального градієнта сили тяжіння з достатньою точністю (1–2) Е можна в перспективі широко використовувати в геодезії, гравіметричній розвідці на суші та на морі, а також у навігації.

10. ВИМІРЮВАННЯ ПРИСКОРЕННЯ СИЛИ ТЯЖІННЯ НА МОРІ І В ПОВІТРІ

Для детального вивчення розподілу сили тяжіння на Землі необхідно знати гравітаційне поле на морях і океанах, які займають понад 70% поверхні земної кулі [98]. Застосування наземних способів вимірювання сили тяжіння для моря практично не можливе. На кораблі прилад для вимірювання сили тяжіння є рухомим внаслідок хвилювання моря, течії, дії вітру. Тому дія цих збурюючих прискорень може в багато разів перебільшувати вимірювані приросту сили тяжіння. Ці збурюючі прискорення складаються із дійсної сили тяжіння та для даного моменту утворюють миттєву силу тяжіння

$$G = \sqrt{\left(g + \frac{d^2z}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}, \quad (10.1)$$

де:

$\frac{d^2z}{dt^2}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}$ - горизонтальні та вертикальна складові прискорення інерції.

Напрямок миттєвої сили тяжіння називається миттєвою вертикаллю. Він не збігається з істинною вертикаллю, напрям якої визначається незбуреним значенням сили тяжіння. Кожен гравіметричний прилад вимірює приріст сили тяжіння вздовж певного напрямку – осі чутливості приладу.

Для маятників вісь чутливості збігається з миттєвою вертикаллю, а для гравіметрів вона чітко пов'язана з рамкою приладу. Цей напрям осі чутливості змінюється під дією не тільки збурюючих прискорень, але й нахилів судна, обумовлених дією хвиль. Амплітуда збурюючих прискорень досягає 10 – 20 % від величини прискорення сили тяжіння і в $10^4 - 10^5$ разів перебільшує зміну сили тяжіння за маршрутом.

Додаткові збурюючі прискорення виникають внаслідок вібрації двигунів і механізмів судна тощо. У зв'язку з цим для вимірювання на морі потрібно мати прилади, які реєстрували б корисний сигнал (реальну зміну сили тяжіння) і спеціальну методику вимірювань, а також необхідно автоматизувати процес вимірювань і їх обробку.

У відкритому морі визначити координати судна та глибини моря

з необхідною точністю є важким завданням. Виникає потреба використання різних методів і технічних засобів для визначення положення судна. Крім цього, при тривалому плаванні виникають похибки нелінійності зміщення нуля-пункту, а це вимагає великих вимог щодо точності еталонування морських гравіметрів. Прилад для вимірювання сили тяжіння в русі повинен бути таким, щоб збурюючі прискорення майже не впливали на чутливу систему чи були зменшеними до малих значень, якими можна було б знехтувати, або вводити поправки за їхні впливи у спостереженні значення сили тяжіння.

Нехай носій апаратури рухається в горизонтальному напрямку (див. рис. 10.1). Миттєве значення сили тяжіння оцінюється за формулою:

$$g_i = \sqrt{g^2 + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2} = g \left[1 + \frac{1}{g^2} \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 \right]^{1/2} = g + \frac{1}{2g} \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2, \quad (10.2)$$

Виміряне значення сили тяжіння отримаємо за допомогою біноміального розкладання, нехтуючи малими високими порядків:

$$\begin{aligned} g_r &= g_n \cos \Delta\alpha = \left[g + \frac{1}{2g} \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 \right] \left(1 - \frac{\Delta\alpha^2}{2} \right) \approx \\ &\approx g + \frac{1}{2g} \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 - g \frac{\Delta\alpha^2}{2}. \end{aligned} \quad (10.3)$$

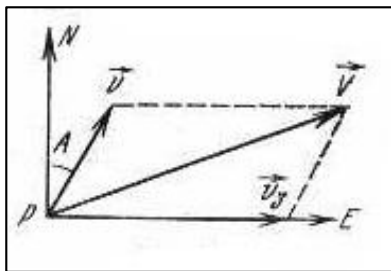


Рис. 10.1 До визначення поправки Етвеша

Звідси випливає, що горизонтальне прискорення збільшує виміряне значення сили тяжіння, а нахил осі чутливості щодо

миттєвого вертикала зменшує її, незважаючи на те, що середні значення d^2x/dt^2 та $\Delta\alpha$ за великий проміжок часу близькі до нуля. Щоб отримати істинне значення сили тяжіння необхідно в виміряне значення внести поправку:

$$\Delta g_{x,\alpha} = -\frac{1}{2g} \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right)^2 + g \frac{\Delta\alpha^2}{2} \quad (10.4)$$

Повна поправка за вплив горизонтальних прискорень і нахил основи дорівнює сумі складових по осям координат:

$$\Delta g = -\frac{1}{2g} \left[\left(\frac{d^2x}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} g (\Delta\alpha^2 + \Delta\beta^2) \quad (10.5)$$

Перший доданок – поправка за вплив горизонтальних прискорень – називається поправкою Броуна. Б. Броун перший вказав на необхідність враховувати спотворення, що зумовлені горизонтальними прискореннями.

Для зменшення впливу горизонтальних прискорень прилад встановлюють в карданів підвіс.

У разі спільного впливу горизонтальних і вертикальних збурюючих прискорень миттєве значення сили тяжіння g_n з точністю до малих другого порядку дорівнює:

$$g_n = g + \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{1}{2g} \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right)^2 + \frac{1}{2g} \left(\frac{d^2y}{dt^2} \right)^2 \quad (10.6)$$

Вертикальне прискорення викликає знакозмінні збурення. Гравіметр реєструє осереднене значення сили тяжіння на проміжок часу T :

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left(g + \frac{d^2z}{dt^2} \right) dt = g + \frac{1}{T} \left. \frac{dz}{dt} \right|_0^T \quad (10.7)$$

У виміряну величину необхідно внести поправку:

$$\delta g = \frac{1}{T} \left(\left. \frac{dz}{dt} \right|_T - \left. \frac{dz}{dt} \right|_0 \right) \quad (10.8)$$

де в дужках різниця швидкостей вертикальних переміщень.

При зростанні інтервалу осереднення вплив вертикальних прискорень на результати вимірювань зменшується.

10.1. ЕФЕКТ ЕТВЕША

Нехай носій гравіметричної апаратури рухається на широті φ з постійною швидкістю v за азимутом A . Позірна зміна швидкості сили тяжіння, що обумовлена рухом реєстратора відносно Землі називається ефектом Етвеша. Під час зйомки в русі

$$V^2 = v^2 - 2vv_3 \cos \cos(90 - A) + v_3^2 \quad (10.9)$$

На чутливий елемент діє сила:

$$\frac{V^2}{a} = \frac{v^2}{a} + 2 \frac{vv_3}{a} \sin \sin A + v_3^2 \quad (10.10)$$

Оскільки $v_3 = a \omega \cos \varphi$, то поправка Етвеша дорівнює

$$\delta g_{\dot{\gamma}} = 2\omega v \cos \varphi \sin A + \frac{v^2}{a} \quad (10.11)$$

Перший доданок враховує вертикальну складову сили Коріоліса, другий – відцентрову частина ефекту Етвеша. Підставимо числові значення ω і a :

$$\delta g_{\dot{\gamma}} = 4.05v \cos \varphi \sin A + 0.0012v^2 \quad (10.12)$$

При русі по екватору зі швидкістю 20 км/год $\delta g_{\dot{\gamma}} = \pm 81.74$ мГал. У першому наближенні поправка Етвеша залежить від широтної складової швидкості носія. При швидкості носія до 30 км/год обмежуються першою складовою.

Вимірювання сили тяжіння на рухомому носії дозволяють проводити реєстрацію g безперервно, або з інтервалом 1 – 10 с. На чутливу систему впливають збурюючі прискорення різних частот і амплітуд:

$$a = a(t)$$

Виміряне значення буде сумою сили тяжіння і збурюючих прискорень, у тому числі від інерційних прискорень обумовлених рухом носія. Величина збурюючих прискорень залежить від виду та конструкції носія (автомобіль, гелікоптер, надводне судно,

підводний човен, супутник тощо), зовнішніх умов (стану моря, вітру, турбулентності), від керування носієм, місця встановлення гравіметра на носії. Вертикальна компонента збурюючих прискорень безпосередньо підсумовується з g , горизонтальні компоненти здійснюють менший вплив, величина якого залежить від орієнтації вимірювального пристрою відносно напрямку g .

При вимірюваннях в русі велика увага приділяється визначенню координат точки спостереження.

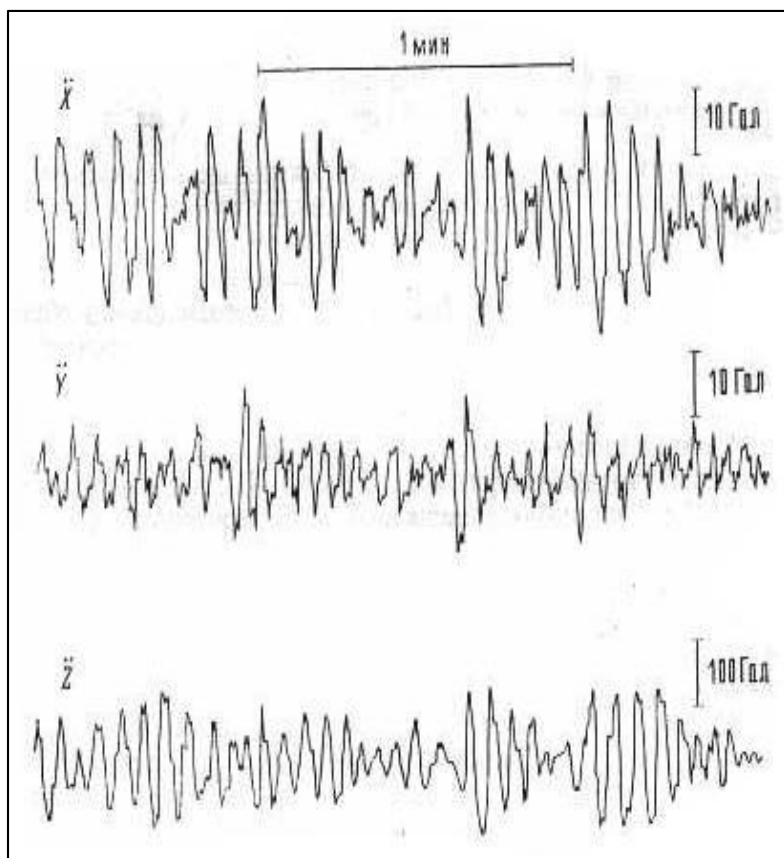


Рис. 10.2. Запис горизонтальних і вертикальних збурюючих прискорень

Досягнення високої точності вимірювання g в русі досягається:

- вдосконаленням апаратури;
- поліпшенням способів стабілізації приладів;
- вимірюванням і подавленням збурюючих прискорень;
- поліпшенням систем місця розташування, швидкості і курсу

носія;

- вдосконаленням навігаційних систем.

Вплив короткоперіодичних прискорень подавляється за допомогою низькочастотної фільтрації. У цьому випадку вихідний сигнал отримують як згортку:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)g(t-\tau)d\tau, \quad (10.13)$$

де τ – часовий зсув, $h(\tau)$ – вагова функція. Вид $h(\tau)$ підбирається в залежності від характеру збурюючих прискорень, які необхідно виключити.

В даний час широко застосовується цифрова фільтрація. Найпростіший вид фільтрації - осереднення в межах деякого відрізка:

$$g = \frac{1}{\Delta t} \int_t^t (g(t) + a(t))dt. \quad (10.14)$$

Величину g можна виділити з спостереженого сигналу за допомогою фільтрації якщо частотний діапазон перешкод відрізняється від частотного діапазону корисного сигналу або є додаткова інформація, що дозволяє врахувати збурюючі прискорення. Вплив перешкод на результати вимірювань можна зменшити в $10^3 - 10^5$ разів демпфуванням рідиною та магнітним полем. Демпфування призводить до згладжування вимірюного сигналу. Вихідну форму g можна відновити процедурою зворотної фільтрації.

Для вимірювання сили тяжіння на морі у наш час застосовують, головним чином, морські гравіметри та, в меншій мірі, виконують вимірювання маятниковими приладами за способом Венінга-Мейнеса. Результати вимірювань із маятниковим приладом використовують як опорні при вимірюванні з морськими гравіметрами.

У початковий період розвитку морської гравіметрії прилади

встановлювали в простих підвісах Кардана. Пізніше почали застосовувати гіроскопічні стабілізовані установки. Підвіс Кардана – маятник, який може коливатись відносно двох взаємно перпендикулярних горизонтальних осей. Як і будь-який маятник, він буде намагатися встановитися за напрямом миттєвої вертикалі. Гіроскопічна стабілізована установка має властивості підвісу Кардана з дуже великою зведеною довжиною. Вона зберігає орієнтування в просторі, і вісь приладу буде зберігати сталий напрям стосовно напрямку сили тяжіння.

10.2. ВИМІРЮВАННЯ СИЛИ ТЯЖІННЯ НА МОРІ МЕТОДОМ ВЕНІНГА – МЕЙНЕСА

На рух маятника, крім прискорення сили тяжіння та вертикальних збурюючих прискорень, сильно впливають горизонтальні прискорення. Для цього голландський геофізик Венінг-Мейнес запропонував спосіб виключення впливу горизонтальних прискорень на маятники.

У способі Венінга-Мейнеса замість вимірювання періоду коливання одного маятника вимірюють період фіктивного маятника, який являє собою різницю кутових відхилень двох ідентичних маятників, які коливаються в одній площині і на які впливають одні і ті ж горизонтальні прискорення. Рівняння, яке описує рух незбуреного впливом горизонтальних прискорень маятника, має вигляд:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + n^2\varphi = 0, \quad (10.15)$$

де:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad - \text{період коливань,}$$

$$l = \frac{g}{n^2} \quad - \text{зведена довжина,}$$

φ -кут відхилення від вертикалі.

Отже, маючи два строго ізохронні маятники, можна виключити вплив горизонтальних прискорень. Але метод Венінга-Мейнеса дає можливість виключити дію горизонтальних прискорень тільки в першому наближенні. Для того, щоб одержати істинну силу

тяжіння, необхідно до вимірюного значення додати поправки за дію горизонтальних і вертикальної збурюючих прискорень. Ця повна поправка називається поправкою Броуна, вона була розглянута в попередньому підрозділі

$$\Delta g_{xyz} = -\frac{1}{2g} \left[\left(\frac{d^2x}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2} \right)^2 + \frac{1}{4g} \left(\frac{d^2z}{dt^2} \right)^2 \right], \quad (10.16)$$

де $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ - середні значення квадратів збурюючих прискорень за час спостереження.

Крім горизонтальних і вертикальних збурюючих прискорень, на період коливання маятника впливає нахил підставки, на якій здійснює коливання маятник. Цей вплив враховують поправкою за нахил.

$$\Delta g_k = \frac{1}{4} \beta_{ok}^2 g \left(1 - 2 \frac{\omega_k^2}{\omega_0^2} \right), \quad (10.17)$$

де:

β_{ok} - амплітуда коливання підвісу Кардана,

ω_k - частота підвісу Кардана,

ω_0 - частота коливання маятника.

Перші маятникові спостереження виконав норвезький дослідник Ф. Нансен під час дрейфу в арктичних льодах (1893 – 1896 р.). У 1924 р. Венінг-Мейнес провів вимірювання на підводному човні з трьохмаятниковим приладом. Точність вимірювання сили тяжіння приладом Венінга-Мейнеса склала 3 – 5 мГал.

Систематичні спостереження з маятниками на надводних суднах розпочалися в 30-х роках XX століття. З 1954 року такі спостереження були проведені на Світовому океані. У даний час розроблено багато типів сучасних маятникових приладів у різних країнах, їх застосовують, головним чином, на надводних суднах для спостережень в портах, а також в дрейфі при слабкому хвилюванні моря. Такі спостереження служать для контролю нуля-пункту морських гравіметрів і для уточнення масштабних коефіцієнтів гравіметрів.

10.3. СТАТИЧНИЙ СПОСІБ ВИМІРЮВАННЯ ПРИСКОРЕННЯ СИЛИ ТЯЖІННЯ НА МОРІ

Статичні гравіметри для вимірювання сили тяжіння на морі знайшли застосування набагато пізніше, ніж маятникові прилади.

Зараз у морських гравіметрах для зменшення впливу вертикальної складової прискорення руху корабля застосовують сильне демпфування (рідинне, повітряне, магнітне), під яким розуміють механічний фільтр, який не реагує на прискорення високої частоти, а фіксує тільки зміни прискорення низьких частот, тобто зміни прискорення сили тяжіння.

Морські гравіметри мають добре виражену вісь чутливості, що є однією із переваг цього гравіметра перед маятниковим приладом. Для морських вимірювань використовують гравіметри обертового типу, у яких маятник перебуває в горизонтальному положенні. Через це горизонтальна складова прискорення судна на покази гравіметра впливає слабо. Але на практиці при морських вимірюваннях гравіметр вміщують у карданний підвіс або встановлюють на гіроскопічно стабілізовану платформу. При установці на гіроплатформі гравіметр стабілізується відносно істинної вертикалі. Але навіть найдосконаліші гіроплатформи мають деякі похибки стабілізації, а тому маятник гравіметра відхиляється від горизонтального положення під дією сили тяжіння і збурюючих прискорень. Через те при використанні реальних стабілізованих установок вводять відповідні поправки. Для реєстрації горизонтальних прискорень використовують горизонтальні акселерометри, а для реєстрації нахилів - довгоперіодичні нахиломірні маятники з періодом більшим за 100 с. Для зменшення поправки, пов'язаної з кутом відхилення маятника гравіметра від вихідного горизонтального положення, використовують пристрої оберненого зв'язку.

10.4. ГРАВІМЕТРИЧНА ЗЙОМКА НА МОРІ

Вимірювання сили тяжіння на морі в основному проводять на підводних і надводних суднах з допомогою гравіметрів і маятникових приладів. Детальна гравіметрична зйомка прибережної смуги виконується донними гравіметрами із судна.

Гравіметрична зйомка морських акваторій виконуються в декілька етапів. На підготовчому етапі визначаються параметри приладів, які характеризують їх динамічні властивості, а також визначають ціну поділки вимірювального мікрогвинта та виконують калібровку реєструючого пристрою. На другому етапі здійснюють опорні спостереження. Значення прискорення сили тяжіння на опорному пункті повинно бути відомим, або його визначають біля місця стоянки судна відносно опорної гравіметричної мережі суші. Основним завданням опорних спостережень є визначення з підвищеною точністю опорного відліку приладу, відносно якого в рейсі обчислюють приріст сили тяжіння. Третій етап – безпосередньо гравіметричні зйомки морських акваторій, які виконують переважно на надводних науково-дослідних суднах водотоннажністю від 100 до 17000 тон в комплексі з іншими передбаченими морськими геофізичними дослідженнями. Для дослідження шельфу, рифтових областей, перехідних зон від материка до океану виконують за допомогою донних гравіметрів детальну гравіметричну зйомку. Вимірювання на підводних човнах майже не здійснюють, оскільки визначити з необхідною точністю його координати та швидкість є важкою задачею.

Вимірювання на мілководді проводять за допомогою штативів. Для таких вимірів виготовляються гравіметри з загашеними чутливими системами, для усунення перешкод, що викликані рухом хвиль і вітром. У цьому випадку методика вимірювань принципово не відрізняється від наземної. Зйомку починають зі створення мережі опорних пунктів на всю площу зйомки. Опорні пункти закріплюють віхами або буями. Потім виконуються виміри на рядовий мережі. Планові координати визначаються за допомогою радіо геодезичної системи або GPS.

Гравіметричні вимірювання на глибинах у декілька десятків

метрів проводяться з донними гравіметрами. В донному гравіметрі є пристрій, що забезпечують управління з борту судна по кабелю і реєстрацію результатів вимірювань. Методи донної гравіметрії забезпечують високу точність вимірювань, але їх продуктивність дуже мала.

Площинні вимірювання виконуються на прямолінійних галсах зі сталою швидкістю. Якщо судно змінює курс, то спостереження відновлюють через 10 – 30 хвилин після початку прямолінійного галсу, тобто після перехідних процесів у вимірювальній апаратурі.

Гравіметрична зйомка площі на морі виконується паралельними галсами (профілями), відстань між якими залежить від масштабу гравіметричної карти і від складності гравітаційного поля даного району (рис 10.3).

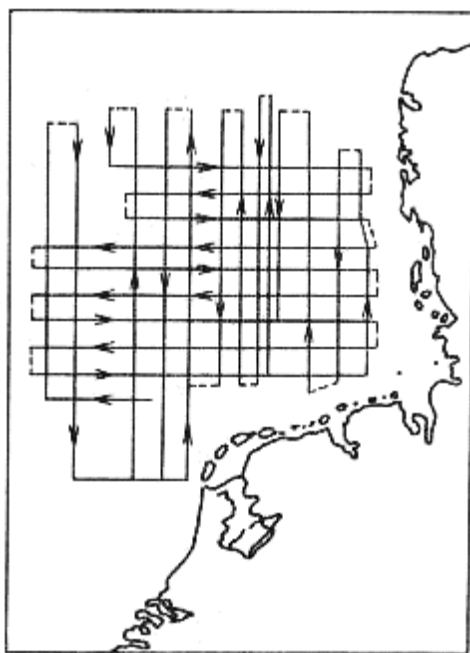


Рис. 10.3. Схема галсів при площинній морській гравіметричній зйомці

Для контролю зйомки виконують повторні спостереження на перпендикулярних галсах або галсах перетину. Точки перетину використовують для врівноважування даних зйомка, що дає можливість виключити частину систематичних похибок вимірів. При детальних зйомках шельфу вимірювання виконують також паралельними галсами (профілями). Від відстані між галсами залежатимуть точність і масштаб зйомки.

Для визначення зміщення нуля-пункту і для контролю ціни поділки гравіметрів в плаванні використовують морський маятниковий прилад. Щоб обчислити поправку Етвеша реєструють координати, а також курс і швидкість судна і додатково вимірюють глибину дна для обчислення аномалій сили тяжіння. В залежності від району плавання визначення координат судна виконують різними засобами і з різною точністю. При зйомках прибережної зони високої точності визначення координат 2 – 50 м можна досягти, використовуючи пряму або обернену кутову засічки. При віддаленні від берега на сотні кілометрів використовують радіогеодезичні і радіонавігаційні системи. Для визначення координат у відкритому океані найбільш широко застосовуються супутникові навігаційні системи. Курс корабля визначають за допомогою гірокомпаса, а швидкість - із даних вимірювань за доплеровським лагом. Глибину моря вимірюють ехолотом.

Морські гравіметричні роботи в сучасності забезпечують точність визначення прискорення сили тяжіння приблизно 0,5 *мГал*. Цю похибку можна зменшити в декілька разів, якщо проводити багаторазові вимірювання. Є певні резерви подальшого підвищення точності вимірювань (підвищення точності гіроскопічної стабілізації, (стабільності нуля-пункту гравіметрів та інше), та точності навігаційного забезпечення (точність визначення координат, курсу і швидкості судна, глибин моря).

Четвертий етап – заключні опорні спостереження. За результатами цих спостережень визначають нев'язку, яка обумовлена похибкою врахування зміщення нуля-пункту гравіметра.

На п'ятому етапі в лабораторних умовах проводять повторні дослідження апаратури з метою контролю стабільності їх параметрів.

10.5. ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ З МОРСЬКИМИ ГРАВІМЕТРАМИ

Важливим етапом при проведенні морських гравіметричних робіт, кількість яких з кожним роком збільшується, є автоматизація обробки вимірювань. Програмою обробки цих вимірів передбачається обчислення відділків гравіметрів, введення поправок, обчислення сили тяжіння і координат пунктів, обчислення аномалій сили тяжіння і оцінка точності вимірювань. Завершальним етапом є складання каталогу гравіметричних пунктів.

Безпосередньо обробку результатів вимірювань виконують на судні з допомогою комп'ютера. Прискорення сили тяжіння морського пункту обчислюють за результатами вимірювань кожного гравіметра, використовуючи формули:

$$g = g_0 + \Delta g, \quad (10.18)$$

$$\Delta g = k(S - S_0) + \sum \Delta g, \quad (10.19)$$

де

g_0 – сила тяжіння в опорному пункті,

Δg – приріст сили тяжіння,

k – ціна поділки гравіметра.

S – поточний відлік, згладжений фільтром частот гравіметра,

S_0 – відлік на опорному пункті,

$\sum \Delta g$ – сума поправок за вплив збурюючих прискорень і нахилів, за ефект Етвеша, за інерційність і за зміщення нуля-пункту.

Поправку за вплив збурюючих прискорень і нахилів обчислюють за формулою (10.5), а поправку Етвеша за формулою (10.11). Поправка за зміщення нуля-пункту обчислюється за лінійним законом

$$\Delta g_{\text{з.н.}} = a + c(t - t_0), \quad (10.20)$$

де:

a і c – сталі величини, які визначають на опорних пунктах,

t_0 – момент спостереження в опорному пункті.

Координати пункту і глибину одержують лінійним інтерполюванням між моментами визначення координат і глибин на відповідний момент видачі показів гравіметра. Аномалії сили

тяжіння обчислюють за формулами

$$\Delta g = g - \gamma_0, \quad (10.21)$$

$$\Delta g_B = \Delta g + 2\pi f(\delta - \delta_B)h, \quad (10.22)$$

де

Δg – «змішана» аномалія сили тяжіння на поверхні моря,

Δg_B – аномалія Буге на поверхні моря,

γ_0 – нормальне значення сили тяжіння,

f – гравітаційна стала,

δ – середня густина земної кори,

δ_B – густина морської води,

h – глибина моря.

Далі складають каталог гравіметричних пунктів, який заносять на довготривалий електронний носій, у якому приводяться дані про кожен пункт і про галси вимірювань

10.6. ВИМІРЮВАННЯ СИЛИ ТЯЖІННЯ В ПОВІТРІ

Виміряти прискорення сили тяжіння на борту літака ще складніше, ніж на морі. Це пов'язано з великою швидкістю літака і нерегулярними змінами його висоти. Суттєвим є те, що при аерогравіметричних вимірюваннях наявними будуть довгоперіодичні вертикальні прискорення, частота яких є близькою до частоти зміни сили тяжіння. Їх не можна відфільтрувати способами, які використовують при вимірюваннях на морі, а для їх виключення необхідно знати вертикальну швидкість літака. Оскільки горизонтальна швидкість літака складає сотні кілометрів за годину, то при вимірюваннях обмежений (декілька хвилин) час фільтрації корисного сигналу.

Великі швидкості літака ставлять більш жорсткі вимоги до точності визначення поправки Етвеша. При обчисленні цієї поправки необхідно користуватись формулою з урахуванням стиснення Землі

$$\Delta g_E = 2\omega v_E \cos \cos B + \frac{1 + e^2}{a} v^2 - \frac{e^2}{a} \left(v_F \cos \cos B + \frac{3}{2} v^2 \sin^2 B \right), \quad (10.23)$$

де:

a і e – велика напіввісь і ексцентриситет еліпсоїда,
 v – швидкість літака
 V_E – східна складова швидкості,
 ω – кутова швидкість обертання Землі,
 B – геодезична широта.

Точність цієї формули 0,3 мГал при швидкості 1000 км/ год.

Перші визначення сили тяжіння на літаку були виконані в СРСР і США в 1959-1960 роках. З використанням морських сильнодемпфованих гравіметрів у колишньому СРСР для виконання аерогравіметричної зйомки був створений у 1969 році (А.М. Лозинська) комплект апаратури на базі струнних датчиків, який включав аерогравіметр, горизонтальні акселерометри, вимірювач вертикальної швидкості, барометричний висотомір. У 1970 році в США на базі морського гравіметра ЛаКоста-Ромберг розроблена апаратура для вимірювання сили тяжіння на літаках і гелікоптерах. Крім того при аерогравіметричних зйомках знайшли використання струнні гравіметри з демпфуванням.

Всі аерогравіметричні вимірювання спираються на наземні покази гравіметра в аеропорту при стоянці літака до початку та після закінчення рейсу. Вимірювання в польоті починають після набору висоти, виходу на прямолінійний маршрут і переходу на автоматичне управління літаком за допомогою автопілоту. При аерогравіметричних вимірах безперервно реєструють траєкторію польоту літака. Висоту польоту при вимірюваннях над рівнинною місцевістю визначають топографічним радіовисотоміром з точністю до 1 м, а при вимірах над горами застосовують барометричний метод з фотографуванням опорних наземних пунктів. Вимоги до відносної точності визначення планових координат задаються поправкою Етвеша. Обробка аерогравіметричних спостережень принципово не відрізняється від обробки гравіметричних спостережень на морі. Аномалії сили тяжіння обчислюють за формулами

$$\Delta g = g - \gamma_0 + 0.3086(H' + h) \quad (10.24)$$

$$\Delta g_B = \Delta g + 0.0418\delta H', \quad (10.25)$$

де: Δg – «змішана» аномалія сили тяжіння в вільному повітрі,

γ_0 – нормальне значення сили тяжіння в мГал,

Δg_B – аномалія Буге,

H^v – нормальна висота в метрах,

h – висота літака над земною поверхнею в м.

Експериментальні дослідження з комплектом сучасної апаратури показали, що аерогравіметрична зйомка може бути проведена з точністю до 10 – 15 мГал, що є достатнім для геодезичних цілей. Вона може бути ефективною для вивчення гірських районів і полярних областей в гравіметричному відношенні та для регіональних досліджень Світового океану.

Застосування результатів аерогравіметричної зйомки для розв'язку задач розвідувальної гравіметрії вимагає істотного підвищення точності зйомки, що пов'язано з удосконаленням способів визначення траєкторії, вертикальної і горизонтальної швидкості, висоти і курсу літака.

КНИГА 3. ЗАСТОСУВАННЯ ГРАВІМЕТРІЇ

11. ЗАГАЛЬНІ СФЕРИ ЗАСТОСУВАННЯ ГРАВІМЕТРІЇ

Гравіметрія як наука тісно пов'язана з математикою, фізикою, геодезією, астрономією і, звичайно, геологією (рис. 11.1).

При розв'язку задач гравіметрії застосовуються сучасні математичні методи (рівняння математичної фізики, статистичні методи, теорія функції комплексної змінної тощо).

Гравіметричні методи використовуються на денній поверхні, під час морських досліджень, у повітрі (аерогравіметричні роботи), а також у свердловинах і підземних гірничих виробках.

Результати гравіметричних досліджень широко використовуються в геодезії для уточнення форми Землі – визначення форми геоїда, для визначення гравітаційних полів Місяця і інших планет, для розв'язку балістичних задач, врахування неоднорідності гравітаційного поля в результатах геодезичних вимірів, для врахування впливу варіацій гравітаційного поля на результати повторних геодезичних вимірів, для визначення аномалій висот та ухилень схилу за гравіметричними тощо.

Тісний зв'язок гравіметрії з геодезією видно з таких прикладів.

1. За допомогою гравіметрії вирішується основне наукове завдання найвищої геодезії: *вивчення фігури та гравітаційного поля Землі*. Як відомо, ця задача може бути вирішена декількома методами, але жоден з них не може обійтися без залучення гравіметричних даних, тоді як фізичний (або гравіметричний) метод вивчення фігури Землі заснований на застосуванні лише гравіметричних даних.

2. Гравіметричні дані використовуються у загальному комплексі астрономо-геодезичних вимірів та їх математичної обробки при вирішенні задачі редукування. З огляду на приклад зупинимося у ньому докладніше.

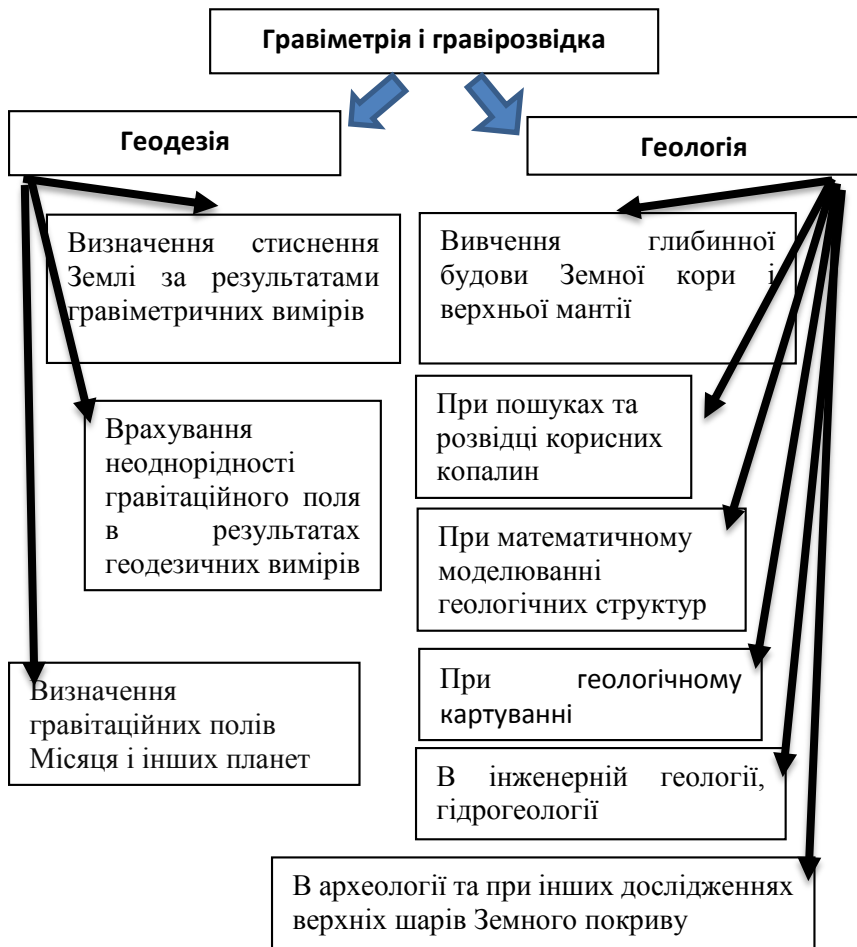


Рис. 11.1 Схема сфер застосування гравіметрії

Як відомо [102, 104], геодезичні виміри виконуються на реальній поверхні Землі та у реальному гравітаційному полі. При цьому напрямки вертикальних осей геодезичних інструментів збігаються з напрямками вертикальних ліній (відноситься до напрямків сили тяжіння в точках стояння геодезичних інструментів), що залежать від стану гравітаційного поля. В силу того, що реальне гравітаційне

поле Землі неоднорідне через сфероїдальну форму Землі та нерівномірний розподіл її внутрішніх та зовнішніх мас, напрямки вертикальних ліній у різних точках земної поверхні будуть не паралельні між собою. Отже, вертикальні осі геодезичних інструментів у різних точках земної поверхні будуть також не паралельні між собою (рис. 11.2).

Крім того, поверхня реальної Землі є математично складною, на якій виявляється практично неможливим вирішити геометричні задачі щодо визначення координат пунктів, що виникають при обробці геодезичних мереж. Щоб виконати математичну обробку первинного набору результатів геодезичних вимірів та отримати координати, результати геодезичних вимірів переносяться (редукуються) з математично складної поверхні Землі на модель Землі – еліпсоїд. Для цієї моделі існують формули сфероїдальної геодезії, що дозволяють вирішувати необхідні геометричні задачі. При редукуванні від напрямків вертикальних ліній (g) переходять до напрямків нормалей (n) до еліпсоїда. Редукування виконують за математичними формулами та вводять поправку за кут між напрямком вертикальної лінії та напрямком нормалі до еліпсоїда, який називається астрономо-геодезичним ухиленням схилу. Для визначення цього кута, крім астрономічних і геодезичних координат, потрібно обов'язково використовувати гравіметричні дані.

3. Результати гравіметричних вимірювань використовуються при обробці даних геометричного нівелювання для переходу до системи нормальних висот, що відраховуються від поверхні квазігеоїду, яка широко застосовується у повсякденній практиці при позначенні висот точок земної поверхні. Так для визначення нормальної висоти у перевищення, отримані з геометричного нівелювання, необхідно ввести поправку за перехід до різниць нормальних висот, які не можуть бути знайдені без гравіметричних даних. Таким чином, під час створення опорних геодезичних мереж ми не можемо обійтися без гравіметрії.

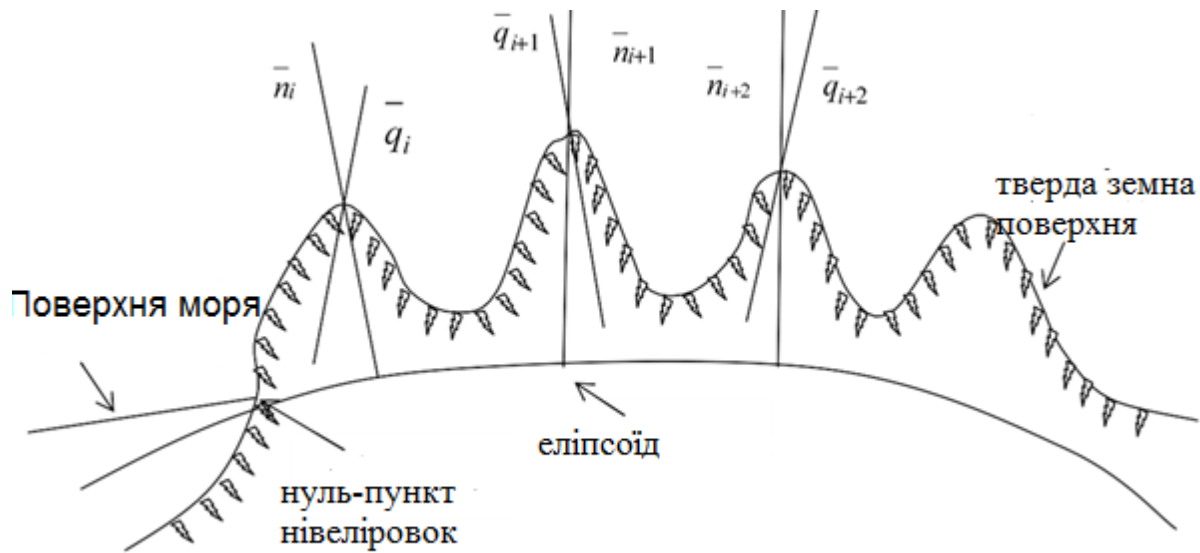


Рис. 11.2 Ілюстрація до проблеми редукування результатів геодезичних вимірів: $\bar{q}_i, \bar{q}_{i+1}, \bar{q}_{i+2}$ – напрямки прямовисних ліній, що співпадають з осями обертання геодезичних інструментів в момент вимірювань; $\bar{n}_i, \dots$ – напрямки нормалей до еліпсоїда.

4. Гравіметричні дані також знаходять широке застосування у прикладній геодезії. Наприклад: під час будівництва тунелів (особливо у гірських районах), проектуванні шахт; при будівництві та експлуатації великих гідроелектростанцій, атомних електростанцій, ядерних прискорювачів, висотних споруд баштового типу, будинків підвищеної поверховості, тобто при зведенні складних споруд, що вимагають точного геодезичного забезпечення, яке неможливо досягти без урахування неоднорідності гравітаційного поля.

5. Гравіметрія активно використовується для вивчення *деформацій різних об'єктів методом високоточних повторних геодезичних вимірів*. Особливо актуально це питання стоїть на геодинамічних полігонах, створених у районах великих гідроелектростанцій. При їх експлуатації рівень води у водосховищі може зазнавати істотних змін (на кілька десятків метрів), що спричиняє значні зміни локального гравітаційного поля в районі цього водосховища. Світовий досвід показав, що зміни рівня води у водосховищах з двох до 25 метрів спричиняє зміну локального гравітаційного поля на 1,5 – 2 мГал. У свою чергу, зміна гравітаційного поля на цю величину викликає ухилення вертикальних ліній у прибережній частині водосховища порядку $(0,3 - 0,5)''$, а зміна положень рівневих поверхонь – до 10 мм. Цей факт свідчить, що в результаті геодезичних вимірів, виконаних за різних рівнів водосховища, необхідно вводити поправки за зміну гравітаційного поля.

Особливе значення відіграють гравіметричні дослідження для розв'язку різноманітних **геологічних задач**. Найбільш якісне використання гравітаційних даних проводиться при обробці комплексу геофізичних матеріалів, зокрема при застосовуванні таких методів, як: магніторозвідка, сейсморозвідка, електророзвідка, петрофізика, геофізичні дослідження в свердловинах та при обов'язковому аналізі результатів попередніх геологічних досліджень.

Найчастіше гравірозувальні роботи проводяться в комплексі з магніторозвідкою [134]. При цьому, якщо гравітаційні та магнітні аномалії викликані одним й тим самим геологічним об'єктом, то вони звичайно не завжди співпадають за місцезнаходженням,

розміром, формою і т.п., а іноді різняться досить істотно. Причиною невідповідності є різна аналітична природа і гравітаційних, і магнітних аномалій.

Досить успішним є комплексування гравітаційних зйомок і результатів сейсморозвідувальних або електророзвідувальних робіт - вони вказують на зв'язок гравітаційних аномалій з тими або іншими геологічними структурами – характером поверхні кристалічного фундаменту, з тектонічними порушеннями, підняттями або зануреннями пластів осадових порід, з рудними родовищами.

Залучення даних петрофізичних досліджень (густина гірських порід площі досліджень) істотно підвищує результативність гравіметричних досліджень [123].

Гравіметрія та гравірозвідка використовуються для вивчення глибинної будови земної кори, тектонічного і петрографічного районування, глибинного геологічного картування, пошуку та прогнозуванню родовищ корисних копалин, зокрема, покладів нафти і газу, твердих корисних копалин і будівельних матеріалів, вирішення деяких задач інженерної геології, гідрогеології. Сучасні мікрогравіметричні дослідження часто використовують при вирішенні задач археології, як в комплексі з магніторозвідкою та георадарною зйомкою, так і самостійно.

Наприклад, часто об'єктами пошуків із застосуванням гравіметрії є поклади залізних, хромітових, мідно-нікелевих та інших руд; баритові, барит-свинцево-цинкові тіла, що відрізняються від вміщуючих порід підвищеною густиною. Такі об'єкти створюють додатні аномалії сили тяжіння. Від'ємними гравітаційними аномаліями характеризуються викопні солі, соляні куполи, кальдери вулканів та ін. Рідкіснометалеві, мідно-порфірові, золото-кварцові рудні райони фіксуються мінімумами гравітаційного поля складного характеру.

На розмір аномалій впливає рельєф місцевості, у тому числі і підземний рельєф. Тому чутливість гравірозвідки нижче, ніж магнітометричного методу, але глибинність її більше. За допомогою цього методу можна виявити об'єкти залежно від їхніх розмірів на глибині до декількох кілометрів.

Прикладні задачі гравіметрії вирішуються також в тісному зв'язку з іншими науками: з фізикою Землі, із запуском та експлуатацією космічних літальних апаратів, із завданнями автономної навігації, метрологією тощо.

У геофізиці та геодинаміці за результатами гравіметричних досліджень вивчають межі тектонічних блоків та ведуть періодичні спостереження на тектонічних розломах. Зміна напруженого стану на тектонічних розломах проявляється у зміні гравітаційного поля, що може розглядатися як один із провісників землетрусу.

У свою чергу, гравіметрія успішно використовує різноманітні новітні технічні та наукові досягнення інших галузей знань, тобто математики, фізики, електроніки, автоматики, приладобудування, обчислювальної техніки.

12. ЗАСТОСУВАННЯ ГРАВІМЕТРІЇ ПРИ ВИРІШЕННІ ГЕОДЕЗИЧНИХ ЗАДАЧ

12.1 ВИЗНАЧЕННЯ ФІГУРИ ГЕОЇДА

12.1.1 Збурюючий потенціал

У вищій геодезії широко застосовується термін збурюючий потенціал, як різниця між реальним і нормальним потенціалами в одній точці. В небесній механіці нерідко можна зустріти термін збурюючі сили, силова функція, що збурює, збурення. Цікаво, що саме збурює ця сила? Для небесної механіки відповідь зрозуміла - закон руху тіла, робить його відмінним від кеплеровського, незбуреного. Австрійський геодезист Г.Моріц (104) запропонував ввести термін аномалія потенціалу. Вираз «аномалія сили тяжіння» як різниця реальної та нормальної сили тяжіння. Але віддаючи данину традиції, ми будемо вживати термін збурюючий потенціал саме як різниця реального та нормального потенціалів сили тяжіння або притягання взятих в одній і тій же точці [135].

Візьмемо точку P на поверхні геоїда – рівневій поверхні з координатами N, B, L , де N – геодезична висота точки (відстань від рівневої поверхні до еліпсоїда). Це є висота геоїда в точці P . Дві інші координати – B і L відповідно геодезичні широта та довгота. На поверхні еліпсоїда точку з такими ж значеннями широти і довготи будемо позначати буквою Q . Зрозуміло, що висота цієї точки дорівнює нулю. Сила тяжіння в точці P :

$$g(P) = \text{grad}W(P).$$

Нормальна сила тяжіння в точці Q :

$$\gamma(Q) = \text{grad}U(Q).$$

Різниця абсолютних значень цих векторів визначає змішану гравітаційну аномалію.

Збурюючий потенціал в точці Q (на еліпсоїді) дорівнює

$$T(Q) = W(Q) - U(Q) = \left(W(P) - N \frac{\partial W}{\partial n} \right) - U(Q).$$

Однак, оскільки $W(P) = U(Q)$, отримаємо

$$T(Q) = -N \frac{\partial W}{\partial n} = gN. \quad (12.1)$$

Визначимо змішану аномалію

$$\Delta g = -\frac{\partial W(P)}{\partial n} + \frac{\partial U(Q)}{\partial n'}. \quad (12.2)$$

У першому доданку ми диференціюємо потенціал по зовнішній нормалі до геоїда, а в другому – до еліпсоїда. Ці два напрямки, взагалі кажучи, не збігаються. Правда, відмінність невелика і помилка не перевищує $(1 - \cos(n, n'))$, тобто величину порядку квадрата відхилення прямовисної лінії. Це істотно менше квадрата стиснення, тому в нашому наближенні можна не робити відмінності в напрямках прямовисної лінії та нормалі до еліпсоїда.

Перемістимо значення сили тяжіння з точки P в точку Q , застосовуючи формули лінійного наближення

$$\frac{\partial W(P)}{\partial n} = \frac{\partial W(Q)}{\partial n} + N \frac{\partial^2 W(Q)}{\partial n^2}. \quad (12.3)$$

Вертикальний градієнт сили тяжіння

$$W_{ZZ} = g \left(1/R_X + 1/R_Y \right) - 4\pi G\sigma + 2\omega^2$$

залежить від радіусів кривизни нормальних перетинів і кутової швидкості обертання Землі

$$\frac{\partial^2 W}{\partial n^2} = 2\omega^2 + \gamma \left(\frac{1}{R_X} + \frac{1}{R_Y} \right). \quad (12.4)$$

Нехтуючи малими порядку N_α , можна знехтувати і членом $2\omega^2$. Крім того, оскільки N також мала величина (порівняно з R), можна не враховувати відмінності між радіусами кривизни меридіонального перетину і перетину в першому вертикалі. Після спрощень, формула (12.3) прийме вигляд

$$\frac{\partial W(P)}{\partial n} = \frac{\partial W(Q)}{\partial n} + 2N \frac{\gamma}{R}. \quad (12.5)$$

Тепер змішану аномалію можна записати так

$$\Delta g = -\frac{\partial W(P)}{\partial n} + \frac{\partial U(Q)}{\partial n} = -\frac{\partial (W(Q) - U(Q))}{\partial n} - 2N \frac{\gamma}{R}.$$

Різниця $W(Q) - U(Q)$ є потенціал збурення в точці Q , а той, у свою чергу, пов'язаний з висотою геоїда N формулою (12.1). Замінюючи в цій формулі реальне значення сили тяжіння на нормальне, отримаємо $T = N\gamma$. Тепер змішану аномалію можна виразити через потенціал збурення наступним чином

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial n} - \frac{2T}{R}. \quad (12.6)$$

Отже, задача визначення фігури геоїда (поверхні рівня щодо еліпсоїда) зводиться до визначення гармонійної функції T – потенціалу збурення, який лінійно пов'язаний з висотою геоїда. Проблема інтегрування рівняння Лапласа, за умови, що на заданій поверхні шукана функція підпорядковується деякій умові, яке називають крайовою умовою та належить до класу крайових задач, деякі з них розглянуті у книзі І.

12.1.2 Крайові задачі Діріхле для сфери

Розглянемо диференціальне рівняння Лапласа (див. 3.5) що визначає функцію $G(P)$, гармонійну в деякій області, що обмежена замкнутою поверхнею S . Всі значення цієї функції на межі області, тобто на поверхні S , відомі. З усіх розв'язків рівняння Лапласа потрібно вибрати тільки ті, які задовольняють крайовій умові. Розв'язок істотно залежить від виду граничної поверхні. Нехай задана поверхня – сфера. У цьому формулюванні маємо справу з внутрішньою проблемою Діріхле (3.8.1).

Коли необхідно визначити гармонійну функцію поза граничної поверхні, тоді розглядається зовнішня проблема Діріхле.

Припустимо, що шукана функція $G(P)$ задана на поверхні сфери Σ значеннями $g(\theta, \lambda) = G(\rho, \theta, \lambda)|_{\Sigma}$. Розкладемо функцію $g(\theta, \lambda)$ в ряд Лапласа [136].

$$G(\rho, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n g_n(\theta, \lambda)$$

Внутрішня проблема Діріхле

Шуканим розв'язком буде

$$G(\rho, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n g_n(\theta, \lambda) \quad (12.7)$$

оскільки:

1. задовольняє рівнянню Лапласа, як сферична функція першого роду;

2. на сферичній поверхні радіуса R вона дорівнює $g(\theta, \lambda)$.

Зовнішня проблема Діріхле

Розв'язок рівняння Лапласа задають у вигляді суми сферичних функцій другого роду

$$G(\rho, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+1} g_n(\theta, \lambda) \quad (12.8)$$

Ця функція також:

1. задовольняє рівнянню Лапласа як сферична функція другого роду;
2. на поверхні вона дорівнює $g(\theta, \lambda)$;
3. на нескінченності прямує до нуля як ρ^{-1} , що вказує на її регулярність на нескінченності.

12.1.3 Крайові задачі Неймана

На поверхні іноді задано не значення функції, а її нормальні похідні (задача Неймана), яка також може бути як внутрішньою, так і зовнішньою.

Крайова умова в цьому випадку має вигляд

$$\frac{\partial G(\rho, \theta, \lambda)}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = g(\theta, \lambda).$$

Для сфери має місце рівність

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial \rho},$$

А тоді крайова умова може бути представлена таким чином:

$$\frac{\partial G(\rho, \theta, \lambda)}{\partial \rho} \Big|_{\Sigma} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\theta, \lambda), \quad (12.9)$$

де $g_n(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^n (A_{mn} \cos m\lambda + B_{mn} \sin m\lambda) \bar{P}_{mn}(\cos \theta)$ функція Лапласа.

Оскільки

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} g_n(\theta, \lambda) d\Sigma = A_{00},$$

для виконання теореми Гаусса для гармонійних функцій про потік необхідно, щоб виконувалася умова $A_{00} = 0$, що еквівалентно умові $g_n(\theta, \lambda) = 0$.

Внутрішня проблема Неймана

Відомо, що розв'язком внутрішньої проблеми Неймана є рівняння наступного виду:

$$G(\rho, \theta, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{n R^{n-1}} g_n(\theta, \lambda) \quad (12.10)$$

Дійсно, ця функція гармонійна, оскільки складається з суми сферичних функцій першого роду, а підстановка її в крайову умову (12.9) показує, що вона виконується.

Зовнішня проблема Неймана

Цю проблему на сфері вирішує функція

$$G(\rho, \theta, \lambda) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^{n+2}}{(n+1)\rho^{n+1}} g_n(\theta, \lambda) \quad (12.11)$$

У справедливості цього твердження пропонуємо переконати самостійно.

12.1.4 Змішана крайова задача

Ця задача, як і дві попередні може бути як внутрішньою, так і зовнішньою. Випадок зовнішньої змішаної крайової задачі має пряме відношення до теорії фігури Землі. Крайовою умовою в цьому випадку буде лінійна комбінація самої шуканої функції та її нормальної похідної на граничній поверхні

$$\frac{\partial G(\rho, \theta, \lambda)}{\partial \rho} + \kappa G(\rho, \theta, \lambda) \Big|_{\rho=R} = g(\theta, \lambda). \quad (12.12)$$

Як і в попередніх випадках розв'язок будемо шукати у вигляді розкладання по сферичним функціям

$$G(\rho, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+1} X_n(\theta, \lambda),$$

де $X_n(\theta, \lambda)$ сферична функція, що підлягає визначенню. Підставимо цей вираз в крайову умову (12.12):

$$\begin{aligned}
\kappa \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+1} X_n(\theta, \lambda) - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{R^{n+1}}{\rho^{n+2}} X_n(\theta, \lambda) I_{\rho=R} = \\
= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\kappa R - (n+1)}{R} X_n(\theta, \lambda) = g(\theta, \lambda) \\
= \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\theta, \lambda).
\end{aligned}$$

Прирівнюючи сферичні функції однакових ступенів почленно, отримаємо

$$X_n(\theta, \lambda) = \frac{R}{\kappa R - (n+1)} g_n(\theta, \lambda).$$

Отже, розв'язком зовнішньої змішаної крайової задачі буде

$$G(\rho, \theta, \lambda) = R \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+1} \frac{g_n(\theta, \lambda)}{\kappa R - (n+1)}. \quad (12.13)$$

12.1.5 Визначення висот геоїда

Потенціал збурення є гармонійною функцією і на сфері виконується крайової умова (12.6), яка характеризує зовнішню змішану крайову задачу. Щоб її вирішити, потрібно представити змішану гравітаційну аномалію рядом Лапласа

$$\Delta g = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\theta, \lambda),$$

де

$$g_n(\theta, \lambda) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\Sigma} \Delta g(\theta', \lambda') P_n(\cos \psi) d\Sigma, \quad (12.14)$$

де ψ сферична відстань між точкою Q та елементом сферичної поверхні $d\Sigma$. Залишається тепер представити праву частину рівняння (12.6), що задає крайову умову. Для потенціалу збурення справедливо розкладання

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \lambda) / \rho^{n+1},$$

де

$$Y_0 = G(M - M_0), \quad Y_1 = GM(x_0 \sin \theta \cos \lambda + y_0 \sin \theta \sin \lambda + z_0 \cos \theta).$$

Це є задача Стокса. У класичному вирішенні даної задачі передбачається, що маса еліпсоїда дорівнює масі реальної Землі, тобто $M = M_0$, а початок координат збігається з центром мас планети $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Звідси випливає, що розкладання потенціалу збурення починається з $n = 2$:

$$T = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{Y_n(\theta, \lambda)}{\rho^{n+1}}.$$

Нехтуючи квадратом стиснення, ми знову операцію диференціювання по нормалі замінимо диференціюванням по радіус-вектору

$$\frac{\partial T}{\partial n} + \frac{2T}{R} \approx \frac{\partial T}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R} + \frac{2T}{R} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-n}{R^{n+2}} Y_n(\theta, \lambda),$$

отже

$$g_n(\theta, \lambda) = \frac{n-1}{R^{n+2}} Y_n(\theta, \lambda).$$

Зауважимо, що при $n = 0$, має бути

$$g_0(\theta, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \Delta g d\Sigma = 0,$$

а при $n = 1$

$$g_1(\theta, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \Delta g \cos \psi d\Sigma = 0.$$

Для існування розв'язку задачі Стокса (див. 3.8.3) необхідно, щоб середнє значення змішаних гравітаційних аномалій дорівнювало нулю і, крім того, повинен дорівнювати нулю інтеграл $\int_{\Sigma} \Delta g \cos \psi d\Sigma$. Тепер розв'язок крайової задачі для потенціалу збурення набуває вигляду

$$T(\theta, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{R}{n-1} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+1} g_n(\theta, \lambda). \quad (12.15)$$

Підстановка в рівняння (12.15) інтегральної формули (12.14) для функцій Лапласа дає наступний результат:

$$T(\theta, \lambda) = \frac{R}{4\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} \int_{\Sigma} \Delta g(\theta', \lambda') P_n(\cos \psi) d\Sigma = 0. \quad (12.16)$$

Оскільки інтегрування ведеться по сфері радіуса R у формулі (12.16) вважатимемо $\rho = R$. Введемо позначення

$$S(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi), \quad (12.17)$$

і розв'язок задачі Стокса приймає остаточно вигляд

$$T(\theta, \lambda) = \frac{R}{4\pi} \int_{\Sigma} \Delta g(\theta', \lambda') S(\psi) d\Sigma. \quad (12.18)$$

Функцію $S(\psi)$ часто називають функцією Стокса. В (12.17) вона задана у вигляді розкладання за ступенями поліномів Лежандра від косинуса центральної відстані ψ .

$$S(\psi) = \csc \frac{\psi}{2} - 6 \sin \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos \psi - 3 \sin \psi \ln \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right).$$

Легко бачити, що точка $\psi = 0$ особлива. Тут функція Стокса звертається в нескінченність, проте інтеграл (12.18) сходиться, але при виконанні двох зазначених вище умов, яким повинні задовольняти гравітаційні аномалії. Використовуючи формулу (12.1), з потенціалу збурення легко отримати висоти геоїда

$$N = \frac{T}{\gamma} = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\Sigma} \Delta g(\theta', \lambda') S(\psi) d\Sigma. \quad (12.19)$$

12.1.6 Визначення ухилень схилу

Прямовисна лінія (вертикаль) збігається з напрямком вектору сили тяжіння $\mathbf{g}$.

Вона є нормаллю до рівневої поверхні. З іншого боку нормаль до еліпсоїда збігається з напрямком вектору нормальної сили тяжіння. Ці дві нормалі не збігаються. Між ними утворюється кут, який в геодезії називається ухиленням схилу. Інша назва - відхилення прямовисної лінії. Правда виникає питання відхилення від чого? Щоб таких питань не виникало, ми будемо вживати геодезичний термін.

Ці дві нормалі, що продовжені вгору, перетинаються з уявною небесною сферою в точках, одна з яких буде астрономічним зенітом (або просто зенітом), а інша геодезичним. Однозначно, що і площини горизонтів астрономічного і геодезичного не збігаються. Вважається ухилення схилу додатним, якщо зеніт зміщується в північному або східному напрямку.

Звернемося до локальної геодезичної системи координат з початком в пункті спостережень (точка P). Горизонтальні осі PX і PY лежать в площині, яка перпендикулярна до нормалі до еліпсоїда.

Одна з них спрямована на північ, інша на схід. Вісь **PZ** спрямована вниз по внутрішній нормалі до еліпсоїда. При додатних "горизонтальних" компонентах вектору сили тяжіння обидві компоненти ухилення схилу будуть від'ємні. Тому компоненти ухилення схилу в площині меридіана і першого вертикалу відповідно визначають наступним чином

$$\xi = -\frac{g_X}{g}, \quad \eta = -\frac{g_Y}{g}. \quad (12.20)$$

Обидві компоненти в останньому рівнянні - безрозмірні величини, хоча на практиці вони вимірюються в кутових одиницях. Справа в тому, що ухилення схилу на Землі становлять секунди дуги, тому замість тригонометричних формул, що пов'язують ухилення схилу з компонентами вектору сили тяжіння, приймається просте відношення.

З іншого боку

$$g_X = \frac{\partial W}{\partial X}, \quad g_Y = \frac{\partial W}{\partial Y}, \quad \gamma_X = \frac{\partial U}{\partial X} = 0, \quad \gamma_Y = \frac{\partial U}{\partial Y} = 0,$$

Тому

$$\xi = \frac{\partial}{\partial X} \frac{W-U}{g} \approx -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial X}, \quad \eta = \frac{\partial}{\partial Y} \frac{W-U}{g} \approx -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial Y}. \quad (12.21)$$

Відомо, що $T/\gamma = N$, тому

$$\xi = -\frac{\partial N}{\partial X}, \quad \eta = -\frac{\partial N}{\partial Y}. \quad (12.22)$$

Формула (12.19) дозволяє обчислити висоти геоїда, якщо на поверхні Землі задані змішані гравітаційні аномалії. Для розв'язку задачі не має значення, в яких координатах задані ці аномалії, і за якими координатами практично ведеться інтегрування. Скористаємося для цього геодезичними координатами B і L . Перепишемо формулу (12.19)

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\Sigma} \Delta g(B', L') S(\psi) d\Sigma.$$

Проведемо операцію інтегрування на сфері, а не на еліпсоїді. При цьому можна очікувати похибку у визначенні висот геоїда порядку стиснення. Нехтуючи цими похибками, визначимо елементарні прирости для осей PX і PY

$$dX = R dB, \quad dY = R \cos B dL,$$

тому

$$\xi = -\frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\Sigma} \Delta g \frac{dS(\psi)}{d\psi} \frac{d\psi}{dB} d\Sigma, \quad \eta = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\Sigma} \Delta g \frac{dS(\psi)}{d\psi} \frac{d\psi}{\cos B dL} d\Sigma. \quad (12.23)$$

Обчислимо похідні $\frac{d\psi}{dB}$ і $\frac{d\psi}{dL}$. Для цього звернемося до формул сферичної тригонометрії.

Розглянемо сферичний трикутник, який утворюють дуги, що з'єднують три точки на сфері: точку P , в якій ми хочемо визначити ухилення схилу, точку N – полюс, і точку Q – поточну точку на поверхні сфери, де розташований елемент поверхні. Дуга PN дорівнює 90° , а дуга QN дорівнює $90^\circ - B'$. Кут при точці P дорівнює A – азимуту поточної точки Q . Дуга PP' дорівнює аргументу функції Стокса – ψ . Кут при полюсі N дорівнює різниці довгот точки Q і точки P , тобто $L' - L$. Використовуючи формули сферичної тригонометрії, нескладно отримати похідні кута ψ по B і по L , що входять до формули (12.23)

$$\frac{d\psi}{dB} = -\cos A, \quad \frac{d\psi}{dL} = -\cos B \sin A.$$

Підставимо отримані вирази в (12.23), отримаємо

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\Sigma} \Delta g \frac{dS(\psi)}{d\psi} \begin{pmatrix} \cos A \\ \sin A \end{pmatrix} d\Sigma.$$

Представимо наведений інтеграл у вигляді подвійного інтеграла. Елемент сфери дорівнює $d\Sigma = \sin \psi dA d\psi$, причому змінна ψ змінюється від 0 до π , а змінна A – від 0 до 2π . Отримаємо

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Delta g Q(\psi) \begin{pmatrix} \cos A \\ \sin A \end{pmatrix} d\psi dA, \quad \text{де } Q(\psi) = \\ &= \sin \psi \frac{dS(\psi)}{d\psi}. \end{aligned} \quad (12.24)$$

Ці формули носять ім'я голландського вченого Венінг-Мейнеса. Як і в формулі Стокса, що визначає висоту геоїда точка $\psi = 0$ є усуненою особливою точкою.

На практиці використовують більш складні методики для обчислення ухилень схилу з використанням і гравіметричних, і геодезичних даних.

12.2. КВАЗІГЕОЇД МОЛОДЕНСЬКОГО

12.2.1 Критика класичної теорії Стокса

Застосування формули Стокса (п.12.1) для визначення висот геоїда відносно загального земного еліпсоїда наштовхується на серйозні труднощі. По-перше, для інтегрування необхідно, щоб гравітаційні аномалії були відомі по всій поверхні Землі, понад дві третини якої покрита морями та океанами. Вимірювання сили тяжіння на поверхні океанів стало можливо лише в XX столітті.

У 1922–1929 роки голландський вчений Ф.А.Венінг-Мейнес працював над створенням апаратури для вимірювання сили тяжіння на рухомій підставі. Нарешті, в 1929 році ним був створений остаточний варіант маятникового приладу з яким Венінг-Мейнес здійснив плавання на підводному човні в акваторію Південно-Східної Азії, де в той час у Голландії були колонії. Точність гравіметричної зйомки вчений оцінив в 3–4 мГал, що було досить для вивчення стану земної кори в тому регіоні. На підставі цих даних запропонував нову теорію ізостази [135].

У 1954 році був створений перший в світі морський гравіметр, а в 1955 році пройшов морські випробування на підводному човні під час плавання навколо Нової Землі. Результати переконливо показали, що точність гравіметра не поступається точності маятникового приладу, вимагає набагато більш простий обробки спостережень. Маятникові прилади наземної гравіметрії, як відомо, були витіснені гравіметрами, те саме сталося і з морськими приладами. Морські гравіметри зараз є основними інструментами морської гравіметрії.

Друга проблема – більш серйозна. Теорія Стокса вимагає, щоб всі маси лежали під рівною поверхнею, яка називається геоїдом. Крім того, вимірювання сили тяжіння виконуються на фізичній поверхні, яка не співпадає з геоїдом. Завдання полягає в тому, щоб у виміряні значення ввести такі поправки, які б перенесли всі маси під рівень моря, не змінюючи самої рівневої поверхні, а сила тяжіння виявилася б віднесеною до рівня моря (геоїда). Ця проблема

широко обговорювалася в науковій літературі і отримала назву проблеми регуляризації Землі.

Виявилось, що для успішного вирішення проблеми регуляризації необхідно знати внутрішню будову Землі. В 50-х роках М.С.Молоденський [49, 50] довів, що різні варіанти вирішення цієї проблеми практично еквівалентні, але вони не вирішують задачу цілком строго. Ним був запропонований строгий розв'язок задачі визначення фігури Землі. При цьому визначають не поверхню, яку ми називаємо геоїдом, а іншої поверхні, досить близькою до геоїда, яку він назвав квазігеоїд.

Ним була розроблена теорія побудови квазігеоїда, запропоновано алгоритми наближеного вирішення проблеми. По-перше, редукція (перенесення) сили тяжіння або потенціалу виконується в лінійному наближенні. По-друге, хоча всі виміри та редукції відносяться до фізичної поверхні або до еліпсоїда, інтегрування малих функцій, де це потрібно, виконується за сферою (сферичне наближення). Звичайно, теорія Молоденського не остаточна. Вона постійно вдосконалюється багатьма вченими у світі.

12.2.2 Система висот

Визначити фігуру будь-якої поверхні - це значить визначити відстані кожної точки цієї поверхні до тіла відліку, за яку береться еліпсоїд обертання. Ці відстані зазвичай називають геодезичними висотами. Поняття висоти, на перший погляд, не вимагає уточнення. Однак це не так. М.С.Молоденський [49] розробив цілу систему висот для геодезії.

Припустимо, що маємо дві точки A і B , причому точка B вище за точку A . Якщо з'єднати ці точки каналом і пустити воду, куди вона потече? Здається цілком природною відповідь: з точки B до точки A . Однак це не зовсім так. Все питання в тому, як проходить рівень поверхні через ці точки. Якщо обидві точки лежать на одній рівневій поверхні, то вода нікуди не потече. Якщо рівнева поверхня, що проходить через точку B виявиться під рівневою поверхнею точки A , то буде спостерігатися зворотна картина: вода потече від точки A

до точки B . Таким чином, для гідротехнічних споруд система геодезичних висот виявляється непридатною.

У геодезії висоти визначають нівелюванням. Нівелірний хід від точки O , що розташована, наприклад, на рівні моря, до точки P дасть виміряну висоту точки P над рівнем моря $H_{\text{вим}} = \sum \Delta h$, де Δh нівелірне перевищення однієї ланки. Якщо нівелірний хід має багато ланок, то суму замінюють інтегралом

$$H_{\text{вим}} = \int_O^P dh.$$

Обчислимо різницю потенціалів між точками O і P .

$$W_P - W_O = \int_O^P \frac{\partial W}{\partial h} dh = - \int_O^P g dh. \quad (12.25)$$

Таким чином, для визначення різниці потенціалів потрібно мати нівелірні перевищення і силу тяжіння уздовж всього профілю.

Введемо до розгляду ще одну точку. Через точку P проходить силова лінія, яку можна продовжити до поверхні геоїда (рівень моря). Вона перетнеться з цією поверхнею в точці P' . Таким чином точки O і P' лежать на одній поверхні рівня (на геоїді). Оскільки результат визначення різниці потенціалів не залежить від шляху інтегрування, виберемо такий маршрут $O - P' - P$. Збільшення потенціалу ми отримаємо лише на відрізку силової лінії $P' - P$:

$$\int_{P'}^P \frac{\partial W}{\partial h} dh = \int_{P'}^P g dh.$$

При русі вздовж силової лінії сила тяжіння безперервно змінюється. Згідно з теоремою про середнє (курс математичного аналізу), можна знайти таке значення підінтегральної функції, яке вона приймає всередині інтервалу інтегрування, яким можна замінити підінтегральний вираз

$$\int_{P'}^P g dh = g_m \int_{P'}^P dh = g_m PP'$$

Відрізок силової лінії PP' називається *ортометричною висотою* точки P над рівнем моря (тобто над геоїдом). Отже

$$H_{\text{орт}} = - \frac{1}{g_m} \int_O^P \frac{\partial W}{\partial h} dh = \frac{W(O) - W(P)}{g_m}. \quad (12.26)$$

Щоб обчислити ортометричну висоту, необхідно знати не тільки збільшення потенціалу, а й вміти обчислити середнє значення сили тяжіння на відрізку силової лінії, а для цього необхідно знати

як змінюється сила тяжіння на цьому відрізку всередині Землі. М.С.Молоденський [50] запропонував замінити g_m на середнє значення нормальної сили тяжіння. Висоту, яку ми таким чином отримаємо він назвав *нормальною*. Така заміна неминуче вносить похибку, яка, втім, незначна. Згідно з визначенням, нормальна висота визначається за формулою

$$H^y = \frac{1}{\gamma} (W(O) - W(P)) \quad (12.27)$$

Оскільки ортометрична висота є висота точки над рівнем моря, то нормальна висота, що мало відрізняється від неї, буде дорівнювати висоті точки від поверхні, що мало відрізняється від геоїда. Ця поверхня отримала назву квазігеоїда.

Відмінність істинної (геодезичної) висоти від нормальної доречно назвати аномалією висоти. Це поняття також ввів Молоденський. Отже, аномалія висоти є

$$\zeta = H - H^y \quad (12.28)$$

Аномалія висоти це відстань квазігеоїда від еліпсоїда, або дорівнює висоті *майже геоїда*. Очевидно, що $\zeta \approx N$. У класичному розумінні, визначити фігуру Землі – це значить визначити висоти геоїда N . Будемо вважати фігурою Землі – фігурою квазігеоїда, а для цього необхідно визначити аномалії висот.

Ця задача знову приводить до крайової задачі для гармонійних функцій. Отже, аномалію висоти потрібно визначити через потенціал збурення (розділ 12.1). Отже, маємо:

- потенціал тяжіння в точці P дорівнює

$$W(P) = W_0 + C,$$

де C – приріст потенціалу від рівня моря (точка O);

- нормальний потенціал в точці P_0 , дорівнює

$$U(P_0) = U_0 + C.$$

Таким чином, точка P_0 не збігається з точкою P , так як вона підбирається таким чином, щоб прирости потенціалу реального і нормального були однаковими

$$W(P) - W_0 = U(P_0) - U_0 = C$$

Перша постійна W_0 є величиною потенціалу тяжіння на геоїді, а друга U_0 - величиною нормального потенціалу на рівні еліпсоїда.

Неважко переконатися, що відрізок PP_0 дорівнює аномалії висоти ζ .
Отже

$$U(P) = U(P_0) + \zeta \frac{\partial U}{\partial n} = U(P_0) - \zeta \gamma(P_0)$$

тому $\zeta = \frac{U(P_0) - U(P)}{\gamma(P_0)}$.

З іншого боку

$$U(P_0) = U_0 + C = U_0 + (W(P) - W_0),$$

тому $U(P_0) - U(P) = \gamma \zeta = W(P) - U(P) - (W_0 - U_0) = T(P) - (W_0 - U_0),$

звідси отримуємо

$$\zeta = \frac{T(P)}{\gamma(P_0)} + \frac{W_0 - U_0}{\gamma(P_0)} \quad (12.29)$$

Ми отримали знову формулу Брунса, проте вона відрізняється тим, що містить додатковий член $(W_0 - U_0)$, який в "класичній" формулі відсутній. В теорії Стокса передбачається, що обидві ці постійні рівні: потенціал тяжіння на рівні моря дорівнює потенціалу рівневого еліпсоїда.

Інша відмінність: нормальна сила тяжіння задається не на геоїді, а в деякій точці P_0 , що віддалена від поточної точки на фізичній поверхні на величину, що дорівнює аномалії висоти. Геометричне місце всіх точок P_0 називається **теллуroidом**. Гравітаційні аномалії, як і раніше, відносяться до різних точок: спостережене значення задано на фізичній поверхні, а нормальне - на теллуroidі.

Існують й інші визначення поняття теллуroidа, як поверхні, що апроксимує форму Землі.

Теллуroid Маруссі визначається наступним чином. Теллуroid – геометричне місце точок, в яких потенціал тяжіння збігається з нормальним $W(P) = U(P_0)$.

Теллуroid Краупа (гравіметричний теллуroid) – геометричне місце точок, в якому нормальна сила тяжіння збігається з силою тяжіння на поверхні Землі $g(P) = \gamma(P_0)$.

Кожне з визначень теллуroidа вимагає свого підходу для визначення його фігури. Розглянемо теллуroid та квазігеоїд Молоденського.

12.2.3 Крайові умови задачі Молоденського

У точці P на фізичній поверхні Землі нам відомо значення потенціалу тяжіння $W(P)$, а в точці P_0 на теллуроїді – значення нормального потенціалу $U(P_0)$. Використовуючи векторно-матричну математику можна представити основні співвідношення, що зв'язують потенціал збурення $T(P)$, різницю потенціалів $\Delta W = W(P) - U(P_0)$, так звану аномалію потенціалу, аномалію висоти ζ і змішану аномалію сили тяжіння

$$\Delta g = g(P) - \gamma(P_0).$$

Неважко бачити, що

- на теллуроїді Молоденського $\Delta W = W_0 - U_0$,
- на теллуроїді Маруссі – $\Delta W = 0$,
- а на теллуроїде Крапуна – $\Delta g = 0$.

У загальному випадку маємо

$$U(P) = U(P_0) + \zeta^T \text{grad}U(P_0) \quad (12.30)$$

$$\text{тоді } T(P) = W(P) - U(P) = W(P) - U(P_0) - \zeta^T \text{grad}U(P_0)$$

або

$$T(P) = \Delta W - \zeta^T \text{grad}U(P_0) \quad (12.31)$$

Аналогічно отримаємо змішану аномалію

$$\Delta g = g(P) - \gamma(P_0) = g(P) - (\gamma(P) - (\text{grad}\gamma(P_0)^T \zeta)), \quad (12.32)$$

але градієнт вектору g є градієнт всіх його складових, що дає матрицю-тензор. Позначимо

$$\Gamma = (\text{grad})^T.$$

Тому

$$\Delta g = g(P) - \gamma(P) + \Gamma \zeta.$$

Різниця

$$g(P) - \gamma(P) = \text{grad}(W(P) - U(P)),$$

Відома як "чиста" аномалія, що дорівнює градієнту потенціалу збурення $\text{grad}T(P)$, тому можна записати

$$\Delta g = \text{grad}T(P) + \Gamma \zeta. \quad (12.33)$$

Отже, ми отримали два рівняння, які на фізичній поверхні Землі можна взяти в якості крайових умов

$$\begin{cases} T + \zeta^T \text{grad}U|_S = \Delta W, \\ \text{grad}T + \Gamma \zeta|_S = \Delta g. \end{cases} \quad (12.34)$$

Перша з наведених формул є узагальнення формули Брунса [137], що зв'язує потенціал збурення з висотою квазігеоїда. З цих двох рівнянь можна отримати одне, якщо виключити аномалію висоти ς . Вирішимо друге з наведених рівнянь. Припускаючи, що матриця Γ неособлива, отримаємо $\varsigma = \Gamma^{-1}(\Delta g - \text{grad}T)$. Підставимо знайдений розв'язок в перше рівняння. Зауважимо, що

$$\varsigma^T \text{grad}U = \varsigma^T \gamma = \gamma^T \varsigma = \gamma^T \Gamma^{-1}(\Delta g - \text{grad}T). \quad (12.35)$$

Підставляючи отриманий вираз в перше рівняння з (12.34), матимемо

$$T - \gamma^T \Gamma^{-1} \text{grad}T \mathbf{l}_S = \Delta W - \gamma^T \Gamma^{-1} \Delta g.$$

Для спрощення запису, введемо позначення $m = -\Gamma^{-1}\gamma$. Тепер крайова умова узагальненої задачі Молоденського набирає вигляду

$$T + m^T \text{grad}T \mathbf{l}_S = \Delta W + m^T \Delta g. \quad (12.36)$$

Нехай аномалія потенціалу – постійна величина. Іншими словами точка P , як і в задачі Стокса, знаходиться на поверхні рівня. Тоді $\Delta W = W_0 - U_0$. Виберемо локальну систему відліку з початком в точці P_0 . Вісь P_0X направимо на північ, вісь P_0Y на схід, а вісь P_0Z - у напрямку внутрішньої нормалі до еліпсоїда вниз. Тоді вектор аномалії висоти може бути визначений матрицею-рядком

$$\varsigma^T = (0 \ 0 \ -\varsigma)$$

Гradientи нормального потенціалу в точках P і P_0 рівні

$$\text{grad}U(P) = (\gamma_x \ \gamma_y \ \gamma_z)^T, \quad \text{grad}U(P_0) = (0 \ 0 \ \gamma(P_0))^T.$$

Матриця других похідних нормального потенціалу

$$\Gamma = \begin{pmatrix} U_{xx} & 0 & U_{xz} \\ 0 & U_{yy} & 0 \\ U_{zx} & 0 & U_{zz} \end{pmatrix}.$$

Перше з рівнянь (12.34) для крайових умов дає

$$T + (0 \ 0 \ -\varsigma) \begin{pmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{pmatrix} = W_0 - U_0,$$

тобто

$$T - \gamma(P)\varsigma = W_0 - U_0.$$

отже,

$$\varsigma = \frac{T}{\gamma} = \frac{W_0 - U_0}{\gamma}. \quad (12.37)$$

Друге рівняння з (12.34) виглядає наступним чином

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial X} \\ \frac{\partial T}{\partial Y} \\ \frac{\partial T}{\partial Z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_{XX} & 0 & U_{XZ} \\ 0 & U_{YY} & 0 \\ U_{ZX} & 0 & U_{ZZ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_X - \gamma_X \\ g_Y - \gamma_Y \\ g_Z - \gamma_Z \end{pmatrix}. \quad (12.38)$$

Перші два рівняння дають ухилення схилю

$$\begin{cases} \zeta'' = -\rho'' \frac{g_X - \gamma_X}{\gamma} = -\rho'' \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial T}{\partial X} + \zeta U_{ZZ} \right) \\ \eta'' = -\rho'' \frac{g_Y - \gamma_Y}{\gamma} = -\rho'' \frac{1}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial Y}. \end{cases} \quad (12.39)$$

де $\rho'' = 206265$ – число секунд в радіанах. Останнім членом в дужках першої формули (12.39) можна знехтувати. Відомо, що для нормальної сили тяжіння максимальне значення горизонтального градієнта дорівнює 0,000811 мГал/м. При $\zeta = 100$ м, що буває дуже рідко, величина складе 0,081 мГал і внесе похибку в ухилення схилю 0,017", тоді як ухилення схилю досягають кілька секунд дуги.

Третє рівняння має вигляд $\partial T / \partial Z - \zeta U_{ZZ} = g_Z - \gamma_Z$. Підставивши сюди величину ζ з (12.37) отримаємо крайову умову для змішаних аномалій

$$\frac{\partial T}{\partial Z} - \frac{\partial \gamma}{\partial Z} I_S = \Delta g - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial Z} (W_0 - U_0). \quad (12.40)$$

Ми отримали, таким чином, крайову умову, що майже збігається з крайовою умовою Стокса.

Задача визначення фігури Землі зводиться до побудови розв'язку рівняння Лапласа, яке задовольняє крайовій умові (12.40) або, в загальному випадку, умові (12.36). Способи вирішення цієї задачі заслуговують спеціального вивчення.

12.3. ВИЗНАЧЕННЯ СТИСНЕННЯ ЗЕМЛІ ЗА РЕЗУЛЬТАТАМИ ГРАВІМЕТРИЧНИХ ВИМІРІВ

Як відомо, стиснення Землі за результатами гравіметричних вимірів можна визначити за теоремою Клеро. Звернемося до формул (1.55) – (1.58), які ілюструють цю теорему (див. розділ 1.10).

Друга формула теореми Клеро (1.56, 1.58) дозволяє визначити стиснення α земного еліпсоїда за результатами гравіметричних вимірів на поверхні Землі.

У формулі (1.55) коефіцієнт β_1 відноситься до постійних вищого порядку малості, що впевнено визначається при заданні параметрів нульового порядку та порядку стиснення. Тому його вважатимемо відомим і рівним 0,000 007. Таким чином, у формулу (1.55) входять два невідомі коефіцієнти: γ_e і β . Для їх визначення достатньо мати значення γ_0 у двох точках. Але так як нормальну силу тяжіння не можна отримати за результатами вимірювань, то для знаходження невідомих γ_e і β використовують вимірювання сили тяжіння у точках поверхні Землі. У цьому випадку γ_0 виражається з формули для визначення аномалії у вільному повітрі у точці, що розташована усередині Землі.

$$(g - \gamma)_{\text{в.п.}} = g - (\gamma_0 + 0,3086H) + 4\pi G\delta \cdot H, \quad (12.41)$$

$$\gamma_0 = g - \Delta\gamma + \Delta_1 g - (g - \gamma)_{\text{в.п.}}, \quad (12.42)$$

де $\Delta\gamma = 0,3086H$, а $\Delta_1 g = 4\pi G\delta H$.

Підставляючи (12.42) в (1.55) першого розділу, будемо мати

$$\begin{aligned} & \gamma_e + \gamma_e \beta \cdot \sin^2 B - (g - \Delta\gamma + \Delta_1 g + \gamma_e \beta_1 \cdot \sin^2 2B) = \\ & = -(g - \gamma)_{\text{в.п.}}. \end{aligned} \quad (12.43)$$

Введемо позначення

$$\begin{aligned} x &= \gamma_e - 978000, \quad y = \gamma_e \cdot \beta, \quad b = \sin^2 B, \quad v = -(g - \gamma)_{\text{в.п.}}, \\ l &= -(g - \Delta\gamma + \Delta_1 g + \gamma_e \beta_1 \cdot \sin^2 2B) + 978000. \end{aligned}$$

Тоді рівняння (12.43) набуде вигляду

$$x + b \cdot y + l = v. \quad (12.44)$$

Рівняння (12.44) - це рівняння похибок; їх число дорівнює числу точок із виміряними значеннями сили тяжіння. Невідомі x і y визначають за умовою $[vv] = \min$ з розв'язання системи нормальних рівнянь

$$\begin{cases} n \cdot x + [b]y + [l] = 0 \\ [b]x + [bb]y + [bl] = 0 \end{cases} \quad (12.45)$$

де n - число вимірів або точок з виміряними значеннями сили тяжіння.

Після вирішення системи рівнянь (12.45) знаходимо коефіцієнти, які підлягають визначенню

$$\gamma_e = x + 978000 \text{ мГал}, \quad \beta = \frac{y}{\gamma_e}.$$

Стиснення α визначимо за формулою (1.58), параметр q у якій дорівнює відношенню відцентрової сили $\omega^2 a$ на екваторі до

тяжкості γ_e на екваторі; для $a = 6378,2$ км, $\omega^2 = 53,175 \cdot 10^{-10} \text{ (рад/с)}^2$, $\gamma_e = 978,0$ Гал, параметр q дорівнює 0,003468.

12.4. ВРАХУВАННЯ НЕОДНОРІДНОСТІ ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ В РЕЗУЛЬТАТАХ ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ

Гравітаційне поле Землі є неоднорідним, оскільки воно залежить від таких досить випадкових факторів як розподіл мас усередині Землі та на її поверхні, наявності штучних споруд, господарської діяльності людини, форми Землі, рельєфу тощо. Для вирішення задач прикладної геодезії неоднорідність гравітаційного поля Землі проявляється у факті непаралельності між собою поверхонь рівня й у аналогічній непаралельності вертикальних ліній, що проходять через різні точки земної поверхні. Результати геодезичних вимірів, виконані в реальному гравітаційному полі при положеннях основних осей геодезичних інструментів, що збігаються з поверхнями рівня та напрямками вертикальних ліній, потребують введення поправок, що враховують цю неоднорідність. Так результати кутових вимірювань, наприклад, необхідно виправити поправками за ухилення вертикальних ліній, а в результатах нівелювання має бути врахована непаралельність рівневих поверхонь.

Розглянемо формули поправок за неоднорідність гравітаційного поля у кожний вид геодезичних вимірів.

1. Поправка за ухилення вертикальних ліній у горизонтальний напрямок

$$\delta_{\alpha_{in}} = -(\xi_i \sin A_{in} - \eta_i \cos A_{in}) \cot z_{in}, \quad (12.46)$$

де $\delta_{\alpha_{in}}$ – поправка за ухилення вертикальних ліній у спостережуваний горизонтальний напрямок in ;

ξ_i і η_i – складові ухилення вертикальних ліній у меридіані та першому вертикалі у пункті спостереження;

A_{in} – азимут напрямку in ;

z_{in} – зенітна відстань напрямку in .

При обробці державних геодезичних мереж дана поправка враховується завжди в триангуляції 1 класу та у гірських районах триангуляції 2 класу, починаючи з кутів нахилу понад 2° . Зауважимо, що в цьому випадку у формулі (12.46) повинні використовуватися складові астрономо-геодезичного ухилення прямовисної лінії.

2. Виправлення за ухилення вертикальних ліній у зенітну відстань δ_{zin} обчислюється за формулою

$$\delta_{zin} = \xi_i \cos A_{in} + \eta_i \sin A_{in}, \quad (12.47)$$

За величиною поправка δ_{zin} , як правило, значно перевершує першу з перерахованих поправок, тобто $\delta_{\alpha in}$. Однак практично вона ніколи не вводиться в результати вимірювань через низьку точність визначення зенітної відстані.

Поправка за ухилення прямовисних ліній у зенітну відстань у точності співпадає зі значенням ухилення схилу в азимуті напрямку in , що зазвичай позначається ϑ_{in} . Таким чином,

$$\vartheta_{in} = \xi_i \cos A_{in} + \eta_i \sin A_{in}. \quad (12.48)$$

3. Вплив ухилення схилу (вертикальних ліній) на виміряні відстані.

Формула для обчислення поправки за ухилення вертикальних ліній у довжину лінії має вигляд

$$\delta_{sin} = (\xi_i \cos A_{in} + \eta_i \sin A_{in}) \cdot h_{in} \quad (12.49)$$

де δ_{sin} – поправка у виміряну відстань;

h_{in} – перевищення між кінцями лінії (точками i та n).

Розрахунки показали, що при вимірюванні ліній з точністю порядку $1 \cdot 10^{-6}$ поправку δ_s слід враховувати при кутах нахилу між кінцями вимірюваної лінії понад 5° . Проте слід пам'ятати, що ця поправка вводиться тільки в тому випадку, якщо лінія виміряна мірними дроти, що в даний час досить рідко. У разі проведення лінійних вимірів світлодалекомірами необхідність у введенні даної поправки відпадає, оскільки положення оптичних центрів приладів, між якими дає відстань світлодалекомір, не залежить від стану гравітаційного поля.

4. Поправка δ_{hin} за неоднорідність гравітаційного поля в результати геометричного нівелювання визначається за формулою

$$\delta_{hin} = -\vartheta_{in} \cdot S_{in} = -(\xi_i \cos A_{in} + \eta_i \sin A_{in}) S_{in}, \quad (12.50)$$

де h_{in} – перевищення в межах секції; S_{in} – довжина секції.

При $\vartheta = 0,5''$, $S = 2$ км $\rightarrow \delta_{h_{in}} = \frac{0,5'' \cdot 2 \cdot 10^6}{206265''} \approx 5$ мм.

Для довжини секції в 2 км точність нівелювання I і II класів характеризується похибкою $m_{h_{in}} = 0,7$ мм $\cdot \sqrt{2}$ км ≈ 1 мм. Таким чином, розрахунки показують необхідність урахування неоднорідності гравітаційного поля в результатах високоточного геометричного нівелювання.

Проаналізувавши наведені формули, можна помітити, що всі вони включають складові ухилення вертикальної лінії в меридіані і в першому вертикалі, відповідно ξ_i та η_i . Ці складові можна отримати за формулами Венінг-Мейнеса [138].

$$\xi_{гр.} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (g - \gamma) Q(\psi) \cos A d\psi dA; \quad (12.51)$$

$$\eta_{гр.} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (g - \gamma) Q(\psi) \sin A d\psi dA.$$

де A – азимут напрямку на поточну точку;

$Q(\psi)$ - функція Венінг-Мейнеса виду:

$$Q(\psi) = \frac{1}{2\gamma \sin i} \cos^2 \frac{\psi}{2} \left[\operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} + 12 \sin \frac{\psi}{2} - 32 \sin^2 \frac{\psi}{2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{1 + \sin \frac{\psi}{2}} - 12 \sin^2 \frac{\psi}{2} \ln \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) \right].$$

Однак слід пам'ятати, що за формулами Венінг-Мейнеса визначаються складові гравіметричного ухилення прямовисної лінії, тобто $\xi_{гр.}$ та $\eta_{гр.}$, у той час як при обробці державних мереж у формулах (12.46) – (12.50) треба використовувати складові астрономо-геодезичного ухилення схилу. Справді, в цьому випадку напрямок прямовисної лінії замінюється напрямком нормалі до еліпсоїда і при редукуванні результатів геодезичних вимірювань з поверхні Землі на поверхню еліпсоїда вводиться поправка за кут між напрямком нормалі до еліпсоїда та напрямком вертикальної лінії, тобто за астрономо-геодезичне ухилення прямовисної лінії.

Перехід від $\xi_{гр.}$ та $\eta_{гр.}$ до складових астрономо-геодезичного ухилення схилу для референц-еліпсоїда Красовського здійснюють за формулами

$$\begin{cases} \xi_{a-r} = \xi_{гр.} + 0,171 \cdot H_{км}^Y \sin 2 B \\ \eta_{a-r} = \eta_{гр.} \end{cases} . \quad (12.52)$$

12.5. ВРАХУВАННЯ НЕОДНОРІДНОСТЕЙ ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ В ІНЖЕНЕРНІЙ ГЕОДЕЗІЇ

Питання обліку неоднорідності гравітаційного поля у разі розвитку інженерно-геодезичних побудов досить нові [138], оскільки у загальному випадку досі вважалося, що інженерно-геодезичні роботи виконуються на невеликих територіях і гравітаційне поле у межах промислової площадки слід вважати однорідним. При цьому силові лінії та рівні поверхні гравітаційного поля в інженерній геодезії використовують як матеріалізовану координатну систему. Такий погляд на поле в переважній більшості випадків виправданий, тому що монтаж обладнання ведуть з похибкою 10^{-4} - 10^{-5} , а знімальні роботи з меншою точністю.

При роботах з похибкою 10^{-5} - 10^{-6} гіпотеза про однорідність гравітаційного поля в межах промислового або будівельного майданчика перестає себе виправдовувати і необхідно розрізняти обрані нами і тому геометрично визначені координатні лінії від реально існуючих силових ліній, що невідомі.

Силова лінія це крива, дотична до якої у кожній точці збігається з вектором сили тяжіння **g**. Силову лінію практично вважають плоскою кривою, а дотичну до неї називають вертикальною лінією. Насправді силові лінії мають кривизну, вони не збігаються з вертикальними лініями та непаралельні одна одній. Разом із силовими лініями викривляються і поверхні, що ортогональні силовим лініям (рівневі поверхні потенціалу сили тяжіння). Працювати геодезисту за таких умов стає важко. Але якщо не брати до уваги це, то точність 10^{-6} залишиться недосяжною, що на практиці в сучасних умовах може виявитися необхідним, оскільки в останні десятиліття вимоги до будівництва таких інженерних споруд як ГЕС, ядерні прискорювачі, гірські тунелі, будинки підвищеної поверховості і т.п. дуже зросли.

При виконанні різних видів геодезичних вимірів потрібно враховувати різні неоднорідності в поведінці гравітаційного поля.

При вимірах, наприклад, горизонтальних і вертикальних кутів впливає відхилення осі обертання теодоліту від координатної лінії z , а при розбивці кривої із заданими геометричними властивостями доводиться враховувати форму рівневих поверхонь і розташування відносно координатних. В інженерній геодезії можуть виникнути й специфічні задачі. Наприклад, фундамент має бути не площиною взагалі, а обов'язково горизонтальною площиною. Тому якщо вимоги до точності побудови фундаменту дуже високі, то виносити в натуру доведеться не площину, а рівну поверхню потенціалу сили тяжіння, щоб тиск її усюди був ортогональним. У подібних випадках необхідно розрізняти геодезичні висоти від динамічних, силові лінії – від вертикальних і координатних, і свідомо їх використовувати відповідно до вирішуваного завдання.

При врахуванні неоднорідності гравітаційного поля в результатах геодезичних вимірювань, виконаних в інженерно-геодезичних мережах, використовують наведені раніше формули (12.46) – (12.50) з наступними зауваженнями.

Якщо інженерно-геодезичні мережі, що обслуговують той чи інший об'єкт, займають значні за площею території та математична обробка результатів геодезичних вимірів у цих мережах виконується з використанням референц-еліпсоїда, то облік неоднорідності гравітаційного поля в результатах високоточних геодезичних вимірів може бути зроблений за тими ж формулами, що у державних геодезичних мережах.

Проте дуже часто в прикладній геодезії використовується місцева система координат, і промисловий майданчик займає відносно невелику за площею територію. І тут можна знехтувати кривизною Землі та вважати, що геодезичні роботи виконуються на площині. Тоді відпадає необхідність у введенні референц-еліпсоїда, а значить, і обчисленні астрономо-геодезичних ухилень вертикальних ліній. Тим не менш, при обробці результатів геодезичних вимірювань тут все одно зберігається необхідність урахування непаралельності вертикальних ліній та рівневих поверхонь у межах промислового майданчика та приведення їх до початку обраної системи координат.

Тоді формули з урахування впливу неоднорідності гравітаційного поля на результати інженерно-геодезичних вимірів можна представити як:

$$\delta_{\alpha_{in}} = -[(\xi_i - \xi_0) \sin A_{in} - (\eta_i - \eta_0) \cos A_{in}] \cdot \cot Z_{in}; \quad (12.53)$$

$$\delta_{S_{in}} = [(\xi_i - \xi_0) \cos A_{in} + (\eta_i - \eta_0) \sin A_{in}] \cdot h_{in}; \quad (12.54)$$

$$\delta_{h_{in}} = -[(\xi_i - \xi_0) \sin A_{in} + (\eta_i - \eta_0) \cos A_{in}] \cdot S_{in}. \quad (12.55)$$

У формулах (12.53)–(12.55) ξ_0 та η_0 – складові гравіметричного ухилення схилу в меридіані та першому вертикалі на початку обраної системи координат. Інші позначення ті самі, що й у попередніх формулах. За допомогою цих формул вирішується задача щодо приведення різних напрямків вертикальних ліній та положень рівневих поверхонь у межах майданчика до єдиного початку.

Особливістю інженерно-геодезичних мереж є наявність великих кутів нахилу, що досягають $30 - 40^\circ$. При таких кутах $\cot Z_{in}$ в формулі (12.53) дорівнює $0,58 - 0,84$. Тому при проведенні високоточних кутових вимірювань поправку $\delta_{\alpha_{in}}$ в інженерно-геодезичних мережах потрібно вводити практично завжди, а ухилення прямовисної лінії потрібно знати принаймні з тією ж точністю, з якою виконують вимірювання горизонтальних кутів. Поправка $\delta_{S_{in}}$ вводиться при точності вимірювань сторони порядку $1 \cdot 10^{-6}$, починаючи з кутів нахилу понад 5° . При виконанні лінійних вимірювань електрооптичними далекомірами необхідність у введенні цієї поправки взагалі відпадає. Через недостатню точність вимірювання зенітної відстані поправка за ухилення прямовисної лінії в ньому практично не враховується, хоча за величиною вона значно перевищує поправку δ_a . У результати нівелювання виправлення за неоднорідність гравітаційного поля вводиться, починаючи з відстані понад 1 км.

Вирішення питання необхідності врахування неоднорідності гравітаційного поля в результати геодезичних вимірів залежить від точності геодезичних робіт, виду мереж, і навіть від самих величин ухилень схилу в районі робіт.

Як правило, ці поправки вводяться у випадку, якщо їх можна порівняти з помилками геодезичних вимірів. Врахування впливу

неоднорідності гравітаційного поля доцільно виконувати в наступній послідовності:

1) розрахунок граничних коливань ухилень схилу, при яких ще можна не враховувати їх вплив на результати вимірювань;

2) оцінка можливих коливань ухилень схилу в районі робіт, порівняння їх із гранично допустимими, висновок про необхідність їх обліку;

3) визначення дійсних ухилень схилу (вибір методу визначення, проектування гравіметричної зйомки, польові роботи);

4) обчислення поправок за ухилення схилу в результати геодезичних вимірів.

Розрахунок граничного коливання ухилень схилу, при яких ще може не враховуватися їх вплив на результати вимірювань, виконується на підставі аналізу конкретних формул та виду вимірів.

Для оцінки можливих коливань ухилень схилу в районі робіт можна використовувати гравіметричні карти, результати вимірювання інших похідних потенціалу сили тяжіння, дані про геологічну будову земної кори або топографічні карти. Найзручніше використовувати гравіметричні карти, за допомогою яких можна обчислити ухилення схилу за формулами Венінг-Мейнеса (12.51).

У передгірських і гірських районах, де аномалії гравітаційного поля значною мірою обумовлені топографічними масами, можна використовувати топографічні ухилення схилу, викликані тяжінням тільки топографічних мас. У рівнинних районах топографічні ухилення схилу малі, а варіації ухилення схилу викликаються неоднорідністю земної кори. Тому для орієнтовної оцінки ухилень схилу можна використовувати дані про геологічну будову місцевості. За відомим положенням, формою та аномальною густиною геологічних тіл можна обчислити створюваний цими тілами потенціал та його похідні, тобто вирішити пряму задачу гравіметричної розвідки.

Нарешті, ухилення схилу можна отримати за результатами варіометричної зйомки. Цей метод зручно застосовувати в тому випадку, якщо в районі робіт очікуються значні коливання ухилень схилу, викликані притяганням аномальних мас, що залягають на невеликій глибині.

При визначенні дійсних ухилень схилу використовуються ті ж методи, що і при оцінці коливань ухилень схилу. Однак тут необхідні більш детальні знання про неоднорідності гравітаційного поля. Тому при позитивному висновку про необхідність обліку неоднорідності гравітаційного поля на об'єкті проектується або гравіметрична зйомка, або варіометрична зйомка. Варіометрична зйомка перед гравіметричною має ту перевагу, що її достатньо виконати лише в межах ділянки робіт.

12.6. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ АНОМАЛІЙ ВИСОТ ТА УХИЛЕНЬ СХИЛУ ЗА ВИМІРАМИ СИЛИ ТЯЖІННЯ ТА ДРУГИХ ПОХІДНИХ ПОТЕНЦІАЛУ СИЛИ ТЯЖІННЯ

Диференціальний метод вивчення гравітаційного поля, найпростіший за ідеєю, полягає в тому, щоб проінтегрувати за маршрутом виміряні другі або перші похідні потенціалу та отримати різницю перших похідних або різницю самого потенціалу. Застосування цього способу ускладнюється тією причиною, що перші горизонтальні похідні $W_x = -G\xi$ та $W_y = -G\eta$ виміряти важко, лише вертикальна похідна (напруженість сили тяжіння $W_z = -g$) вимірюється гравіметром швидко та досить точно. А при вивченні других похідних за допомогою звичайних варіометрів, що складні у використанні, вимірюються чотири похідних із п'яти необхідних (див. розділ 1.11). Це призводить до додаткових, хоч і усувних, ускладнень. Нарешті, цей метод дозволяє визначити лише прирости потенціалу або його похідних і тільки там, де виконані вимірювання. Поза точками вимірювання метод нічого визначити не дозволяє.

Особливо диференціальний метод є корисним в інженерній геодезії, тому що пристосований саме для локального вивчення поля з високою точністю. Розглянемо застосування цього при обчисленні ухилень схилу.

Для складових ухилень схилу в площині меридіана та першого вертикалу відомі формули

$$\begin{cases} \xi_{\text{гр.}} = -\frac{g_x}{g_z} = -\frac{1}{G} g_x, \\ \eta_{\text{гр.}} = -\frac{g_y}{g_z} = -\frac{1}{G} g_y. \end{cases} \quad (12.56)$$

В (12.56) g_x та g_y – проекції вектору сили тяжіння на площину, яка дотична до нормальної рівневої поверхні. Візьмемо дві довільні точки A та B на поверхні Землі. Для цих точок можна записати

$$\begin{cases} \xi_B - \xi_A = -\left[\left(\frac{1}{G} g_x\right)_B - \left(\frac{1}{G} g_x\right)_A\right], \\ \eta_B - \eta_A = -\left[\left(\frac{1}{G} g_y\right)_B - \left(\frac{1}{G} g_y\right)_A\right] \end{cases} \quad (12.57)$$

Відповідно до основної властивості потенціалу проекції його проекції g_x та g_y дорівнюють похідним потенціалу W за напрямками x і y . Тому формули (12.57) перепишемо у вигляді

$$\begin{cases} \xi_B - \xi_A = -\frac{1}{G} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_B - \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_A \right], \\ \eta_B - \eta_A = -\frac{1}{G} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)_B - \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)_A \right]. \end{cases}$$

Щоб знайти різниці похідних потенціалу, представимо повний диференціал

$$d\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} dy + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} dz \quad (12.58)$$

та визначимо інтеграл між точками A і B . В результаті отримаємо:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_B - \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_A = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} dx + \int_{y_A}^{y_B} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} dy + \int_{z_A}^{z_B} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} dz. \quad (12.59)$$

Аналогічно

$$\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_B - \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_A = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} dx + \int_{y_A}^{y_B} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} dy + \int_{z_A}^{z_B} \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} dz. \quad (12.60)$$

Припустимо, що A і B – близько розташовані точки, відстань між якими становить десятки чи сотні метрів, і другі похідні між точками змінюються лінійно.

Замінюючи під знаком інтеграла похідні їх середніми значеннями, для різниці ухилення схилу отримаємо

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_B - \xi_A = -\frac{1}{G} \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_m (x_B - x_A) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)_m (y_B - y_A) + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \right)_m (z_B - z_A) \right], \\ \eta_B - \eta_A = -\frac{1}{G} \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)_m (x_B - x_A) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_m (y_B - y_A) + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} \right)_m (z_B - z_A) \right]. \end{array} \right. \quad (12.61)$$

Похідні $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ і $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$ за вимірами з гравітаційним варіометром окремо не визначають. За результатами вимірювань можна знайти лише різницю $W_\Delta = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$. Введемо це значення однієї з кривизн поля в (12.21). Для цього помножимо перше з рівнянь системи на $\sin A_{AB}$, а друге – на $\cos A_{AB}$ та знайдемо різницю між першим та другим рівнянням. Врахуємо при цьому, що $x_B - x_A = S_{AB} \cos A_{AB}$, $y_B - y_A = S_{AB} \sin A_{AB}$, $z_B - z_A = \Delta h_{AB}$, де S_{AB} – відстань між точками A і B , A_{AB} – азимут лінії AB , Δh_{AB} – перевищення між точками A і B .

Отримаємо

$$(\xi_B - \xi_A) \sin A_{AB} - (\eta_B - \eta_A) \cos A_{AB} = \frac{S_{AB}}{G} \left[\frac{1}{2} W_\Delta \sin 2A_{AB} + W_{xy} \cos 2A_{AB} \right] - (W_{xz} \sin A_{AB} - W_{yz} \cos A_{AB}) \frac{\Delta h_{AB}}{G}. \quad (12.62)$$

В (12.22) всі величини в правій частині отримують з варіометричних спостережень як середнє між точками A і B . Для визначення невідомих $(\xi_B - \xi_A)$ і $(\eta_B - \eta_A)$ в рівнянні (12.62) додаємо до точок A і B точку C та представимо рівняння (12.62) для ліній AC і BC .

$$\begin{aligned} (\xi_C - \xi_B) \sin A_{BC} - (\eta_C - \eta_B) \cos A_{BC} &= \frac{S_{BC}}{G} \left[\frac{1}{2} W_\Delta \sin 2A_{BC} + \right. \\ &+ \left. W_{xy} \cos 2A_{BC} \right] - (W_{xz} \sin A_{BC} - W_{yz} \cos A_{BC}) \frac{\Delta h_{BC}}{G}, \\ (\xi_C - \xi_A) \sin A_{AC} - (\eta_C - \eta_A) \cos A_{AC} &= \\ &= \frac{S_{AC}}{G} \left[\frac{1}{2} W_\Delta \sin 2A_{AC} + W_{xy} \cos 2A_{AC} \right] \\ &- (W_{xz} \sin A_{AC} - W_{yz} \cos A_{AC}) \frac{\Delta h_{AC}}{G}. \end{aligned} \quad (12.63)$$

У рівняннях (12.62) – (12.63) – шість невідомих: ξ_A , ξ_B , ξ_C , η_A , η_B , η_C .

При обробці результатів геодезичних вимірювань можна використовувати місцеву систему координат, орієнтовану у напрямку вертикальної лінії у вихідному пункті мережі. У цьому випадку ухилення схилю у вихідному пункті дорівнюватимуть нулю та число невідомих у рівняннях (12.62) – (12.63) зменшиться до чотирьох. Рівняння типу (12.62) складають послідовно вздовж сторін трикутників, утворених пунктами варіометричної зйомки. Для кожної точки додаються дві невідомі різниці складових ухилення схилю і два рівняння, тому в мережі з n точок невідомих буде на одиницю більше кількості рівнянь. Для визначення всіх складових ухилень схилю потрібно додати ще одне рівняння. Таким рівнянням може бути відома різниця складових ухилень схилю, яку можна знайти як різницю топографічних ухилень схилю.

Різницю складових ухилень схилю можна знайти безпосередньо за формулами (12.61), якщо відома похідна W_{zz} – вертикальний градієнт сили тяжіння. Використовуючи відоме рівняння

$$W_{xx} + W_{yy} + W_{zz} = 2\omega^2, \quad (12.64)$$

де ω – кутова швидкість обертання Землі, можна окремо знайти похідні W_{xx} і W_{yy} :

$$\begin{cases} 2W_{xx} = 2\omega^2 - W_{zz} - W_{\Delta}, \\ 2W_{yy} = 2\omega^2 - W_{zz} + W_{\Delta} \end{cases} \quad (12.65)$$

Та обчислити різниці $(\xi_B - \xi_A)$ та $(\eta_B - \eta_A)$.

Точність визначення складових ухилення схилю за другими похідними m_{ξ} і m_{η} можна обчислити за формулою:

$$m_{\xi, \eta} = \frac{\sqrt{2} \cdot m \cdot S}{G},$$

де $m_{\xi, \eta}$ – СКВ визначення складових ухилення схилю;

m – похибка варіометричних спостережень;

S – відстань між пунктами;

G – нормальна сила тяжіння.

Сучасна точність варіометричних вимірювань дозволяє визначити ξ і η на відстані 30 – 40 км з помилкою не гірше 0,5". Основним джерелом похибок щодо різниці ухилення схилю за вимірами других похідних потенціалу є припущення про лінійну

зміну других похідних між сусідніми точками, використане при виведенні формули (12.61).

Перевага даної методики в порівнянні з традиційною з використанням гравіметричної зйомки полягає в тому, що варіометричні виміри достатньо виконати тільки в межах робочої ділянки. Тому дана методика може бути рекомендованою при розв'язку інженерно-геологічних задач.

12.7. ВПЛИВ ВАРІАЦІЙ ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ НА РЕЗУЛЬТАТИ ПОВТОРНИХ ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ

Вивчення деформацій земної кори методом повторних геодезичних вимірів на геодинамічних полігонах (ГДП) ґрунтується на вивченні факторів, що реально спотворюють картину деформацій. Оскільки результати геодезичних вимірювань залежать від стану гравітаційного поля, до таких факторів слід віднести і варіації гравітаційного поля (ВГП) у часі, в результаті яких цикли геодезичних вимірювань на ГДП, що порівнюються, виявляться виконаними при різних станах гравітаційного поля.

Як відомо, ВГП (розділ 2) можуть бути викликані зміною взаємного розташування планет Сонячної системи щодо Землі, насамперед Місяця та Сонця, міграцією підземних вод, переміщенням мас внаслідок великих вулканічних вивержень, а також техногенними переміщеннями мас на земній поверхні.

Найбільш відчутно спотворення за ВГП можуть проявитися при аналізі результатів повторного нівелювання, оскільки геометричне нівелювання дає відстань між рівними поверхнями потенціалу сили тяжіння, що проходять через стоянки нівеліра і рейок. Зі зміною значень сили тяжіння змінюються і положення рівнів поверхонь, а отже, перевищення при повторному нівелюванні також змінюються (рис. 12.1). Важливо, що зміни перевищень можуть виникнути навіть за абсолютної нерухомості земної кори.

Для правильного аналізу результатів повторних нівелювань необхідно мати на увазі, що дані геометричного нівелювання залежать від шляху нівелювання між досліджуваними точками та мають ясний фізичний сенс тільки в тому випадку, якщо вони

обробляються спільно з результатами вимірювання сили тяжіння g вздовж нівелірних ліній. Покажемо це за допомогою таких міркувань.

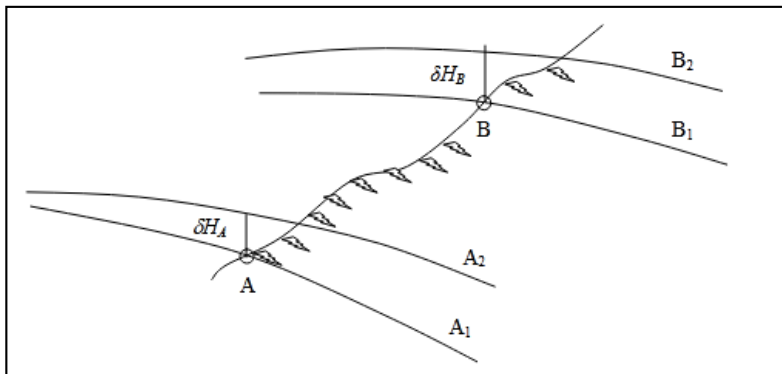


Рис.12.1. Радіальне зміщення рівневих поверхонь реперів А і В внаслідок зміни мас води в водосховищі

Різниця потенціалів W сили тяжіння в деякій точці A земної поверхні та точці O початку обрахунку висот у рівня моря можна представити формулою

$$W_O - W_A = \int_{OA} g dh \approx \sum_{OA} g \Delta h, \quad (12.66)$$

де dh - елементарне нівелірне перевищення;

Δh - перевищення між деякими проміжними реперами по дорозі від точки O початку обрахунку до точки A .

Криволінійний інтеграл або сума у формулі (12.66) мають бути обчислені вздовж шляху нівелювання. Якщо між епохами нівелювання відбулася зміна різниці потенціалів, то з цієї формули дану зміну можна представити як

$$\delta(W_O - W_A) = \int_{OA} (\delta g \cdot dh + g \cdot \delta dh) \approx \sum_{OA} (\delta g \cdot \Delta h + g \cdot \Delta dh), \quad (12.67)$$

де $\delta(W_O - W_A)$ - зміна різниці потенціалів сили тяжіння;

δg - зміна сили тяжіння;

δdh і Δdh - зміна відповідних перевищень.

З (12.67) видно, що зміна різниці потенціалів сили тяжіння, що спостерігається між різними епохами нівелювання, може бути

спричинена як змінами самої сили тяжіння (δg), так і змінами перевищень (Δdh).

У рівнинних районах при спостережених змінах нівелірних перевищень і сили тяжіння переважаючий вплив на зміну потенціалів буде здійснювати останній член під знаком суми у формулі (12.67).

З наведених розрахунків випливає, що для рівнинних районів, наприклад, України (за умови відсутності техногенних переміщень мас), формулу (12.67) можна спростити і переписати як

$$\delta(W_O - W_A) \approx \sum_{OA} (g \cdot \delta dh). \quad (12.68)$$

Отже, вертикальні переміщення земної кори тут будуть відповідати зміні різниці потенціалів, що виявляється з повторних нівелювання, і в цьому випадку не треба дбати про повторні вимірювання сили тяжіння.

Однак у строгому сенсі, виходячи з формули (12.67), можна сказати, що тільки при незмінному гравітаційному полі результати повторних нівелювань будуть відповідати зміні висот.

Насправді ж при обробці результатів повторного нівелювання слід пам'ятати, що поправки зміни взаємного становища Землі, Місяця і Сонця, так звані приливні поправки, досягають істотної величини лише у ходах великої протяжності. Тому питання щодо обліку цих поправок у результати повторного нівелювання на ГДП зазвичай не виникає.

Однак неприливні ВГП, тобто зумовлені техногенними переміщеннями мас, виверженням вулканів, землетрусами, міграцією підземних вод тощо, можуть досягти значних величин і викликати суттєві спотворення в досліджуваних деформаціях, якщо не врахувати їх у результатах повторних геодезичних вимірів.

Питанню вивчення неприливних змін сили тяжіння на ГДП у всьому світі приділяється велика увага. У Японії це питання досліджується за допомогою повторних гравіметричних вимірів, починаючи з 50-х років минулого сторіччя. Широко поширені подібні дослідження у Північній Ісландії, Мексиці, США, Німеччині, країнах колишнього Союзу та ще низці інших держав світу. В останні роки до них активно залучається супутникова альтиметрія, що дозволяє фіксувати висоти геоїду (квазігеоїду), а отже, і їх зміни, з точністю в кілька сантиметрів.

Виконані дослідження змін сили тяжіння на геодинамічних полігонах показали, що ці зміни можуть становити десятки мкГал/рік. Впевнено зафіксовано зміни сили тяжіння, що викликаються сукупністю явищ, що передують або супроводжують виверження вулканів. У ряді випадків зафіксовано зміну гравітаційного поля до і після землетрусів великої сили, що відбулися, які викликали великі вертикальні переміщення земної поверхні. Тому відомості про зміни локального гравітаційного поля, отримані за допомогою повторних гравіметричних та супутникових альтиметричних вимірювань, можуть розглядатися як один із видів передвісників землетрусів та виверження вулканів.

Найбільші зміни сили тяжіння на планеті зафіксовані внаслідок переміщень мас, зумовлених діяльністю людини. Доступні вимірювання варіацій сили тяжіння спостерігаються при експлуатації нафтових і газових родовищ, геотермальних полів, відкачуванні води, видобутку вугілля, а також заповненні та спуску водосховищ. За величиною ці зміни можуть досягти кількох мГал.

12.8. ГРАВІМЕТРИЧНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ПОПРАВКИ В НІВЕЛЮВАННЯ ЗА НЕПАРАЛЕЛЬНІСТЬ РІВНЕВИХ ПОВЕРХОНЬ

Прикладом таких досліджень можуть слугувати гравіметричні вимірювання на пунктах опорної геодезичної мережі Дністровської гідроакумулюючої електростанції (ДГАЕС), яка є однією з найбільших у світі [139]. Її призначення – регулювання частоти та графіка навантажень в енергетичній системі України. Збудоване штучне водосховище об'ємом майже 40 млн. м³ і на теперішній час протягом доби його об'єм змінюється трохи менше, ніж наполовину. Така циклічність зміни гідродинамічних навантажень може призвести до виникнення аварійних ситуацій, завдяки цьому існує потреба постійного геодезичного і геофізичного моніторингу цього об'єкту та прилеглих до нього територій [140].

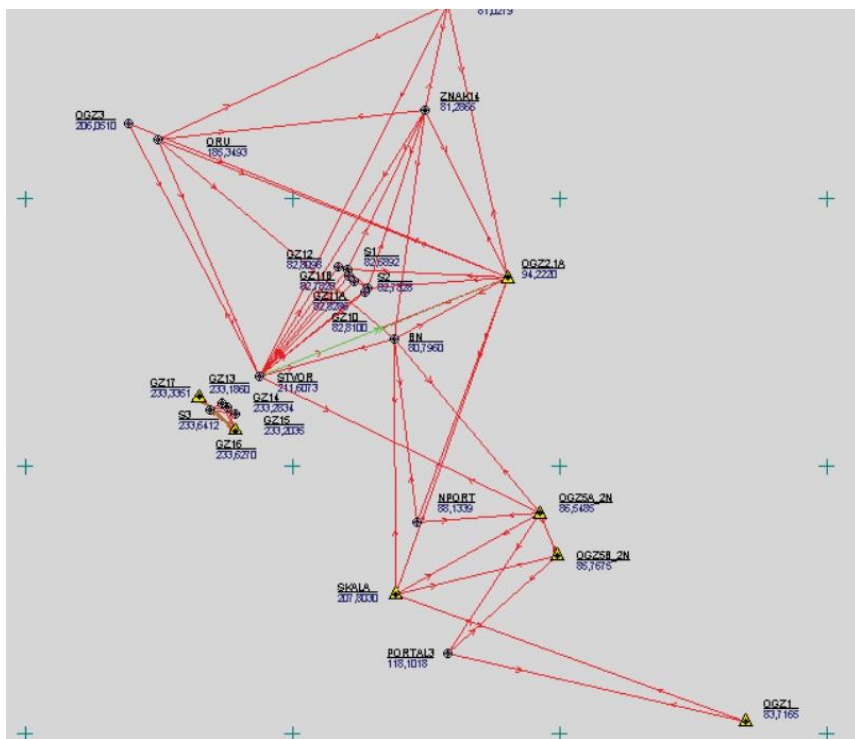


Рис. 12.2 Схема пунктів геодезическої мережі [139]

Проведення такого виду досліджень передбачає гравіметричні вимірювання на пунктах опорної геодезичної мережі з використанням високоточних гравіметрів. Для визначення поправок у нівелювання [138] було виконано сім гравіметричних рейсів, які охоплювали десять пунктів з відомими геодезичними координатами (рис. 12.2). Значення сили тяжіння $\vec{g}$ було обчислено із використанням глобальної моделі гравітаційного поля Землі EGM2008 [138] до 2190 ступеня/порядку та приведено до основного базового пункту «Створний», де воно склало $g_{\text{Створний}} = 980902,57$ мГал.

Для обчислення різниці нормальних висот між реперами i заднім та k – попереднім була використана формула:

$$\begin{aligned} H_k^\gamma - H_i^\gamma &= \Delta h_b + 1,020[(\gamma_{oi} - \gamma_{ok})H_m^\gamma + (g - \gamma)_m \Delta h_b] = \\ &= \Delta h_b + \delta h \end{aligned} \quad (12.69),$$

де Δh_b і $(g - \gamma)_m$ – сума вимірних перевищень і середня аномалія сили тяжіння (у вільному повітрі) між реперами i , k ; γ_{oi} , γ_{ok} – значення нормальної сили тяжіння на нормальному еліпсоїді на широтах цих реперів, M/c^2 , $H_m^\gamma = 0,5(H_i^\gamma + H_k^\gamma)$ – середня висота між заднім k і переднім i реперами, значення якої з точністю до 1 м отримують із попередніх обчислень.

Для визначення аномалій (g, γ) , було використано карти аномалій сили тяжіння.

Така методика дозволяє обчислювати поправки у нівелювання за непаралельність рівневих поверхонь.

Подальші розрахунки дозволили встановити, що відповідна поправка у рейсах складає від 0,089 мм до 1,517 мм.

Це дало можливість стверджувати, що для деяких ліній мережі поправка за непаралельність рівневих поверхонь перевищує допустиму систематичну похибку нівелювання першого класу вдвічі. Тому під час опрацювання нівелювання першого класу на відповідних лініях необхідно брати до уваги цю поправку, оскільки неврахування останньої буде призводити до збільшення систематичної похибки нівелювання пропорційно до довжини ходу, що буде спричиняти отримання недостовірних результатів про висоти та зміщення геодезичних пунктів.

12.9. ПРИНЦИПИ РОЗРОБКИ МЕТОДИКИ ПРОВЕДЕННЯ ГРАВІМЕТРИЧНОЇ ЗЙОМКИ ПІД ЧАС ВИРІШЕННЯ ГЕОДЕЗИЧНИХ ЗАВДАНЬ

Розрахувати гравіметричну зйомку – це означає встановити на етапі проектування площу цієї зйомки, оптимальну щільність пунктів та точність виміру. Відправним пунктом при розрахунку гравіметричної зйомки є призначення. Так при проектуванні опорної мережі однією з основних умов є зручне розташування та шляхи під'їзду до гравіметричного пункту. Якщо зйомка проектується для

розвідувальних геолого-геофізичних цілей, то під час розрахунку враховується геологічна будова ділянки робіт, і навіть особливості гравітаційного поля. Якщо зйомка проектується для геодезичних цілей, то основним критерієм є необхідна точність виконання геодезичних робіт і пов'язана з нею точність визначення аномалій сили тяжіння, ухилень виска та аномалій висот. В інженерно-геодезичних роботах може виникнути необхідність проектування зйомки для обчислення складових ухилень виску у великій кількості близько розташованих точок.

Розрахунок зйомки для обчислення ухилень виска виконують наступним чином. При обчисленні гравіметричних ухилень схилу за формулами Венінг-Мейнеса передбачається, що аномалії сили тяжіння відомі у всіх точках поверхні інтегрування. Практично ухилень виска завжди обчислюють за результатами дискретної гравіметричної зйомки, використовуючи результати зйомки у вигляді гравіметричної карти ізоаномал. Середні аномалії сили тяжіння на елементарних майданчиках, на які розбивають поверхню інтегрування при обчисленні ухилень виска, будуть визначатися з помилкою, що дорівнює повній помилці інтерполяції m_u . Помилка визначення ухилень виску $m_{\xi,\eta}$ визначиться за формулою

$$m_{\xi,\eta}^2 = \left(\frac{\rho}{2\pi\gamma}\right)^2 \sum m_{\Delta g_{i,k}}^2 \left[\ln \frac{r_{i+1}}{r_i} (\sin A_k - \sin A_{k-1}) \right]^2. \quad (12.70)$$

В (12.68) $m_{\xi,\eta}$ – помилка визначення аномалії сили тяжіння на елементарній трапеції, що обмежена радіусами r_i та r_{i+1} та променями з азимутами A_{k-1} та A_k .

За цією формулою обчислюються похибки визначення ухилу схилу, викликані дискретністю гравіметричної зйомки, тому вона використовується для розрахунку гравіметричної зйомки.

Проектування зйомки для обчислення ухилень схилу із заданою точністю виконують наступним чином. Напишемо для похибки аномалії емпіричну формулу

$$m_{\Delta g} = c(\sqrt{x} + \sqrt{y}),$$

де x і y розміри ділянки, на якій знаходиться один гравіметричний пункт, c – коефіцієнт. Виразимо x і y через r_i .

Для цього прийемо $x = y = r_{i+1} - r_i$, де $(r_{i+1} - r_i)$ - ширина зони. Для розбиття зони на майданчики встановимо, що середня лінія елементарного майданчику дорівнювала її висоті у (рис. 12.3).

Число майданчиків в зоні знаходимо з умови $x = y$.

$$(r_{i+1} - r_i) = \frac{\pi(r_{i+1} + r_i)}{n},$$

звідки $n = \pi \frac{(r_{i+1} + r_i)}{(r_{i+1} - r_i)}$.

З урахуванням наведеного раніше для похибки аномалії маємо:

$$m_{\Delta g} = c\sqrt{y} = 2c\sqrt{r_{i+1} - r_i}. \quad (12.71)$$

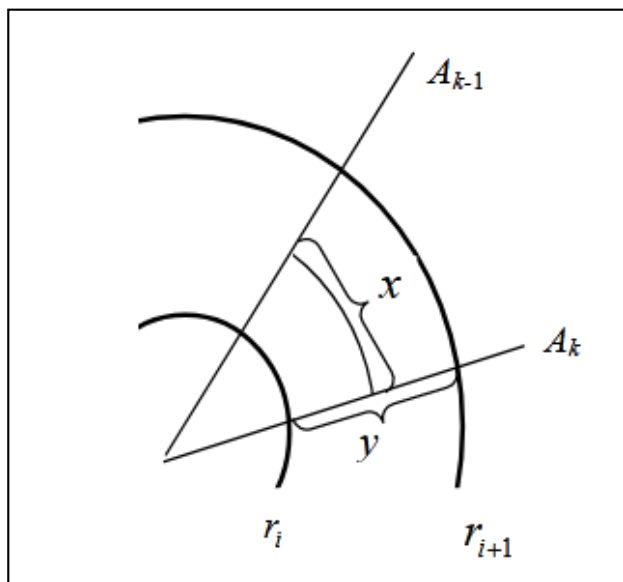


Рис. 12.3. Ілюстрація до проектування гравіметричної зйомки

Різницю $\sin A_k - \sin A_{k-1}$ виразимо через r_i . Тоді

$$\begin{aligned} \sin A_k - \sin A_{k-1} &= 2 \sin \frac{A_k - A_{k-1}}{2} \cos \frac{A_k + A_{k-1}}{2} \\ &= 2 \sin \frac{A_k - A_{k-1}}{2} \cos A_{\text{сеп.}} \end{aligned}$$

Тому для однієї зони маємо

$$\sum (A_k - A_{k-1})^2 = 4 \sin^2 \frac{A_k - A_{k-1}}{2} \sum_k \cos^2 A_{\text{сер.}}$$

Для визначення $\sum_k \cos^2 A_{\text{сер.}}$ роблять наступне. При достатньо великій кількості майданчиків у зоні можна записати

$$\frac{1}{\Delta A} \sum_k \cos^2 A_{\text{сер.}} \Delta A \approx \int_0^{2\pi} \cos^2 A dA = \frac{\pi}{\Delta A},$$

$$\text{де } \Delta A = A_k - A_{k-1} = \frac{2\pi}{n} = 2 \frac{r_{i+1} - r_i}{r_{i+1} + r_i}.$$

Для однієї зони отримаємо

$$\sum (\sin A_k - \sin A_{k-1})^2 = 2\pi \frac{r_{i+1} - r_i}{r_{i+1} + r_i} \sin^2 \frac{A_k - A_{k-1}}{2} \sum_k \cos^2 A_{\text{сер.}} \quad (12.72)$$

Підставляючи (12.67) в (12.70) і (21.68), отримаємо

$$m_{\xi, \eta}^2 = \left(\frac{2\rho^2 c^2}{\pi \gamma} \right)^2 \sum (r_{i+1} + r_i) \ln^2 \frac{r_{i+1}}{r_i} \sin^2 \frac{r_{i+1} - r_i}{r_{i+1} + r_i}. \quad (12.73)$$

Радіуси зон r_i знаходять за умови мінімуму похибки ухилення виску. Ця умова приводить до системи рівнянь виду

$$\frac{\partial m_{\xi, \eta}^2}{\partial r_i} = 0. \quad (12.74)$$

Для розв'язку системи задають допустиме значення похибки ухилення виску та радіус гравіметричної зйомки.

Подібні розрахунки виконують для обчислення ухилень виску з високою точністю (наприклад, для обчислення ухилень виску з похибкою близько 0,03"). Така зйомка проектується для контролю координат астрономічних пунктів. Зйомка згущення запроєктована у радіусі 48,5 км. Число додаткових гравіметричних пунктів, визначених навколо астропунктів, становлять від 201 до 363.

Розрахована описаним способом зйомка буде нерівномірною за площею, оскільки вплив аномалій сили тяжіння на ухилення виску зменшується зі збільшенням відстані r . Тому така методика проектування незручна в тому випадку, коли потрібно обчислювати ухилення виску в декількох близьких точках. Виходячи з цього, при інженерно-геодезичних роботах, як правило, проектують рівномірну гравіметричну зйомку, обмежуючись по площі ближніми зонами (зазвичай 48,5 км). При проектуванні цієї рівномірної зйомки використовують формулу Молоденського [50]:

$$m''_{\vartheta} = 0,15 m_{\Delta g}, \quad (12.75)$$

де m''_{ϑ} – помилка визначення ухилення виску;

$m_{\Delta g}$ – помилка визначення аномалій сили тяжіння;
0,15 – експериментальний коефіцієнт, який вже має необхідну розмірність (сек/мГал).

Оскільки гравіметрична зйомка – дискретна, досвід показав, що похибка визначення аномалій сили тяжіння, здебільшого, зумовлена помилками інтерполяції. Тому для розрахунків похибки визначення аномалій сили тяжіння приймають рівній похибці інтерполяції (E):

$$m_{\Delta g} = E, \quad (12.76)$$

При цьому Молоденський пропонує формулу, за якою обчислюється похибка інтерполяції.

$$E = k \cdot x, \quad (12.77)$$

де x – відстань між гравіметричними пунктами в км,

k – експериментальний коефіцієнт, що має необхідну розмірність, який приймається для рівнинних районів $k = 0,11$, для гірських у 2 – 3 рази вище, тобто до $k = 0,22$ або до $k = 0,33$.

Таким чином, нами розглянуто приклади використання гравіметрії в геодезії, які застосовуються для уточнення форми Землі, врахування неоднорідності гравітаційного поля в результатах геодезичних вимірів, для врахування впливу варіацій гравітаційного поля на результати повторних геодезичних вимірів, для визначення аномалій висот та ухилень схилу за гравіметричними тощо.

13. ЗАСТОСУВАННЯ ГРАВІМЕТРІЇ ДЛЯ ВИРІШЕННЯ ГЕОЛОГІЧНИХ ЗАДАЧ

13.1. ВИВЧЕННЯ ГЛИБИННОЇ БУДОВИ ЗЕМНОЇ КОРИ І ВЕРХНОЇ МАНТІЇ

13.1.1. Тектонічне районування геосинклінальних областей

Тектонічне районування – це виділення природних ділянок земної кори або тектоносфери на основі їх історико-геологічного розвитку і морфологічних особливостей, що встановлюються за результатами комплексного геолого-геофізичного вивчення. Тектонічне районування є найважливішою складовою частиною геологічного картування, яке служить для класифікації ділянок земної кори за ознаками їхньої будови та історії геологічного розвитку. Вони різняться за своєю геологічною будовою і історією розвитку і мають назву регіональних структур. Їм притаманні великі горизонтальні розміри (іноді понад тисячу кілометрів) і значна глибина закладання, а також прояв їх не тільки в верхніх шарах, але й в глибоких горизонтах земної кори. За допомогою геофізичних методів, зокрема гравіметрії, ставлять і вирішують задачу виділення крупних глибинних структурних елементів земної кори, що відігравали суттєву роль в історії геологічного розвитку того або іншого регіону і, які визначали формування поверхневих структур і пов'язаних з ними родовищ корисних копалин.

До таких структур відносять блоки земної кори різних порядків, які розділені глибинними розломами. Блоками першого порядку на материках є геосинкліналі і платформи. В межах геосинкліналей блоки другого порядку відповідають серединним масивам, в межах платформ – щитам, антеклізам і синеклізам. Блокам нижчих порядків відповідають цілком визначені поверхневі структури.

На сьогоднішній день розроблені багаточисельні формалізовані прийоми тектонічного районування, що базуються на оцінках полів певним набором статистичних або детермінованих характеристик, і використанням для їх наступної класифікації теорії розпізнавання образів.

Велика роль відводиться вивченню взаємозв'язку просторової орієнтовки лінійних тектонічних структур з віком. Вирішення цієї проблеми повинно дозволити в складних тектонічних структурах, що неодноразово зазнавали впливу тектонічних активізацій, виділяти окремі етапи їх формування.

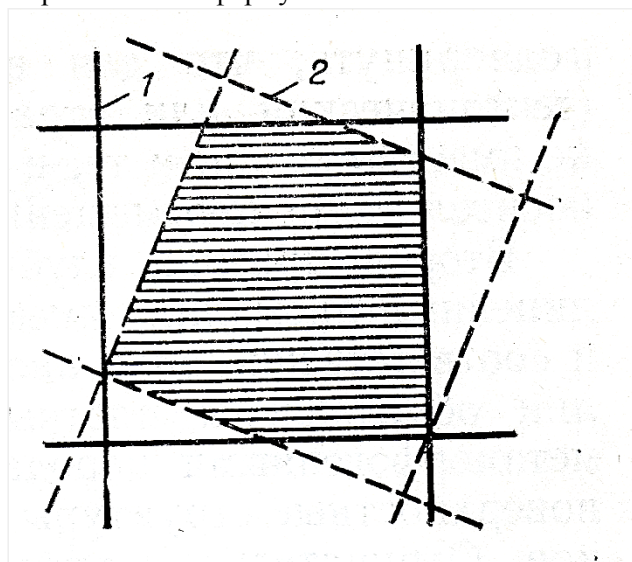


Рис.13.1. Схема виникнення блоків земної кори в результаті двох послідовних активізацій.

Блоки: 1 – першої активізації; 2 – другої активізації.

В процесі кожної тектонічної активізації Землі виникає певним чином орієнтована система розломів земної кори, взаємний перетин яких утворює систему блоків, що відповідають даній тектонічній епосі [141]. Наступні тектонічні активізації порушують раніше сформовану систему блоків, утворюючи нові. На рис.13.1 показана схема формування блоків при двох послідовних активізаціях. За

допомогою гравіметрії досить впевнено виділяються блоки, що є сумарним результатом всіх попередніх тектонічних активізацій Землі, обмежені різновіковими розломами різних напрямків. Для геологічних цілей, зокрема, для відтворення історії тектонічного розвитку регіону, яка необхідна при прогнозуванні родовищ корисних копалин, більш важливим є виявлення не сучасних блоків, а так відомих палеоблоків або точніше – систем розломів, що їх утворюють. Сучасна гравіметрія дає можливість досить успішно вирішувати такі задачі.

Параметри поверхневих структур, які отримані за допомогою гравіметричних спостережень, - основа для відтворення історії їх формування, зокрема, взаємозв'язку їх з глибинними структурами. Важливо на всіх етапах інтерпретації гравітаційних аномалій для цілей тектонічного районування чітко розділяти об'єктивно отримані дані від їх суб'єктивного тлумачення.

Геосинклінальні райони характеризуються високою рухливістю, інтенсивним проявом в їх межах альпійського орогенезу молодих (мезозой, кайнозой) магматичних порід, розвитком інтенсивно розчленованого рельєфу, високою сейсмічністю. Регіональні структури геосинклінальних областей, звичайно виражені (прямо або опосередковано) в їхньому рельєфі, представляють крайові або межгірські прогини, мегаантиклінорії, а в межах останніх – окремі крупні антиклінорії і синклінорії, зони розломів і окремі крупні розломи, магматичні комплекси і т.п.

В гравітаційному полі геосинклінальні області проявляються інтенсивними (перші сотні мілігал) регіональними гравітаційними аномаліями як від'ємними, що характерні для крупних піднять, так і додатними, приурочених до западин, що представляються нерідко сучасними морськими басейнами.

При тектонічному районуванні геосинклінальних областей геофізичні методи, в тому числі і гравірозвідка, можуть вирішувати наступні задачі:

1. з'ясування історії геологічного розвитку і загального структурного плану території досліджень;
2. встановлення місцезонашування і взаємозв'язку регіональних структур;
3. вивчення характеру окремих крупних структур.

Гравірозвідка має важливе значення при вирішенні цих задач. Регіональні гравітаційні аномалії геосинклінальних областей мають визначене історико-геологічне значення. З цією метою слід розглянути основні закономірності історії геологічного розвитку геосинклінальних областей. Кожна геосинклінальна область в своєму розвитку звичайно проходить дві стадії: першу, впродовж якої відбувається опускання, і другу, впродовж якої переважають підняття. Перехід від першої стадії до другої представляється загальною інверсією геотектонічних умов. Під час інверсії відбувається перерозподіл зон підняття і занурення: серед доінверсійних прогинів утворюються центральні підняття, що поступово розширюються і захоплюють всю територію прогинів, ап. Доінверсійні підняття частково або повністю перетворюються в прогини. На другій стадії розвитку геосинклінальної області досить інтенсивно проявляються складко утворювальні рухи. В зонах спряження різнойменних структур геосинклінальної області і в інших місцях неодноразово утворюються тектонічні розриви і по цим порушенням мігрують до поверхні магматичні породи.

Співставлення багаточисельних гравітаційних даних по геосинклінальним областям з палеографічними картами і розрізами показує наступне: регіональні гравітаційні аномалії звичайно відповідають за своїм місцезорозташуванням найбільш інтенсивно проявленим регіональним структурам до інверсійної стадії розвитку геосинклінальної області. Такого роду відповідність є прямим, тобто гравітаційні мінімуми відповідають в плані доінверсійним прогинам, а точніше тим ділянкам, де ці структури де ці структури знаходилися в період їх найінтенсивнішого розвитку.

Разом з тим вказані типові регіональні аномалії безпосередньо пов'язані з нині існуючими глибинними структурами земної кори: мінімуми – прогинами, максимуми – з підняттями границі Мохоровичича. Звідси можна зробити висновок, що і глибинні структури земної кори геосинклінальних областей, що виділяються за регіональними гравітаційними аномаліями, в своєму походженні пов'язані, мабуть, з доінверсійним етапом розвитку цих областей. Можна передбачати, що структури до інверсійного циклу були найбільш інтенсивно виражені в глибоких шарах земної кори і не були перетворені в процесі інверсії, яка змінила знак більшості

структур в верхніх горизонтах. Відповідно, «коріння гір» і підняття глибинних шарів під сучасними западинами можливо, вочевидь, розглядати як релікти доінверсійного структурного рельєфу.

Класичним прикладом зв'язку гравітаційних аномалій з доінверсійними структурами є Східні Карпати, де гравітаційний мінімум і доінверсійний прогин розташовуються на північно-східному схилі сучасного Карпатського гірського хребта (рис.13.2)

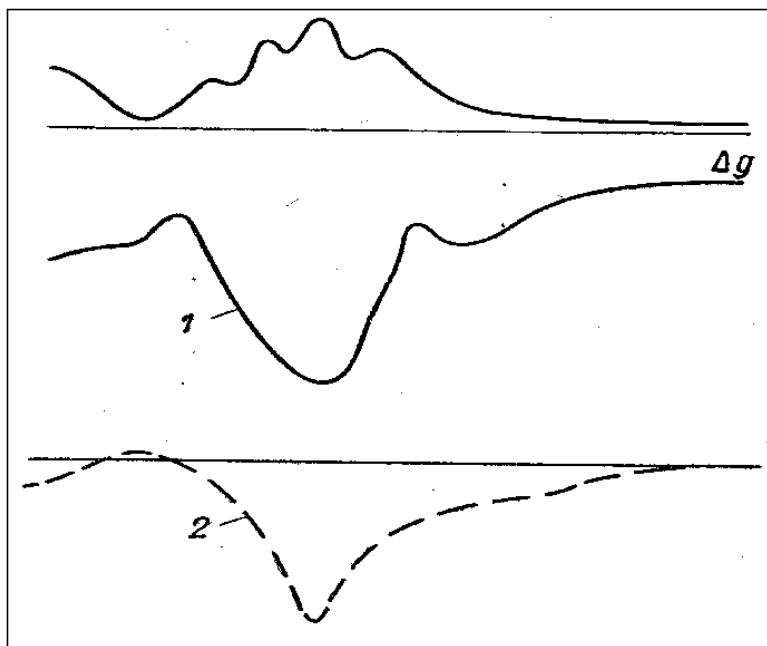


Рис.13.2. Відповідність місцезрешування регіонального гравітаційного мінімуму (1) і до інверсійного прогину (2) для району Східних Карпат.

Розташування глибинних структур земної кори, яке встановлюється за гравітаційними аномаліями, визначає і загальний структурний план геосинклінальних областей. Якщо характер ізоаномал сили тяжіння, а відповідно, і глибинних структур має витриманий лінійно-смуговий характер, то й таке простягання мають і окремі структури, що розташовуються звичайно

кулісоподібно вздовж смуги гравітаційних аномалій (рис. 13.3). Зовсім інша ситуація складається на «периклиналях» гравітаційних аномалій або в тих місцях, де ці зони в плані мають приблизно ізометричну форму: в таких випадках осі структур мають майже нормальне положення по відношенню до ізоаномал сили тяжіння.

При більш детальній гравітаційній зйомці в геосинклінальних областях нерідко відмічаються локальними аномаліями і окремі структури цих антикліноріїв, синкліноріїв, крупних зон розлому, тощо. В ряді випадків добре виділяються гравітаційними мінімумами помірної інтенсивності (-40, - 60 мГал) передгірські прогини на границі геосинклінальних областей з прилеглою платформою (рис.13.4-13.5).

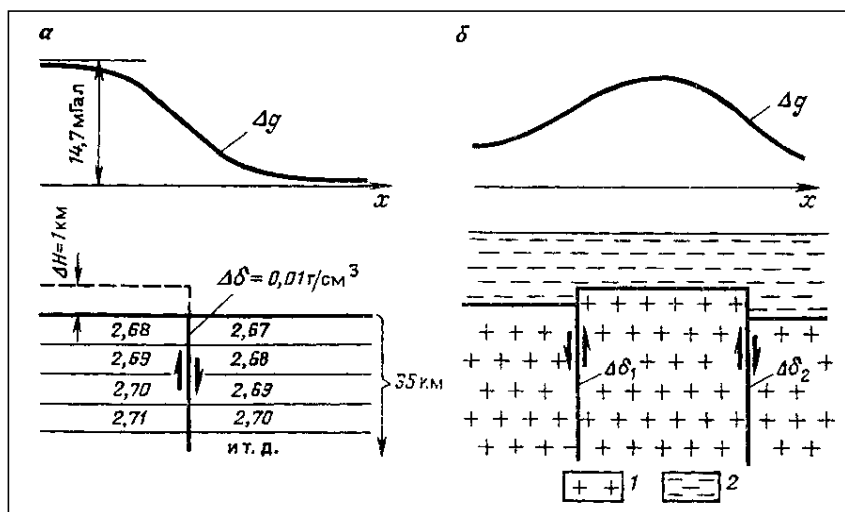


Рис. 13.3. Схема виникнення вертикальної границі густини в земній корі (а) і модель верхньої частини земної кори в умовах платформ (б)

1 – фундамент, 2 – хохол

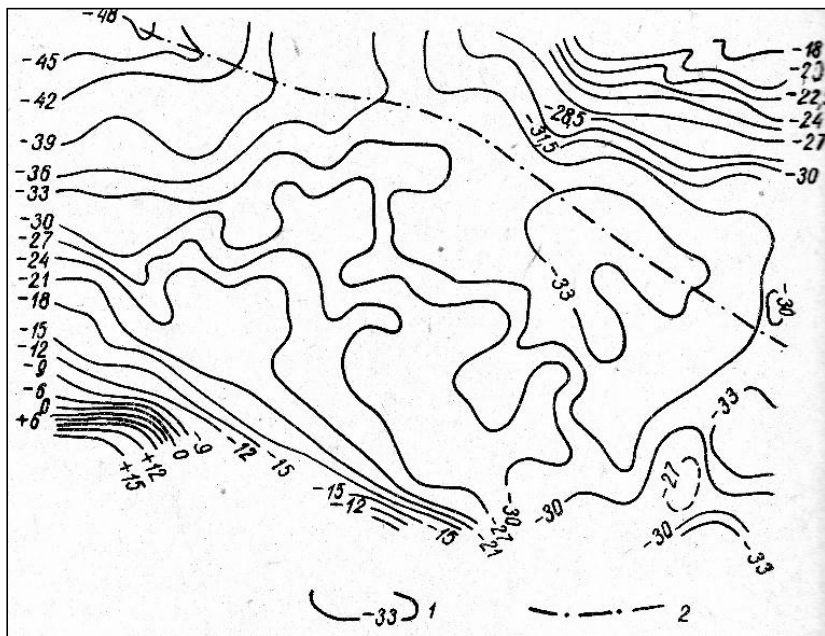


Рис.13.4. Гравітаційний мінімум над передгірським прогином
1 – ізоаномали сили тяжіння; 2 – вісь прогину.

В тих випадках, коли антиклінорій складчастої області виявляється насунутим на область крайового прогину, над ними звичайно спостерігається загальний мінімум з віссю, яка розташована в крайовій частині насунутого антиклінорію.

Провідними вченими-гравіметристами було встановлено, що глибинні структури мезо-кайнозойського віку, що виділяються в геосинклінальних областях за гравітаційними аномаліями, можуть мати доволі визначене значення для металогенічного районування: до зон гравітаційних максимумів (тобто до піднять глибинних шарів земної кори) приурочене в основному зруденіння, що пов'язане з ультраосновною і основною магмами (хром, нікель, мідь, золото і срібло, цинк, ртуть), а до мінімумів (тобто до прогинів глибинних шарів) – зруденіння лейкократового типу, пов'язане переважно з кислою магмою (свинець, цинк, молібден, вольфрам, олово).

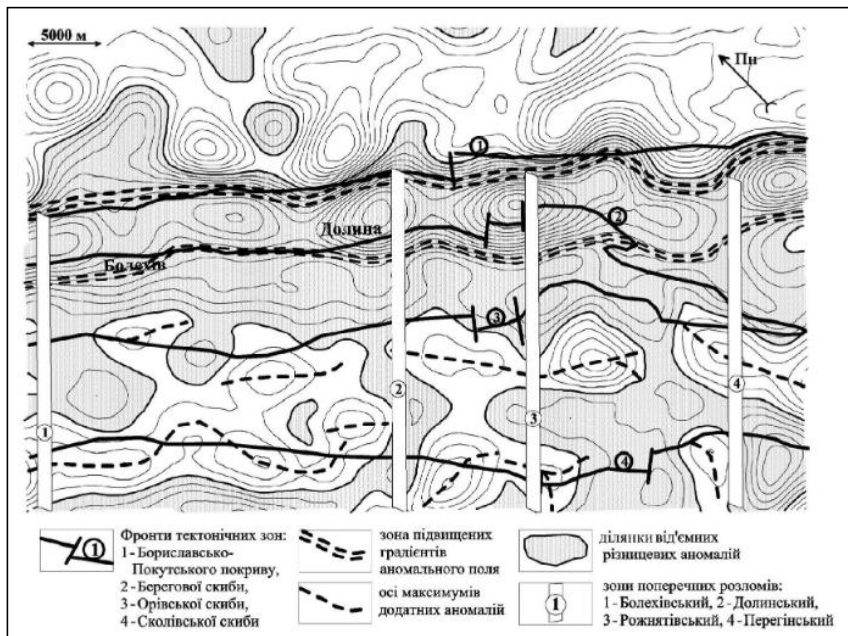


Рис. 13.5. Ділянка Болехів – Долина. Різницеві аномалії поля сили тяжіння ($R_1 - R_2 = 2500 \text{ м} - 5000 \text{ м}$) за [142]

Проте аналогічні твердження характерні і для структур більш раннього утворення (герцинський орогенез і більш древні структури).

13.1.2. Тектонічне районування платформних областей

Для тектонічного районування щитів істотну роль відіграють глибинні розломи, що розділяють блоки земної кори. В гравітаційному полі глибинні розломи виділяються в основному за трьома ознаками: гравітаційним сходинкам (ступеням) вздовж розломів, лінійними локальними аномаліями обох знаків, що накладаються на гравітаційні сходинки і зміни малюнку ізоаномал по різні сторони від розлому.

Відрізки лінійних гравітаційних сходинок відповідають лінійним тектонічним і стратиграфічним контактам комплексів порід з різними фізичними властивостями. Для виявлення розломів природа контактів (тектонічний або стратиграфічний) істотного значення не має, оскільки як ті, так і інші прямим чином пов'язані з відносним переміщенням блоків земної кори по розломам.

Друга ознака глибинних розломів на щитах – локальні лінійні аномалії, що мають різну геологічну природу і відповідно знак аномалій. Додатні лінійні аномалії обумовлені щільними інтрузивними утвореннями або метаморфогенними породами, що складають накладені лінійні поверхневі структури, що фіксуються на границях блоків. Від'ємні гравітаційні аномалії відповідають метасоматичним утворенням гранітоїдного типу або механічним розущільнення в зонах розломів. В зв'язку з накладанням лінійних локальних аномалій на гравітаційні сходинок вони не завжди чітко виділяються на картах спостереженого гравітаційного поля. Цілком конкретно ці аномалії підкреслюються на картах трансформованого гравітаційного поля.

Третя ознака глибинних розломів на щитах – різні малюнки ізоаномал Δg – відповідає найбільш широкому набору геологічних особливостей. Це можуть бути як стратиграфічні контакти двох суміжних різнорідних товщ, так і тектонічні, що приводять до порушення кореляції лінійних утворень, що виходять на поверхню або порушенню структурних планів по різні сторони від цих контактів.

Користуючись представленими ознаками (з обов'язковим урахуванням даних інших методів), на щитах виявляють системи одновікових розломів, а отже, і блоки, які вони обмежують. Істотну допомогу може надати використання ряду відомих закономірностей просторового розташування розломів: витриманість азимутів їх простягання, рівні інтервали між розломами одного порядку і т.п. [141].

При виділенні сучасних блоків на щитах за ознакою витриманості характеристик поля в їх межах слід мати на увазі вже згадану багатоактність в їх утворенні, внаслідок чого вони виявляються обмеженими розломами різних систем і порядків. Для

прогнозування рудних родовищ необхідно встановити послідовність участі систем розломів у формуванні блоків.

Однією з причин зміни густини земної кори є зростання з глибиною насиченості її породами основного складу, що починається безпосередньо біля поверхні.

Середній градієнт збільшення густини з глибиною, обчислений за даними глибинних сейсмічних зондувань (ГСЗ), складає $0,01 \text{ г/см}^3$ на 1 км. На рис.13.3 показана модель глибинного розлому, що розділяє двомірні блоки з різницею рівнів ерозійного зрізу $\Delta H=1 \text{ км}$. Вертикальна границя густини, що виникає за рахунок відносного переміщення блоків вздовж всієї земної кори (35 км) з $\Delta \delta=0,01 \text{ г/см}^3$, приводить до утворення гравітаційної сходинки з амплітудою 14,7 мГал. Отже, скрізь, де має місце відносне вертикальне зміщення блоків земної кори, будуть виникати аномалії типу гравітаційних сходинок.

При вивченні внутрішньої структури фундаменту платформ з чохлам пухких утворень потужністю до декількох кілометрів можливості гравіметрії залишаються в основному такими ж, проте виникає необхідність в додатковому врахуванні впливу неоднорідностей в осадовому чохлі. Головна увага тут приділяється на взаємозв'язку структур фундаменту і осадового чохла. Визначальне значення набуває участь блоків в формуванні рельєфу фундаменту.

При вивченні внутрішньої структури фундаменту необхідно звертати увагу на аномалії, що мають ізометричну форму або близьку до неї. Як правило вони спостерігаються над інтрузивними масивами, що залягають всередині фундаменту.

13.2. ВИКОРИСТАННЯ ГРАВІМЕТРІЇ ПРИ ГЕОЛОГІЧНОМУ КАРТУВАННІ

Завдання геологічного картування вирішуються комплексом геолого – геофізичних методів, що включає гравірозвідку. При цьому віддається перевага вивченню геологічних формацій, що

представляють собою природні асоціації порід з різними фізичними властивостями. За допомогою гравірозвідки оконтурюють контрастні за густиною породи окремих петрографічних різновидів. За результатами досліджень отримують петрощільнісні карти. Аналогічним чином отримують петромагнітні карти. Названі вище петрофізичні карти з урахуванням фактичних геологічних даних служать основою для побудови геологічних і формаційних карт.

Основним чинником, що сприяє ефективному використанню гравірозвідки для цілей картування рудних районів, є дві їх особливості: мала потужність чохла пухких відкладів і крутоспадні контакти корінних порід. Ці особливості дозволяють досить просто отримати контури масивів порід фундаменту в плані. Крім того, відносно легкий доступ до порід фундаменту дозволяє вивчати взаємозв'язок щільності порід з їх петрографічним складом, необхідну для перетворення петрофізичних карт і об'ємних моделей в геологічні. Наявність стійких взаємозв'язків – одна з умов, сприятливих для застосування гравірозвідки.

Рациональна схема виконання картування рудних районів у горизонтальній площині складається з наступних етапів.

1. За гравітаційним полем в горизонтальній площині виділяють комплекси порід, які мають різну ефективну щільність.
2. Визначають геологічну природу комплексів у межах виділених контурів і їх формаційну приналежність.
3. У разі необхідності уточнюють виділені контури.

Перший етап здійснюється порівняно просто при відносно малій потужності осадового чохла і крутоспадних контактах. За контури масиву порід у плані приймають лінії, що з'єднують точки з екстремальними значеннями горизонтального градієнта поля або W_{zz} . При цьому похибка визначення вертикальних контактів масивів порід не перевищує величини відношення квадрата потужності пухких відкладів до горизонтального розміру масиву досліджень.

Головні ускладнюючі фактори: похилі контакти і щільнісна неоднорідність порід, що їх складають. При наявності відомостей про положення контакту порід масиву не за гравітаційними даними можна визначити напрямок падіння і наближено кут α нахилу контакту до горизонту із співвідношення

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{d}{\square},$$

де d – зміщення точки з екстремальним значенням горизонтального градієнта Δg по відношенню до проекції верхньої кромки контакту на поверхню Землі; h – потужність перекриваючих пухких утворень. На рис. 13.6 показаний приклад визначення напрямків падіння контактів масиву амфіболітів з гранітоїдами [118].

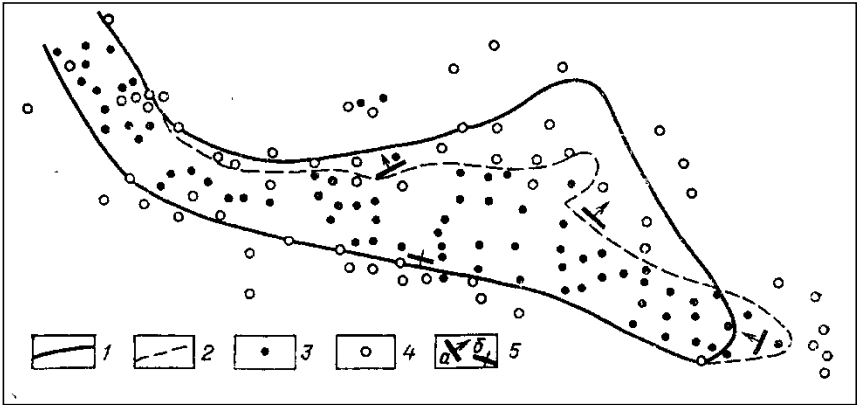


Рис. 13.6. Приклад визначення напрямків падіння контактів масиву амфіболітів з гранітоїдами

1 - лінія, що з'єднує точки з експериментальними значеннями горизонтальних градієнтів Δg ; 2 - контури масиву амфіболітів за даними бурових робіт; 3 - свердловини, що розкрили амфіболіти; 4 - свердловини, що розкрили гранітоїди; 5 - падіння контактів: а - похилий, б - практично вертикальний

Більш складно визначати контури комплексів порід, складених різними петрографічними різновидами і, які фіксуються загальними аномаліями. Істотну допомогу в геологічній інтерпретації такого роду аномалій надає побудова так званих карт-мозаїк. Використання таких карт дозволяє виділяти умовні контури, в межі яких потрапляє задане співвідношення порід певних петрографічних різновидів [143].

На другому етапі (визначення геологічної природи комплексів порід) роль гравіметрії зводиться до простежування під чохлам

пухких утворень комплексів порід, що детально вивчені у відслоненнях, гірничими виробками, бурінням.

Для визначення геологічної природи комплексів порід використовують дані вимірювання щільності порід, а також результати обчислення щільності порід, отримані в процесі моделювання структур, матеріали інтерпретації інших методів. Складність полягає в неоднорідності порід, що складають комплекс, що вивчається. У цих умовах одиничні свердловини не завжди виявляються досить представницькими, а порівняння ефективних значень щільності, обчислених за аномалією, з результатами вивчення щільності порід на зразках - важко здійсними. Тому часто «розпізнавання» комплексу порід здійснюється в обхід викладених вище класичних правил – за рисунком поля (інтенсивність та вид ізоліній в плані) з урахуванням відомих додаткових даних. В умовах великої неоднорідності порід фундаменту для картування, як вже вказувалося, використовують комплекс геофізичних методів, серед яких провідними є гравірозвідка і магніторозвідка.

В останні роки спостерігається тенденція розробки формалізованих прийомів картування порід в горизонтальній площині, заснованих на використанні теорії розпізнавання образів [144]. Сутність їх зводиться до того, що в околицях свердловин або відслонень вивчають певний набір характеристик гравітаційного і магнітного полів. Подальший аналіз полів у межах досліджуваної ділянки дозволяє виділяти області з близькими характеристиками полів. Припускають, що близьким характеристикам полів відповідають однакові різновиди гірських порід.

Третій етап складається з аналізу результатів перших двох етапів з метою пошуку шляхів подальшої диференціації порід, уточнення отриманих контурів і осмислення можливих протиріч.

При картуванні рудних районів за допомогою геофізичних методів можуть мати місце уявні протиріччя, пов'язані з наявністю відносно малопотужних накладених структур у фундаменті. Це – важлива можливість геофізичних методів і її не можна упускати. Зокрема можуть мати місце такі ситуації.

1. Контури порід, що визначені за гравітаційним полем, систематично не співпадають з контурами порід за даними бурових

робіт, що пов'язуються з результатами вивчення щільності порід на зразках. Якщо обидва джерела відомостей вірні і достатньо представницькі, однією з можливих інтерпретацій уявних протиріч може бути наявність «другого поверху» у фундаменті.

2. Контури порід, що визначені за гравітаційним і магнітним полях, не збігаються між собою. Крім того, можуть не збігатися між собою і структурні плани, що визначені за різними методами. Наявність таких «протиріч» також, як правило, є наслідком впливу накладених структур фундаменту.

Як приклад прояву накладеної структури в гравітаційному та магнітному полях на рис. 13.7 показані геологічна схема однієї з ділянок Українського щита, складна переважно архейськими гранітоїдами, частково перекритими протерозойськими породами Орехово-Павлоградської структурно – фаціальної зони (а) і схеми гравітаційного і магнітного полів над ним (б). У магнітному полі досить чітко проявляється структурний план Орехово-Павлоградської структурно-фаціальної зони, але він не відповідає структурному плану ділянки, який визначений за гравітаційним полем. Уявна протиріч легко пояснюється двоярусною будовою ділянки досліджень.

Як приклад можна розглянути результати геологічного картування Українського щита (УЩ) на основі карт аномалій Буге ($\sigma=2,3 \text{ г/см}^3$), а також їх трансформацій. Ці карти найбільш чітко відображають сучасну мегаблокову структуру УЩ [145-151] тощо.

Гінтовим О. Б. [152] було надано характеристику основним гравітаційним аномаліям, серед яких виділені найбільш інтенсивні Осницький, Хмельницький, Шаргородський, Кодимський, Бандурівський, Голованівський максимуми сили тяжіння (40–90 мГал) і менш інтенсивні (до 40 мГал) Бердичівський, Самгородокський, Вінницький, Гайсинський максимуми.

Якщо максимуми сили тяжіння мають більш-менш ізометричну форму, то мінімуми, які найчастіше їх розділяють (Овруцький, Кочерівський, Хмельницький, Немирівський, Барський, Тульчинський, Умансько-Богуславський, Синицівський) в основному витягнуті в північно-західному та північно-східному напрямках і більш вузькі. Виняток становить Кіровоградський мінімум, який охоплює значну площу центральної частини УЩ.

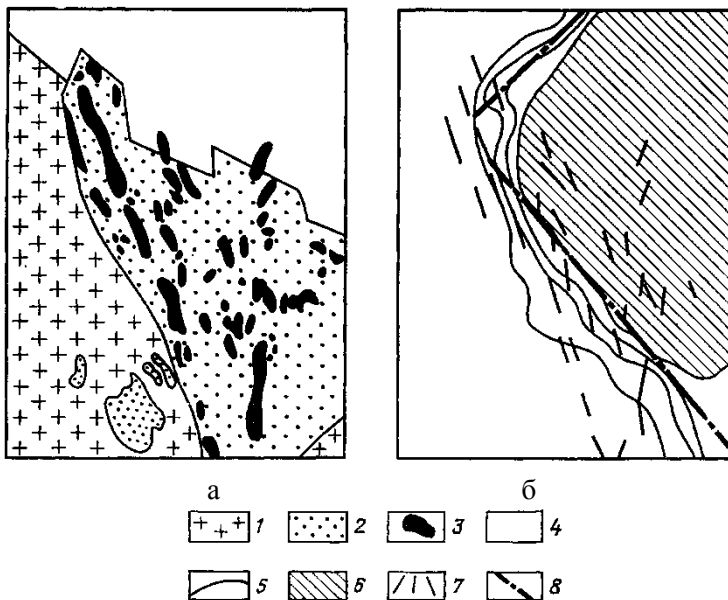


Рис. 13.7. Приклад визначення двох поверхів у фундаменті з незгоди структурних планів:

1 - Гранітоїди архейського віку; 2 - нижньопротерозойські породи Оріхово-Павлоградської серії (нерозчленовані); 3 - гнейси з прошарками залізистих кварцитів; 4 - палеозойські утворення; 5 - ізоаномал сили тяжіння; 6 - область високих значень сили тяжіння; 7 - осі магнітних аномалій; 8 - межа архейських блоків

Подальші гравітаційні дослідження УЩ дали змогу встановити [145-151]:

а) ділянки земної кори, які відповідають максимумам і мінімумам сили тяжіння, розділені глибинними розломами завширшки декілька кілометрів, деякі лінійні мінімуми, обмежені зонами градієнтів $\partial g / \partial x = 3-5$ мГал/км, взагалі відповідають зонам розломів шириною до 15–20 км;

б) в межах подібних зон градієнтів і лінійних мінімумів надійно виділяються зони розвитку тектонітів – мігматитової строкатості,

шаруватості гірських порід, катаклазитів і бластомілонітів, метасоматичних змін (так званих «пакетів строкатих комплексів»);

в) за розрахунками центрів гравітаційних мас, які створюють означені максимуми і мінімуми сили тяжіння, такі маси охоплюють всю земну кору.

Вивчення характеру гравітаційного поля УЩ в першу чергу дало змогу розділити щит на мегаблоки. Офіційно мегаблокова структура УЩ була закріплена на Геофізичній основі Тектонічної карти України масштабу 1:1000 000 [148]. В межах досліджуваного регіону виділено Волинський, Подільський, Бузький, Росинський, Кіровоградський (пізніше ерейменований у Інгульський) мегаблоки і Волино-Поліський вулканоплутонічний пояс (ВПВПП). На карті аномалій Буге (рис. 13.8) видно, що ВПВПП, якому відповідає Осницький максимум сили тяжіння (гранітоїди осницького комплексу з великим об'ємом осадово-вулканогенних порід клесівської серії та інтрузій габроїдів), відділений від Волинського мегаблоку (гранітоїди житомирського комплексу, гнейси тетерівської серії) зоною великих градієнтів $\partial g / \partial x$ до 3–5 мГал/км, витягнутою не менш ніж на 300 км від північного кордону України на південний-захід. Вона відповідає добре вивченій геологічно тектонофізично Суцано-Пержанській зоні розломів. Це єдиний випадок в досліджуваному регіоні, коли масштабній зоні розломів на карті аномалій Буге відповідає не мінімум Га, а зона градієнтів (через велику інтенсивність Осницького максимуму сили тяжіння).

Корисність гравірозвідки як ефективного інструменту геологічного картування доводяться і за допомогою методу мікрогравітації [153].

Ілюструє це, наприклад, визначення геологічних границь на території третинного басейну Букіт-Аранг на сході Перліса (рис. 13.9). Оскільки методи мікрогравітації вимірюють силу тяжіння, що змінюється на поверхні, на них безпосередньо впливає розподіл густини і під поверхнею і, зокрема, через наявність пустот, які створюють дефіцит маси відносно густини навколишнього рельєфу.

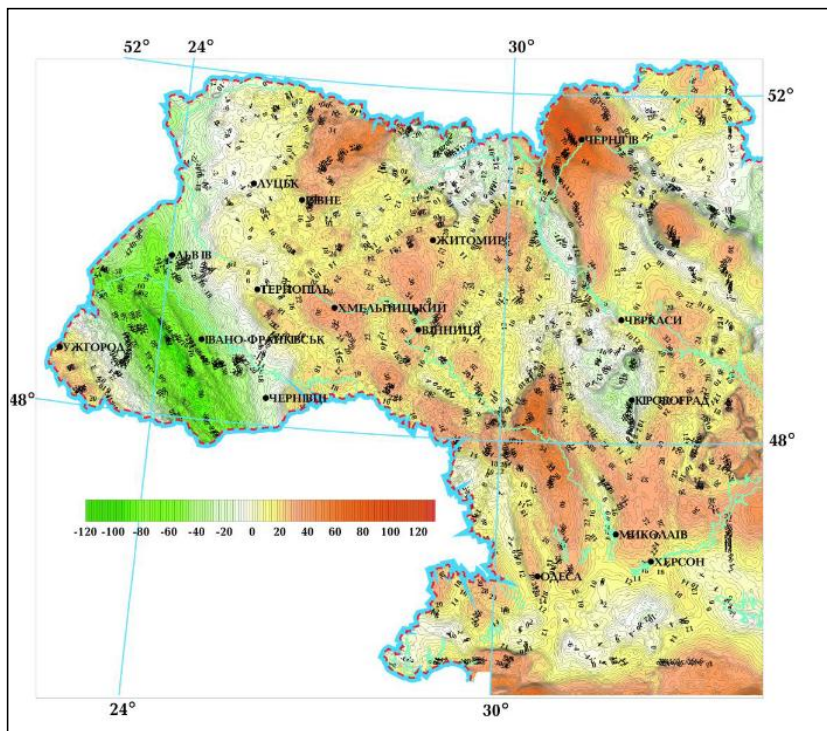


Рис. 13.8. Карта аномалій Буге ($\sigma=2,3$ г/см³) західної та центральної частин території України [145]. Ізоаномали G2,3 проведено через 5 мГал.

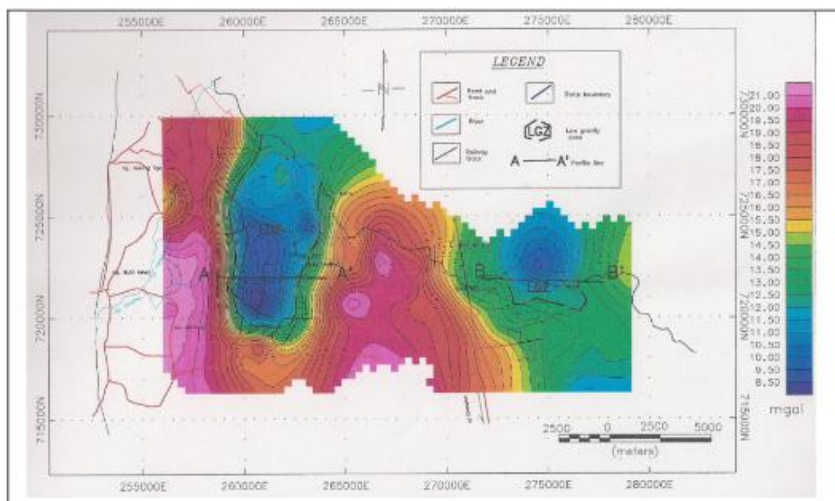


Рис. 13.9 Карта аномалій Буге в районах Перліса Кедах (Малайзія) за [153].

13.3. ЗАСТОСУВАННЯ ГРАВІМЕТРІЇ ПРИ МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ ГЕОЛОГІЧНИХ СТРУКТУР

При геологічному картуванні необхідно не тільки знайти контури порід у плані, але також спрогнозувати їх розповсюдження на глибину. Це виконується моделюванням гравітаційних аномалій і їх джерел у відповідності з ідеями, що розвиваються в сучасній методології інтерпретації гравітаційних аномалій [154]. При неглибокому заляганні докембрійського і палеозойського фундаменту аномалії викликані масами верхньої частини земної кори. У цих умовах використовуються моделі мас, верхня кромка яких виходить на поверхню фундаменту, а нижня розповсюджується на невелику глибину.

Зручною моделлю двомірних мас при геологічному картуванні є субгоризонтальний шар змінної щільності $\delta(\zeta)$. При практичному використанні шар розбивається вертикальними лініями $\zeta = \zeta_n$ на

чотирикутники постійної щільності δ_n . Щільність деяких з них може бути відома за апіорними даними. Модель зручна також тим, що щільності $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ чотирикутників легко можуть бути підібрані за допомогою комп'ютерного моделювання як у пакетному, так і автоматичному режимах. При заданому носії мас щільність шару визначається вирішенням лінійної оберненої задачі [155].

Більш складні вертикальні перерізи підбираються на основі фізико-геологічної моделі, що побудована за даними розвідувального буріння та вимірних значень щільності. Апіорні дані відомі для самої верхньої частини розрізу і ця частина моделі мало змінюється при підборі. Множина апіорних даних дозволяє обчислити і відняти поле відомої частини моделі. Але слід мати на увазі, що геологічне редукування нерідко призводить до істотних спотворень поля. Також нерідко вносяться спотворення поля при виключенні лінійної або постійної частини поля.

Вертикальні розрізи структур на інтерпретаційних профілях досить складні. Якщо маси двомірні, то модель складається з горизонтальних призм N – кутного перерізу [156]. Тривимірну щільнісну модель зручно складати з багатогранників та їх окремих випадків – вертикальних і горизонтальних пірамід [156].

На рис. 13.10 наведено типовий приклад вертикального перерізу тривимірної моделі Саксаганьської структури Кривбасу. Аномальне поле структури було виділено шляхом врахування впливу сусідніх масивів [157].

В якості апіорних даних при побудові моделі нульового наближення використані дані розвідувального буріння (до 2000 – 3000 м), експлуатаційної розвідки (1000 – 1300 м), а також результати петрофізичних і комплексних геофізичних досліджень. Об'ємна модель була використана для обґрунтування місця закладення Криворізької надглибокої свердловини, а також для оцінки рудоносності глибоких горизонтів структури.

Сучасна методика інтерпретації дозволяє при геологічному картуванні оцінити поширення мас на глибину не на окремих інтерпретаційних профілях, а на всій площі дослідження та здійснити таким чином глибинне картування.

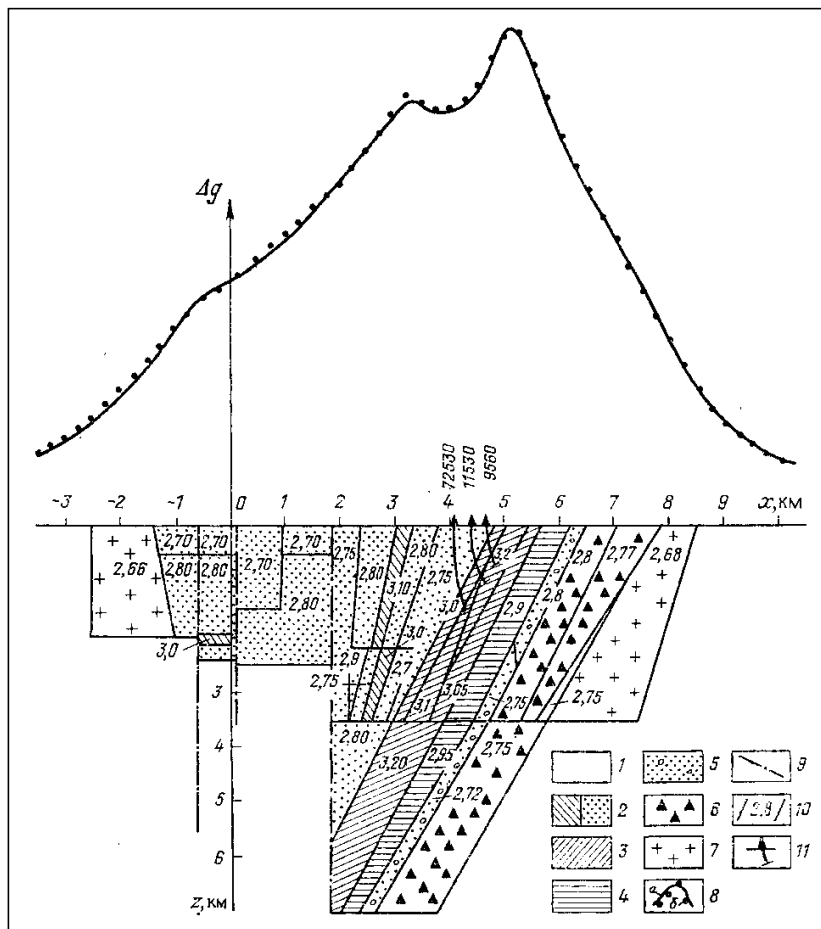


Рис. 13.10. Вертикальний розріз підбраної об'ємної моделі північної частини Саксаганської структури Кривбасу за [158]

1 - осадові породи; 2 - глеєватська свита - вугільні, кварц-графітові сланці; саксаганська свита: 3 - залізисті породи, 4 - сланці; 5 — скелюватська свита — аркозові пісковики та сланці; 6 - ново-криворізька свита - метабазит-амфіболові породи; 7 - дніпровський граніт, плагіограніти, мігматити; 8 - графіки аномалій Δg : а - залишкової, б - підбраної; 9 - межі блоків структури; 10 - границі пірамід та значення густини, g/cm^3 ; 11 — розвідувальні свердловини та їх номери

Початковим етапом є картування порід у горизонтальній площині з виділенням контактів порід.

Глибина до верхньої кромки мас зазвичай відома за геологічними і геофізичними даними. Щільність виділених масивів порід можна оцінити моделюванням аномального поля. У моделі нульового наближення використовуються відомі в окремих точках значення щільності і на першому етапі підбору можна прийняти, що контакти окремих блоків вертикальні. Тому щільнісну модель горизонтального тривимірного шару зручно складати із сукупності вертикальних циліндрів N – кутного перерізу, нижня кромка яких може розташовуватися на однаковій глибині $\zeta = H_{\text{гл}}$ [156]: Неодноразово підкреслювалося, що нижні кромки структур у межах докембрійського щита розташовуються на глибинах близько 5 – 7 км. Цю глибину можна використовувати як граничну величину $\zeta = H_2$ при моделюванні. В умовах фіксованих таким чином носія мас неважко підібрати значення щільності з критерію близькості спостереженого і обчисленого полів.

Розглянемо для прикладу підбір тривимірної щільнісної моделі при картуванні порід у межах Мангушський аномалії сили тяжіння на Приазовській частині Українського щита (рис. 13.11). При побудові моделі виходили з тепер вже загальновизнаної точки зору, що верхня кромка збурюючих мас збігається з поверхнею кристалічних порід щита.

За полем виділені в плані границі ділянок порід різної щільності. У межах цієї території є багато апріорних даних (значення щільності, визначення петрографічного складу кристалічних порід). Це дозволило за допомогою методики [156] побудувати для даної території карту щільності. Причому на карту значення щільності виносилося за координатами точки відбору зразків.

Просторово – статистичний аналіз показав, що середнє значення густини докембрійських порід, що відповідає області найбільшого значення поля сили тяжіння, складає 2,78 г/см³. Середнє значення густини для всього щита близько до 2,70 г/см³ [156]. Щодо цього середнього значення і підбиралося аномальне значення щільності. З рисунка видно, що в межах центрального невеликого блоку аномальне значення густини довелося збільшити

до $+0,11 \text{ г/см}^3$, а в північній частині ділянки є гранітизований блок з густиною $-0,02 \text{ г/см}^3$.

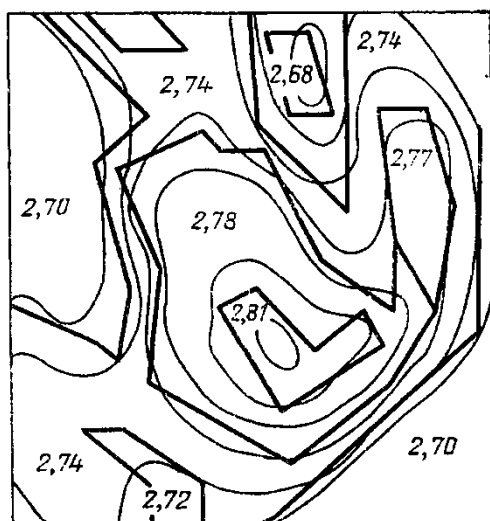


Рис. 13.11. Підбір розподілення тривимірних мас в межах Українського щита:

1 – межі дільниць і значення густини в г/см^3 , 2 – ізолінії обчисленого поля Δg

Підбір виконаний при декількох положеннях нижньої кромки мас. Виявилось, що якщо прийняти $H_2 = 7 \text{ км}$, то підібрані значення щільності добре відповідають апріорним даним. Тому цілком виправданий підбір поля масами горизонтального шару, розташованого у верхній частині земної кори, в межах так званого гравітаційно-активного шару. Звичайно, легко можна підібрати розподіл щільності шару і при іншій глибині до нижньої кромки мас. Критерієм вибору цієї глибини є геологічні дані про підвалини структур і відповідність підібраних і виміряних значень щільності.

Горизонтальний шар можна складати не з вертикальних циліндрів, а, наприклад, з пірамід з бічними похилими гранями. Це дозволяє при моделюванні підбирати похилі контакти між масивами порід.

При вивченні тривимірних структур необхідно використовувати більш складні моделі, складені з багатогранників і його часткових випадків.

Аналогічно моделюються вертикальні розрізи в умовах осадового басейну. Відмітна особливість - у широкому використанні сейсмічних даних про структури і швидкості розповсюдження хвиль.

А для створення просторової інтегральної геогустинної моделі Карпатського регіону, наприклад, використана “Технологія інтегральної інтерпретації комплексу геолого-геофізичних даних для пошуків та розвідки родовищ нафти і газу” [159]. З метою формування моделі розподілу фізичних властивостей були використані денситометричні дослідження попередніх років та результати статистичної обробки даних денситометрії свердловин [160]

При створенні моделі розподілу фізичних властивостей в межах осадового комплексу Карпатського регіону (рис. 13.12) був використаний алгоритм формування моделі для випадку просторово низько інформативного комплексу даних [162] з використанням в якості вихідних 2D побудов по сітці геологічних профілів.

Перевірка якості 3D геогустинних моделей шляхом співставлення результатів розв’язку прямої просторової задачі гравірозвідки із спостереженим гравітаційним полем (рис. 13.13).

З величини та характеру розподілу функції відхилення гравітаційних полів сформовані моделі містять неточності у структурно-тектонічному відношенні, про що свідчить характер поведінки розрахованого поля та нев’язки. Різниця в амплітуді зміни гравітаційного поля свідчить на користь неточностей в оцінці густини глибоко залягаючих утворень фундаменту.

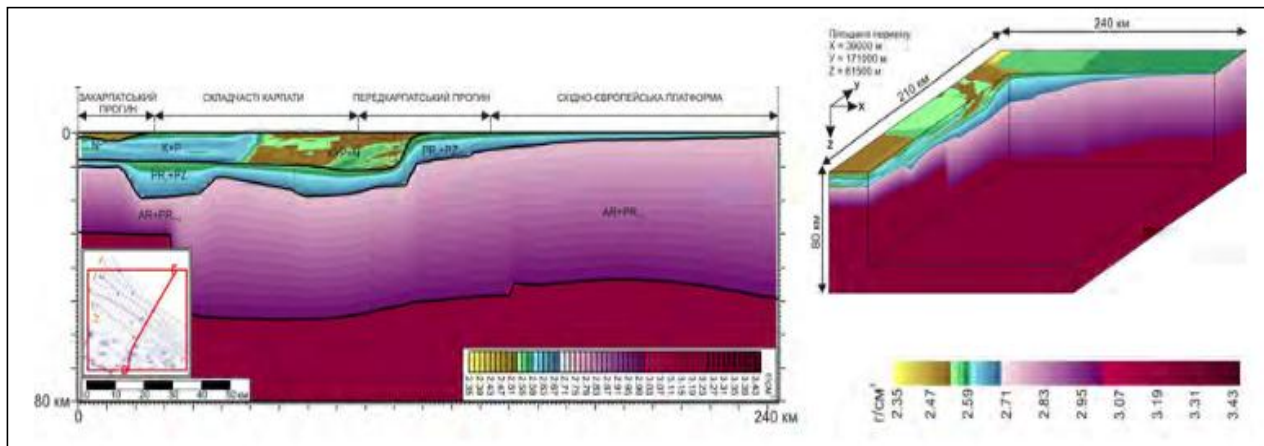


Рис. 13.12. Априорна 3D геогустинна модель: профіль (а) та аксонометричне зображення (б) [160]

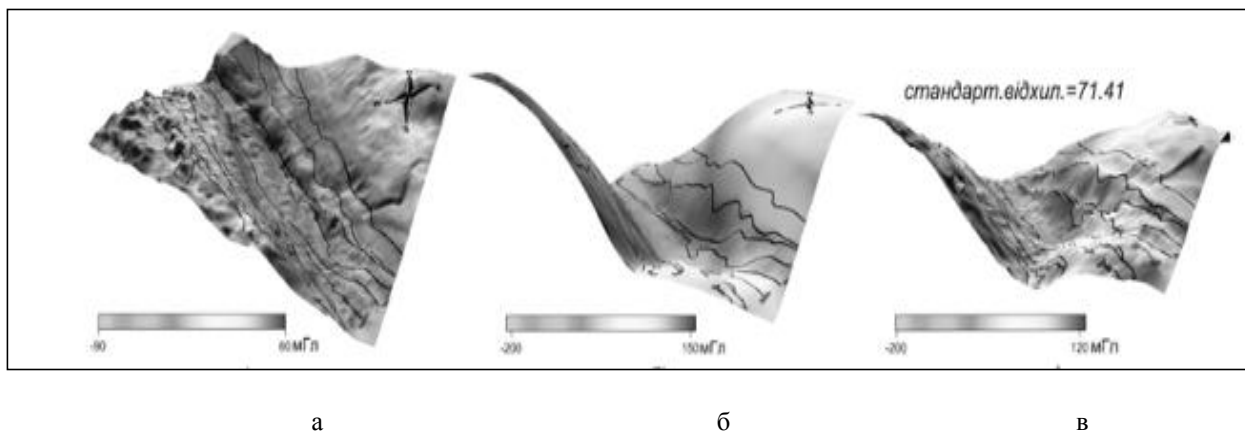


Рис. 13.13. Спостережене гравітаційне поле в редукції Буге (а), розраховане від 3D геогустинної моделі (б), функція відхилення між полями (в) за [162].

13.4 ЗАСТОСУВАННЯ ГРАВІМЕТРІЇ ПРИ ПОШУКАХ ТА РОЗВІДЦІ КОРИСНИХ КОПАЛИН

13.4.1. Пошуки родовищ нафти і газу

Пошуки родовищ нафти і газу включають в себе широкий комплекс геолого-геофізичних досліджень, в яких гравіроздавдіка відіграє значну роль. Її місце, основні задачі, особливості підходу різноманітні, зважаючи на великі розбіжності фізико-геологічних умов пошуків нафтогазових родовищ, що ілюструється рис. 13.14, на якому представлена модель основних покладів нафти і газу різного типу в нафтогазоносних басейнах (НГБ), що пройшли рифтову стадію розвитку.

Формування пасток тут визначається сукупністю поздовжніх і поперечних розломів, які пересікаються, і які утворюють складну систему горстових і моноклінальних блоків, грабенів, насувів й інших форм. З моноклінальними блоками можуть бути пов'язані тектонічно і стратиграфічно екрановані поклади. Над ними або на схилах можливі поклади літологічного типу, пов'язані з лінзами пісковиків, а також рифогенними і карбонатними утвореннями. Ще вище по розрізу над блоками фундаменту розташовуються пастки і відповідно поклади антиклінального типу.

В останні роки значна увага приділяється виявленню глибинних пасток, пов'язаних з насувними дислокаціями. Над породами фундаменту, дорифтового та нижньої частини рифтового комплексів, що зазнали впливу розломно-блокової тектоніки, можлива наявність соленосних відкладів. Причому солянокупольних структури найбільш інтенсивно розвинені на ділянках перетину глибинних розломів і в зоні крайових ступінчастих скидів. З соляними структурами можуть бути пов'язані поклади нафти і газу як антиклінального, так і неантиклінального типів (див. рис. 13.15-13.16).

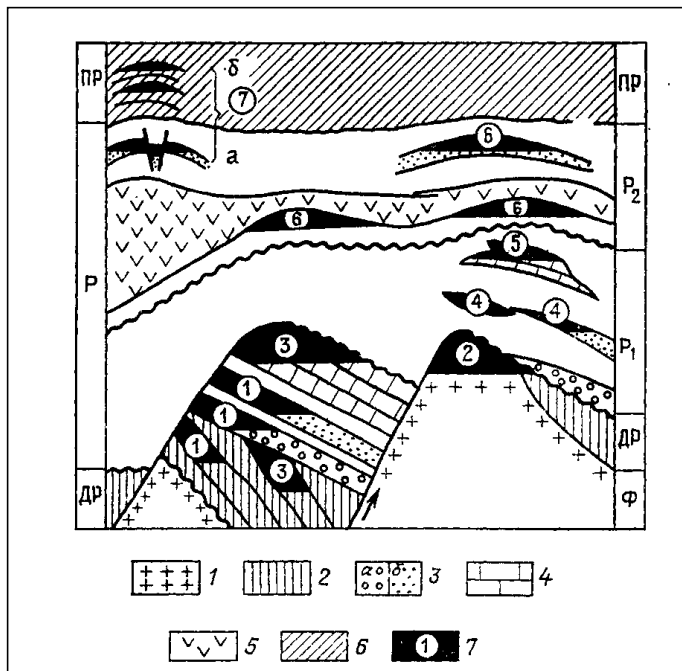


Рис. 13.14. Модель основних покладів нафти та газу різних типів у басейнах, що пройшли рифтову стадію еволюції (за Є. В. Кучеруком, Є.Р. Алієвої, 1980 р.):

1 - породи фундаменту (Ф); 2 - дорифтовий комплекс (ДР); 3-5 - рифтовий комплекс- (Р), що включає нижню частину (Р₁), пов'язану з впливом розломно-блокової тектоніки, та верхню (Р₂), не пов'язану з впливом розломно-блокової тектоніки, 3 - пісковики континентальні (4) і морські (6), 4 - карбонатні відкладення, 5 - солейосні відкладення; 6 - післярифтовий комплекс (ПР); 7 - основні типи покладів нафти та газу. Цифри в гуртках відповідають типам покладів: 1—3 пластові та масивні, ні в моноклінальних блоках (Ф, ДР, Р); | - Тектонічно екрановані; 2 - кумбіновані (тектонічно та стратиграфічно екрановані); 3 - стратиграфічно чітко екрановані (у т. ч. в ерозійних останцях); 4—7 — у вищезалегалих відкладеннях (Р, ПР); 4 — літологічні в піщаних лінзах або пла, що виклинюються. стах; 5 - літологічні у рифових масивах; 6 - пластові склепіння в антикліналях та структури ущільнення над блоками, рифами та ерозійними виступами; 7 - пласто-ві склепіння (6) та тектонічно екрановані (а) у структурах над соляними куполами

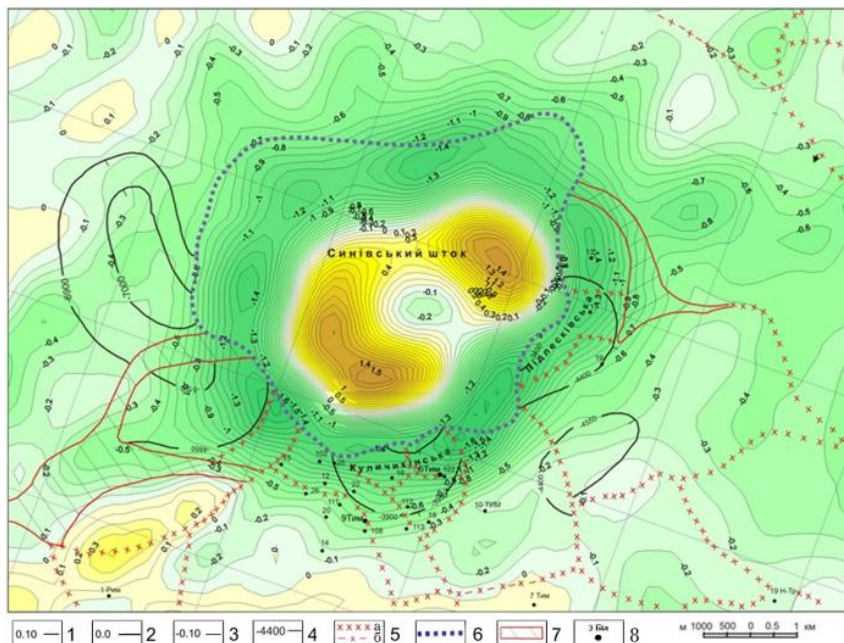


Рис. 13.16 Прояв у гравітаційному полі безкозиркових штоків з високим стратиграфічним рівнем залягання солі (передпалеогеновий, передчетвертинний) і потужним кепроком (на прикладі Синівського штоку) за [163]

Найважливіша методична задача — вивчення солених відкладів та врахування їх впливу, що особливо важливо при вивченні підсолевих відкладів. Останнім часом постало питання про облік щільнісних неоднорідностей верхньої частини розрізу.

Наступне важливе завдання — пошуки різних нафтогазоперспективних пасток. Накопичений досвід показує, що більшість антиклінальних структур, рифів та інших пасток цілком впевнено виділяються сучасною гравірозвідкою за допомогою зйомок масштабів 1: 50000 та 1: 25000. Проте гравірозвідка не може самостійно готувати ці структури до буріння. Врешті решт гравірозвідка здатна безпосередньо виявляти або прогнозувати нафтогазові поклади (див. рис. 13.17).

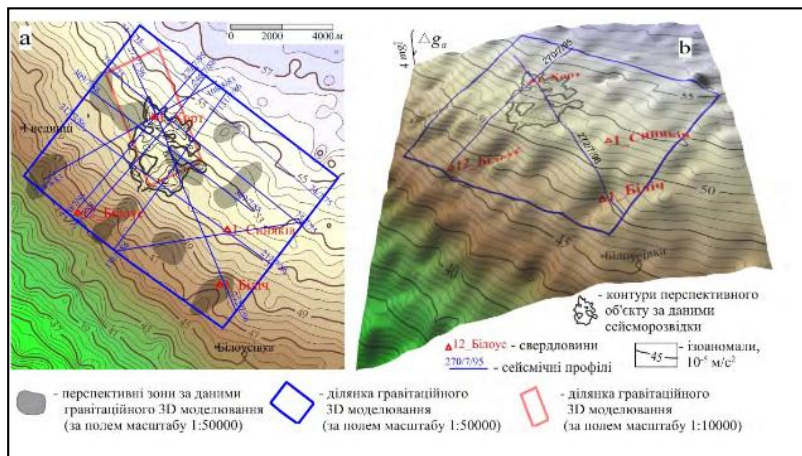


Рис. 13.17 Поле сили тяжіння в редукції Буге при дослідженні Гнідинсько-Білоусівської площі ДДЗ

а- карта поля, б - поле у 3D зображенні після комп'ютерних перебудов за [164]

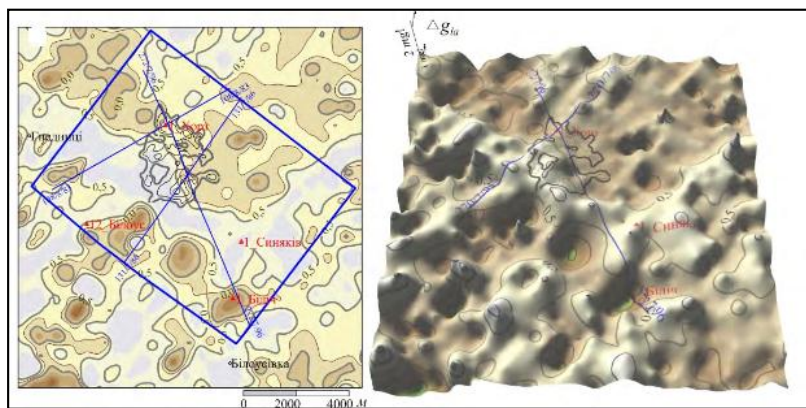


Рис. 13.18 Локальні аномалії сили тяжіння за радіусом трансформації осереднення $R=400 \text{ м}$ при дослідженні Гнідинсько-Білоусівської площі ДДЗ

а- карта поля, б- поле у 3D зображенні за [164]

Перш за все знання положення і форми поверхні фундаменту дозволяє судити про потужність осадової товщі і тим самим прогнозувати загальні перспективи нафтогазоносності досліджуваних територій. Крім того, знання блокової будови фундаменту дозволяє виявити нафтогазоперспективні пастки в підвалинах осадової товщі, а також структури і поклади в відкладах, що їх перекривають (див. рис. 13. 14). За відомостями про розломи і їх відображеннях у осадовій товщі можна судити про шляхи міграції вуглеводнів і тим самим оцінювати перспективи нафтогазоносності площ, що знаходяться над окремими блоками.

Задача вивчення поверхні і блокової будови фундаменту в загальному випадку зводиться до виявлення та простежування окремих горизонтальних і субгоризонтальних, а також вертикальних і субвертикальних границь.

Поверхня фундаменту. До недавнього часу задача визначення поверхні фундаменту та інших субгоризонтальних границь за одними гравіметричними даними практично не вирішувалася. Для її вирішення потрібна була додаткова інформація про перепади щільностей на границі та положенні її в просторі в окремих точках. Останнім часом з'являється можливість залучення для цієї мети особливих точок потенціальних полів (І. С. Єлісєєва та ін.). Проте перший шлях найбільш розроблений. Для його реалізації використовуються різні способи підбору, рішення контактних задач і т. інш. Широкий розвиток набули кореляційні способи, серед яких слід відзначити: спосіб Г.І. Каратаєва; КОМП і КОТРАН В.І. Шрайбана, М.С. Жданова, О.В. Витвицького; КФС В.С. Славкіна, П.А. Беспрозваного; ПРОТРАН Ф.М. Глікмана.

Спосіб КФС (квазідетермінованих функціональних зв'язків) заснований на наявності в середовищі одного опорного горизонту, що залягає на глибині H [118].

Вважається, що спостережене гравітаційне поле $\Delta g_{\text{сп}}(x, y)$ складається з двох основних складових: локальної $\Delta g_{\text{л}}(x, y)$ і регіональної $\Delta g_{\text{р}}(x, y)$ а саме:

$$\Delta g_{\text{сп}}(x, y) = \Delta g_{\text{л}}(x, y) + \Delta g_{\text{р}}(x, y)$$

Звичайно значення H отримують за даними сейсморозвідки та частково буріння. За еталонним масивом знаходиться коефіцієнт α в припущенні лінійної зміни $\Delta g_{\text{р}}(x, y)$. Далі, на підставі еталонного

масиву будується двовимірний алгебраїчний поліном певного ступеня, який використовується для передачі $\Delta g_p(x, y)$ в прогнозовані точки, після чого обчислювальна схема для визначення $H(x, y)$ може вважатися готовою.

Блокова будова. Вивчення блокової будови фундаменту починається з виявлення і простеження в ньому основних розломів. Це завдання вирішується досить успішно без залучення додаткової інформації або при її невеликій кількості. Досить ефективний метод повного нормованого градієнта, або метод Берьозкіна. Цей метод базується на визначенні особливих точок потенціальних полів шляхом продовження в нижній напівпростір особливої функції $G_H(x, z)$, або $G_{\Delta g}$, яке обчислюється по вихідній кривій Δg . Особливі точки – це точки, в яких максимумами $G_{\Delta g}$ досягають найбільших значень. Вони співпадають з центрами тяжіння збурюючих тіл, деякими кутовими їх точками і знаходяться без залучення додаткової інформації. У випадку розломів та інших субвертикальних границь максимумами $G_{\Delta g}$ при зміні числа гармонік розташовуються на цих границях, чітко відзначаючи тим самим їх положення в плані, а також іноді верхню і нижню їх кромки за різким зменшенням абсолютних значень [165].

Метод повного градієнта дозволяє оцінити падіння контактів тіл з різними щільностями [166]. Це здійснюється за формою кривих $G_{\Delta g}(x)$, горизонтальної $V_{xz}(x)$ і вертикальної $V_{zz}(x)$ похідних від $\Delta g(x)$. У випадку вертикального контакту криві $G_{\Delta g}(x)$ і $V_{xz}(x)$ симетричні, а їх максимумами розташовуються на вертикальній осі.

При похилому контакті максимум $V_{xz}(x)$, а також вся крива зсуваються ліворуч відносно максимуму $G_{\Delta g}(x)$, вказуючи тим самим напрямок падіння контакту. У випадку тонких субвертикальних пластів спостерігається аналогічна картина для кривих $G_{\Delta g}(x)$ і $V_{zz}(x)$. Зіставляти форми даних кривих можна як на поверхні спостережень, так і на рівнях, що знаходяться нижче за неї.

На рис. 13. 19 наводиться приклад побудови схеми блокової будови кристалічного фундаменту за допомогою методу повного градієнта для одного з районів Рівнинного Криму [118].

Побудова здійснювалося за результатами продовження функції $G_{\Delta g}(x)$ по окремим профілям до глибини 10-15 км, виявлення зон

можливих розломів за характером зміни максимумів $G_{\Delta g}(x)$ та оцінки напрямку падіння.

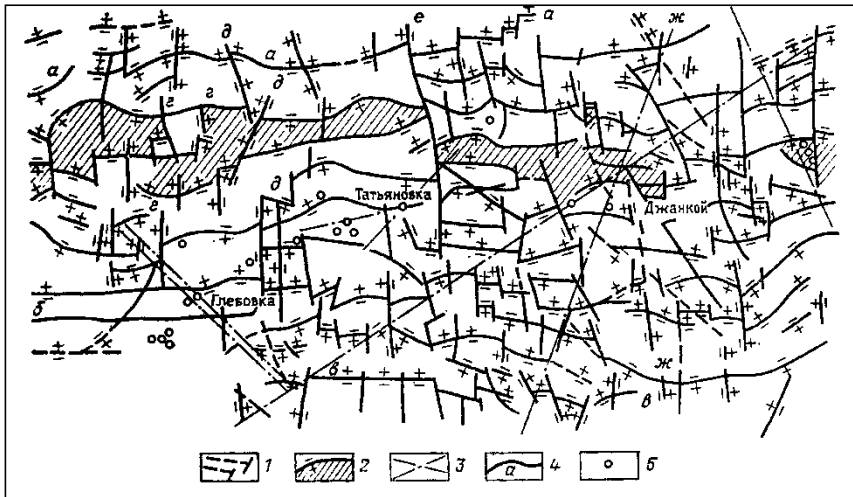


Рис. 13.19. Схема блокової будови кристалічного фундаменту результатів інтерпретації даних гравірозвідки. (за Г. І. Пономарьовою).

1 - Зони градієнтної зміни сили тяжіння (передбачені розривні порушення на поверхні кристалічного фундаменту, зріз 8 км); 2 - передбачувані підняття кристалічного фундаменту в шовній зоні зчленування двох різновікових платформ; 3 - розрахункові гравіметричні профілі; 4 - зони розвитку глибинних розломів: а - Арцизько-Скадовський; б - Тараханкутський, в - Новоселовський, г - Криворозжський, д - Євпаторійський, е - Воронцовсько-Каланчацький, ж - Білозерський; 5 - свердловини, що відкрили продуктивні горизонти (газ, нафта)

Як видно з рис. 13. 19, на зрізі (глибина 8 км) виявилася ціла система розломів субширотного і субмеридіонального простягання, що розбивають фундамент на окремі блоки. Головним меридіональним розломом, що зіграв основну роль у формуванні і простяганні широтних зон розривних порушень, вважається центральний Воронцовсько-Каланчацький розлом. Далі, хоч і не так наочно, виділяються Криворізький, Євпаторійський розломи і зона Білозерських розломів.

Серед широтних розломів чітко простежуються Арцизько-Скадовський, Тарханкутський і Новоселівський. Останній класифікується як протяжний насув з глибиною закладення 12 км. Здіймання порід у бік Новоселівського блоку відбувалося по широким ступеням, обмеженим насувами і скидами. Тарханкутський розлом у сейсмічному хвильовому полі не проявляється, а в полі сили тяжіння виражається зоною високих градієнтів. На рис. 13. 19 виділені відносно припідняті і занурені блоки порід. Особливий інтерес представляють припідняті блоки, з якими пов'язане складкоутворення в осадовій товщі. Так, з ними узгоджуються прирозломні структури Жовтневої групи, Татьянівської, Передової та інших. З деякими з них пов'язані родовища газу. Ряд антиклінальних складок, виділених сейсморозвідкою, приурочений до прогнозних ділянок фундаменту, що характеризується великою потужністю осадових порід. На рис. 13. 19 штрихуванням показана зона зчленування різновікових фундаментів, яка простягається в широтному напрямку, охоплюючи припідняті блоки.

У межах цієї зони розташовується відомий Чорноморський вал. Далі слід відзначити значний Джанкойський блок, обмежений з півдня широким насувом, з яким цілком можливо пов'язано утворення Джанкойського газового родовища. Вихідним матеріалом послужили гравіметричні карти масштабу 1: 200000.

13.5. ЗАСТОСУВАННЯ ГРАВІМЕТРІЙ В ГІДРОГЕОЛОГІЇ

13.5.1. Геометрія водоносного горизонту

Гравітаційний метод є швидким, недорогим засобом визначення загальної конфігурації водоносного горизонту, що забезпечує адекватний контраст густини між водоносним горизонтом і породою, що залягає нижче. Це корисно для

визначення місць із максимальною потужністю водоносного шару, для відстеження осі заглибленого каналу і для визначення положення зануреної корінної породи, яка може перешкоджати проникненню ґрунтових вод [167].

На рис. 13.20, а неправильна смуга неконсолідованих відкладів, яка тягнеться від північно-західного кута карти до південно-центральної частини, складається з похованих відкладів або відкладів контакту з льодом, які лежать у заглибленому льодовиком дольодовиковому руслі річки Коннектикут. Дані свердловини дозволили визначити курс цього похованого каналу, і його вісь збігається з віссю гравітаційного жолоба, показаного на рисунку.

Таким чином, гравітаційні дані відображають місце максимальної потужності неконсолідованих відкладів. Можливості гравітаційного методу у визначенні геометрії водоносного горизонту в цій області пояснюються високим контрастом густини між неконсолідованою товщею та корінною породою, яка складається з щільних палеозойських метаморфічних порід і тріасових осадових порід. У областях, де контраст нижчий, визначення вузької похованої долини, як показано тут, стає складнішим. Якщо контраст густини дорівнює нулю, гравітаційний метод виявляється недоречним для визначення або картографування похованих каналів.

Район перевалу Сан-Горгоніо в південній Каліфорнії (рис. 13.20, б) обмежений з півночі та півдня високими гірськими хребтами, що містять докайнозойські метаморфічні та вивержені породи. Ці породи мають відносно високу густину [167].

Деформовані осадові породи пізнього третинного віку відслонюються на схід і захід від області ділянки вздовж північного боку перевалу. Сучасні піщані і гравійні породи підстилають центральну частину ділянки. Рівні води, виміряні навесні 1961 року в двох свердловинах (А і В), визначають положення водяного простору, що має пологий нахил на схід з ухилом приблизно 5,7 м/км), що узгоджується з іншими даними свердловин, що відносяться до області карти.

Проте поблизу свердловини В рівень ґрунтових вод різко падає з висоти 45 м до 160 м у свердловині С.

виявляють великий похований канал поблизу споруди Перріс. Стратиграфічна поверхня цієї ділянки знаходиться на глибині приблизно 425 метрів, що означає, що максимальна товщина неконсолідованих відкладів, що заповнюють поховану долину, становить приблизно 245 метрів.

На рисунку 13.21, б показано гравітаційну карту Буге зони розлому. Гравітаційна карта майже ідеально імітує поведінку поверхні корінної породи засипаного каналу. Через такий високий ступінь кореляції та незвичайний обсяг контролю свердловин, доступний у цьому районі, виконано оцінку середньої пористості осадів на місці за вимірюваннями поверхні сили тяжіння (Eaton and Watkins, 1970). Довгий гравітаційний профіль був спрямований за межі ділянки на широті Cajalco Road, щоб вивчити регіональний градієнт. При створенні цього профілю (13.22) використовувалися дані, відмінні від тих, на яких базувалася карта. Отже, значення сили тяжіння на малюнках 13.21 та 13.22 були різними. Основа досить однорідного складу (гранітна порода батоліту південної Каліфорнії) окреслена на багато миль на схід і захід, тому східна і західна гілки $\Delta g_{\text{сп.}}$ використовувалися для регіонального градієнта, залишкової аномалії внаслідок низької густини заповнення долини, яка обмежена центральною частиною ділянки.

Якби ця гравітаційна зйомка була частиною дослідження батоліту або окремих літологічних одиниць усередині батоліту, необхідно було б визначити інший регіональний градієнт і інтерпретувати форму залишкової аномалії, яка включала б частину регіонального градієнта як визначено тут. Регіональний градієнт довільно визначається ціллю або метою, що означає, що для початку необхідно мати принаймні приблизне уявлення про його розмір і природу. Усі частини спостережуваного гравітаційного поля на рисунку 13.22 мають геологічне походження, але зацікавленість стосується лише на тій частині, що пов'язана з джерела, що близькі до поверхні. Цілком свідомо, що це частину кривої, яка має найкрутіші градієнти.

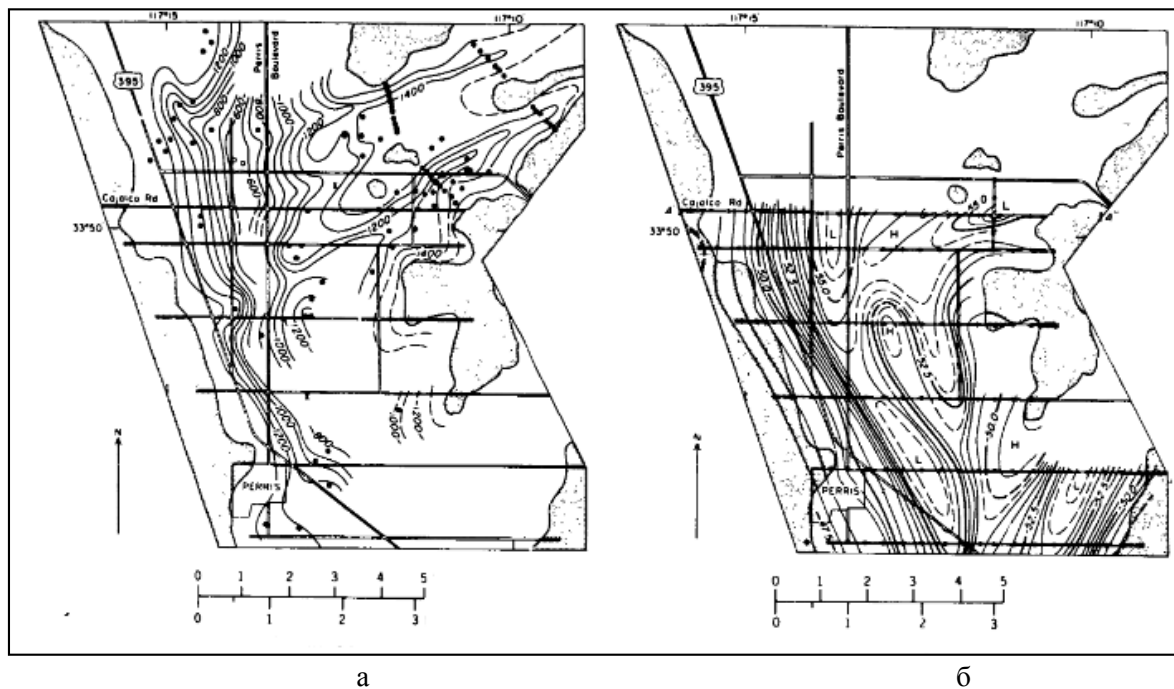


Рис. 13.21 Розподіл відслонень і контурів структури на поверхні похованої корінної породи за результатами гравірозвідувальних робіт (за [168])

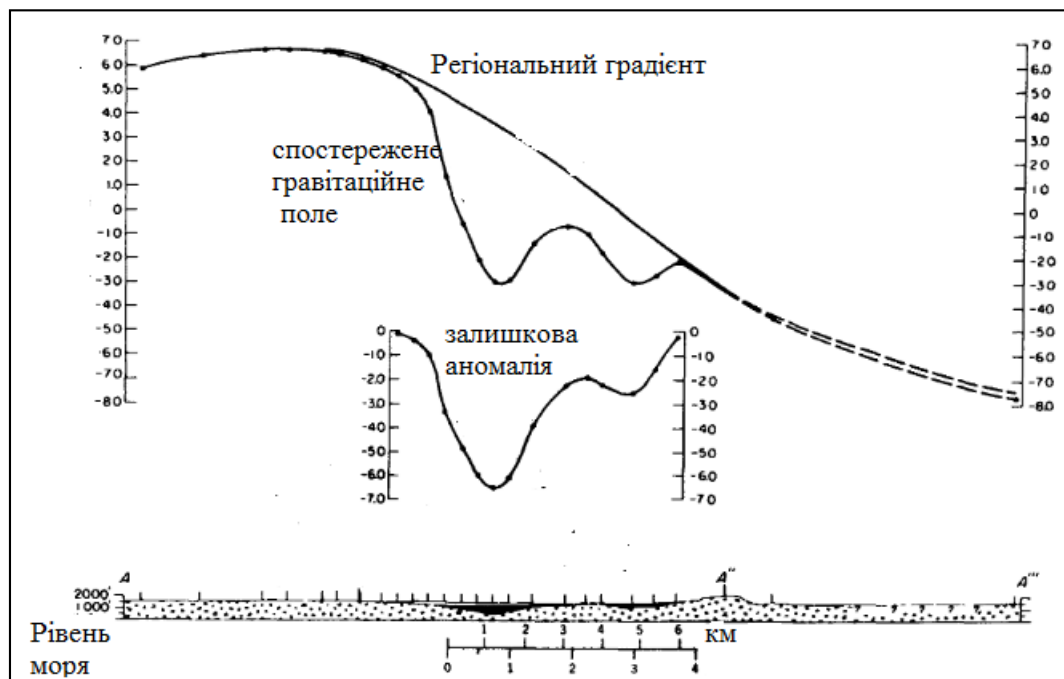


Рис. 13.22 Профілі спостережуваної поля з поправкою Буге, залишкова гравітаційна аномалія для долини Перріс, Каліфорнія (за [168])

Крива залишкової складової сили тяжіння була розрахована шляхом віднімання регіонального градієнта від спостережуваної кривої сили тяжіння та використана в поєднанні з геологічним перерізом, показаним під нею, для розрахунку середньої загальної пористості алювіального заповнення. Середня насипна густина визначається з вимірювань сили тяжіння, його пористість обчислюється на основі значення насипної густини та додаткових вимірних значень середньої густини зерна. Значення пористості були розраховані за результатами гравітаційних досліджень над центральною частиною цієї долини. Результати показані на рис. 13.22 на профілі пористості, де середня пористість становить 33 відсотки. Для порівняння, 10 зразків заповнення було зібрано на глибині від 6 до 82 метрів у свердловині поблизу, і було виявлено, що пористість становить від 23 до 36 відсотків [167].

13.5.3. Пошуки підземних тріщинних вод

Гравірозвідка широко може застосовуватися в комплексі з іншими наземними методами геофізики, зокрема електророзвідкою та магніторозвідкою, при пошуках та розвідці підземних вод на ділянках кристалічних масивів. Основною метою пошуків слугують тріщинні підземні води кристалічних масивів. Таке комплексування методів польової геофізики дозволяє визначити основний план тектонічних розломів, перспективних на пошуки підземних вод, і місця закладання пошукових свердловин. Для прикладу можна навести ділянку Бандурівського родовища підземних вод у Первомайському районі Миколаївської області [169].

У гідрогеологічному відношенні територія ділянки розташована в області тріщинних вод Українського кристалічного щита з вільним водообміном (рис.13.23).

За результатами вимірювань обчислені аномальні значення прискорення вільного падіння в редукції Буге (Δg_a) з реальною густиною проміжного шару $1,9 \text{ г/см}^3$.

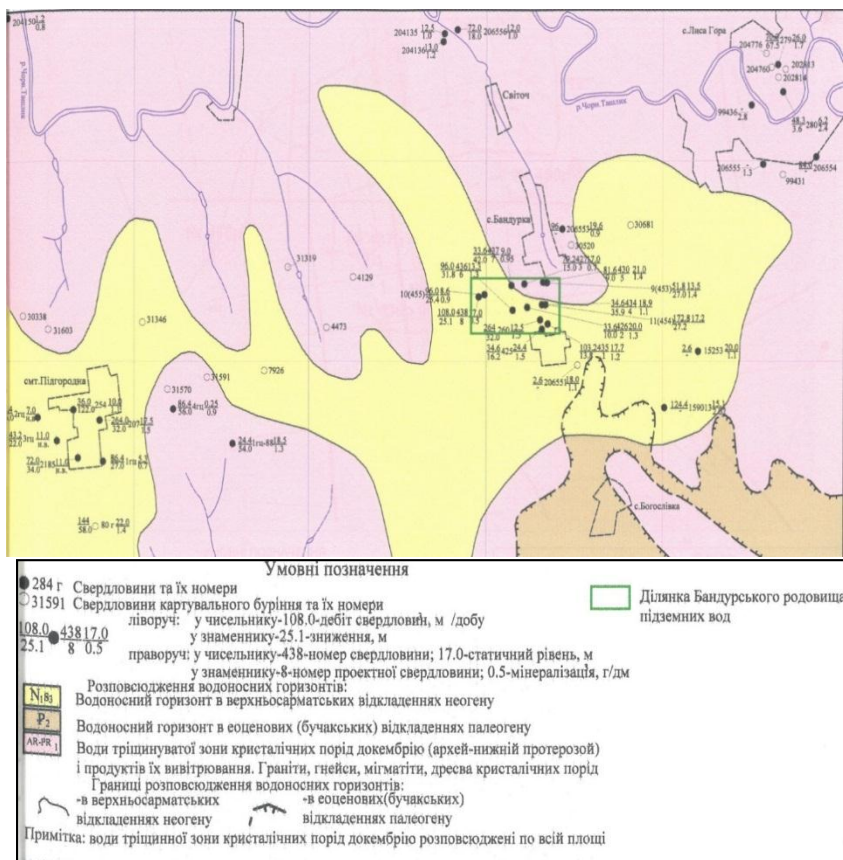


Рис.13.23 Область тріщинних вод Українського кристалічного щита

Така густина приблизно відповідає густині пухлих утворень в яких, в основному, сформований сучасний рельєф. За обчисленими значеннями g_a була складена гравіметрична карта в масштабі 1:10000 з ґрунтиним ізоаномал 0,1 мГал (рис.13.24).

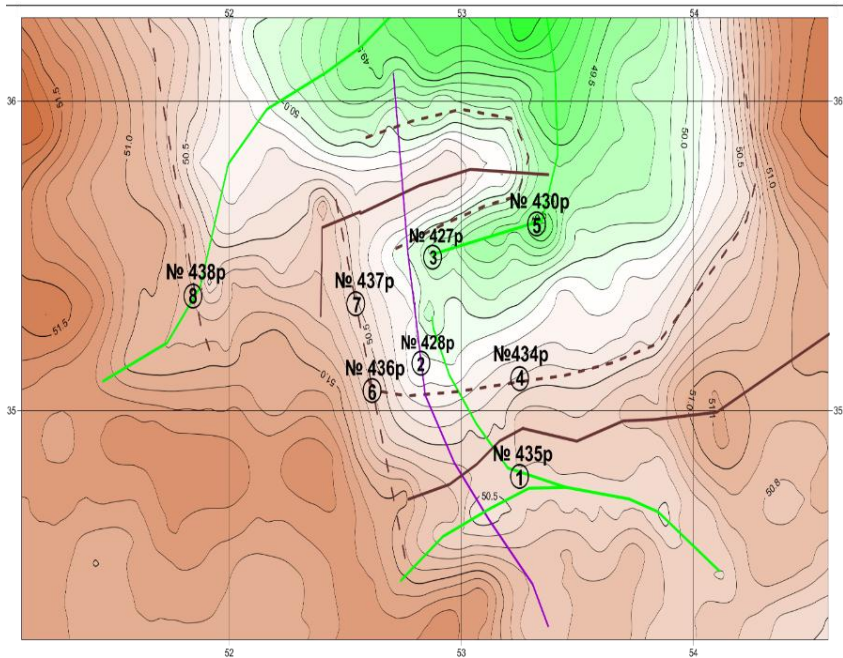


Рис. 13.24 Гравіметрична карта в редукції Буге ($\delta = 1.9$).

М-б 1:10 000

Умовні позначення

Осі гравіметричних аномалій:

— додатні;
— від'ємні.

----- осі зон максимальних градієнтів Δg_a .

— — — осі зон порушення кореляції.

Відповідні дослідження гравітаційного поля дали змогу виділити:

1. Осьові зони максимальних градієнтів Δg_a ;

2. Осьові зони порушення кореляції,

які є перспективними для розвідувальних пошуків.

Вони врешті решт стали перспективними для пошуку родовищ підземних вод.

Такий комплекс гідрогеологічних та геофізичних досліджень дав змогу побудувати результативну карту результатів комплексної інтерпретації геофізичних полів (рис.13.25).

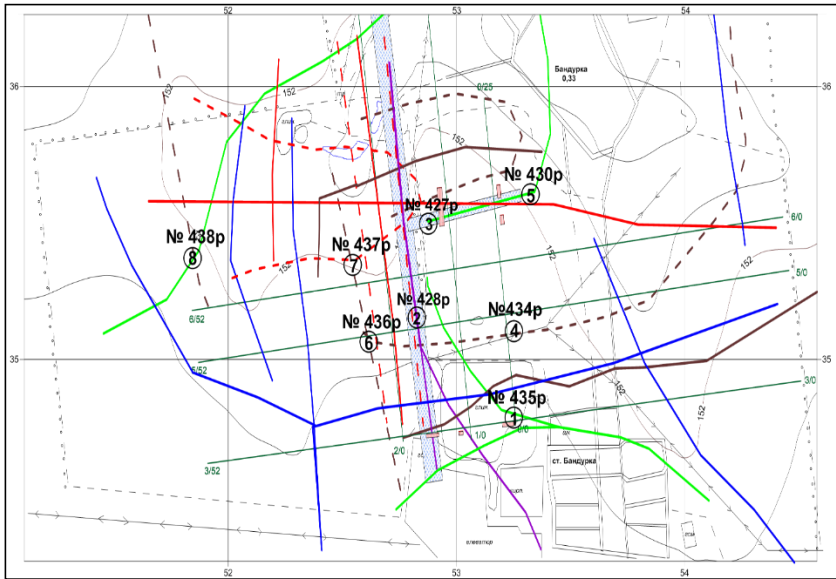


Рис. 13.25 Карта результатів комплексної інтерпретації геофізичних полів і ситуаційна схема розташування бурових свердловин. М-б 1:10 000.

Умовні позначення див. на рис. 13.24

13.5. ЗАСТОСУВАННЯ ГРАВИМЕТРІЇ В ІНЖЕНЕРНІЙ ГЕОЛОГІЇ

Ще в 1965 р. Г.П.Ітон та інші вчені [168, 170] розглянули можливість застосування вимірювань сили тяжіння до рекогносцирувального картографування рельєфу субалювіальних корінних порід, оцінки глибини корінних порід і вимірювання на місці пористості водоносного горизонту. Було зроблено висновок, що на той час гравіметричне картографування алювійованої

місцевості, що підстиляється відносно щільною корінною породою, забезпечило швидкий спосіб отримати якісну картину рельєфу похованої корінної породи, і ця інформація була б корисною для вирішення задач інженерної геології. Тоді ж було встановлено, що існуюча апаратура гравіметричного методу та методики зйомок не дають можливості чітко встановити невеликі геологічні зміни. Але фактично такі дослідження були першими, де було застосовано гравіметричну зйомку для вирішення задач інженерної геології [171].

Удосконалення гравіметричної апаратури, методик зйомки та фізико-математичного моделювання дає можливість вирішення задач інженерної геології на сучасному рівні.

Обзорів, дрібні- та середньомасштабні інженерно-геологічні зйомки виконуються після геолого-геофізичних картувальних робіт відповідного масштабу та призначені для типізації ділянок, які вивчаються за визначеними, подібними в загальних рисах інженерно-геологічними умовами зі спеціалізованим вивченням інженерно-геологічних властивостей гірських порід в масиві, фізико-геологічних явищ та інженерно-геологічних процесів. Інженерно-геологічні [172].

Сучасні крупномасштабні (1:50000 та крупніше) інженерно-геологічні зйомки вирішують в залежності від цільового призначення ряд задач, де гравіметрія може відігравати істотну роль. До таких задач можна віднести:

1. Виявлення та прослідковування по площі та глибині зон тектонічних порушень, тріщинуватості, вивітреності корінних порід.
2. Розвідка та оконтурення древніх похованих долин.
3. Виявлення та простежування зон закарстованості, пустот природного та штучного походження.
4. Виявлення та вивчення зсувів.

Одним з прикладів успішного застосування гравірозвідки з подальшим використанням фізико-геологічного моделювання є вивчення карсту на руднику «Ново-Голинь» Калуш-Голинського родовища калійної солі, які були проведені в 2007 – 2008 р.р. [173].

Для природного карсту чи зони його розвитку та поширення, аналогічно як і для соляної камери, характерне значне

розушільнення відносно вміщуючого середовища, оскільки густина заповнювача (вода, повітря) порожнин набагато менша густини порушених гірських порід: солі - $2.1+2.25 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, мінералізованої води - $1.23+1.3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

Методика високоточних гравіметричних спостережень дозволила досягти виявлення аномалій сили тяжіння з точністю в $\pm 0,02 \text{ мГал}$. Дослідні роботи дозволили встановити, що максимально можливий крок між точками спостережень, при якому надійно будуть виявлені та проінтерпретовані очікувані аномалії, має складати не більше 20 м по профілю, а між профілями відстань повинна складати не більше 40 м.

Крім того було враховано, що розділювальна здатність методів високоточної гравірозвідки при побудовах детальних моделей геологічних середовищ пов'язана не тільки з точністю спостережень та з похибками первинної обробки (визначення аномалій сили тяжіння в редукції Буге), але і від ступені гравітаційної активності пошукових геологічних утворень та від можливостей комп'ютерних технологій, що використовуються.

Це пояснюється тим фактом, що при постановці оберненої задачі гравірозвідки оцінка розділювальної здатності пов'язана з визначенням мінімальної інтенсивності та розмірів очікуваних локальних аномалій поля. На основі порівняння даних параметрів аномалій з можливою точністю спостережень та можливостями комп'ютерної системи обґрунтовується метод гравірозвідки з метою виявлення та картування пошукових геологічних об'єктів.

Реально виміряні значення густини гірських порід Калуш-Голинського родовища були покладені в основу моделі, з урахуванням особливостей реальної геологічної ситуації.

Для з'ясування можливостей високоточної гравіметрії при прогнозуванні карстоутворень, провалів, осідання земної поверхні та вивчення динаміки їхнього розвитку, розрахований гравітаційний ефект від них на прикладі геологічного розрізу ділянки рудника «Ново-Голинь» (рис. 13.25).

Профіль для гравіметричного моделювання був обраний по лінії реперних точок геодезичних спостережень.

Моделювання гравітаційних аномалій від впливу відпрацьованих гірничих виробок було виконано для наступних варіантів:

- 1) модель однорідних товщ без карстоутворень, соляні камери насичені розсолами, густина розсолів — $1,30 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ (рис 13.25, крива 1);
- 2) модель з локальною зоною розвитку карсту над пластом солі, породи у межах карсту розущільнені на $0,10 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$; максимальний ефект пониження рівня гравітаційного поля (відносно модельного поля за першим варіантом) склав $-0,075 \cdot 10 \text{ м/с}^2$ (рис 13.25, крива 2);
- 3) модель без карстоутворення зі зміненою густиною розсолів (що можливо за рахунок руйнування ціликів, прориву ґрунтових вод, тощо) на $+0,2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$; аномальний гравітаційний ефект склав: $\pm 0,05 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}^2$;
- 4) модель без карстоутворення зі зміненою густиною розсолів на $+0,1 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$; аномальний гравітаційний ефект — $\pm 0,025 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}^2$.

Також для порівняння гравітаційних ефектів було виконано моделювання для варіанту розрізу, у якому камери I і II не заповнені розсолами (рис 13.25, крива 3) та у якому камери відсутні (рис 13.25, крива 4).

Інтенсивність та розміри розрахованих аномалій гравітаційного поля для означених моделей реальних змін техногенного походження по розрізу реально підтверджують можливість ефективного контролю екологічного стану геологічного середовища за допомогою високоточної гравірозвідки.

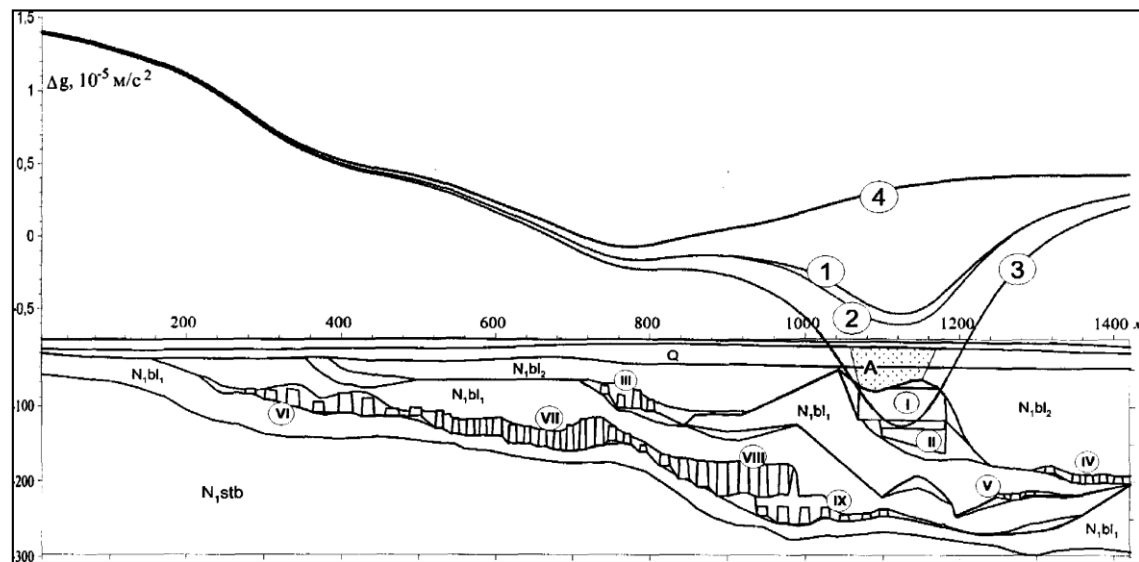


Рис.13.25. Ділянка «Східна Голинь» рудника "Ново-Голинь".

I, II...IX — камери у пластах солі, або групи камер; А — зона ймовірного розуцільнення над камерами;
1-4 — гравітаційні ефекти для низки варіантів густинного розрізу

13.6. ЗАСТОСУВАННЯ ГРАВІМЕТРІЇ ПРИ ВИРІШЕННІ ЗАДАЧ АРХЕОЛОГІЇ

Слід зазначити, що гравірозвідка порівняно рідко застосовується для вирішення таких задач. Це пов'язано, в основному, з малими геометричними розмірами вишукуваних археологічних об'єктів і різними завадами, що ускладнюють дослідження. Сучасне гравіметричне обладнання дозволяє реєструвати аномалії з точністю до одного мікрогала (10^{-8} м/с²), що створює додаткові можливості застосування мікрогравіметричної зйомки для вирішення археологічних задач.

При цьому різко підвищується роль градієнтометричних та варіометричних досліджень. Досить важливим є факт застосування при детальних гравітаційних зйомках для вирішення археологічних задач методів обчислення рельєфу місцевості, які раніше широко використовувалися, в основному, для дослідження рудних родовищ у гірських умовах.

Розробка нової сучасної гравіметричної та варіометричної (градієнтометричної) апаратури (що дозволяє реєструвати раніше недоступні малі аномалії) та створення нових методологій обробки й інтерпретації гравітаційних даних послужили поштовхом до появи методології мікрогравітації в геофізиці навколишнього середовища [176-190].

При вивченні археологічних пам'яток слід враховувати досягнення словацьких та інших дослідників [176-177, 187] що досягли значних успіхів при вирішенні поставленої задачі. В якості останніх досягнень методу мікрогравітації можна розглянути роботи, що були виконані у церкві Св. Миколая в Пуканці (Словаччина) для вивчення підповерхневих порожнин.

Їх дослідження ще раз підтвердили можливість застосування вимірювань вертикального градієнту сили тяжіння для виявлення подібних дефектів, оскільки він дає додаткову та більш точну інформацію про розподіл неоднорідностей густини на невеликих глибинах приблизно до 15 м. Fajklewicz (1976).

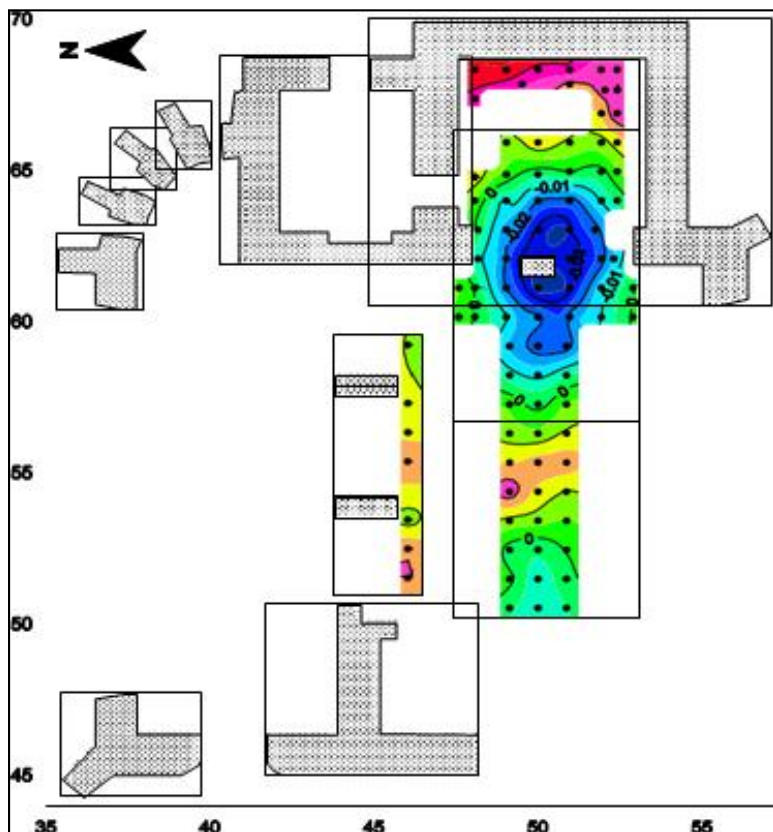


Рис. 13.26 Залишкова карта аномалії Буге ділянки на основі аналітичного продовження в нижній напівпростір (після введення поправки за густину проміжкового шару) в мГал.

Гравітаційні спостереження проводилися з застосуванням відносного гравіметра Scintrex CG-5. Крім звичайних гравіметричних спостережень виконувалася вертикальна градієнтна зйомка, метою якої було визначення реального вертикального градієнту сили тяжіння та його подальше використання для інтерпретації гравітаційних даних.

При інтерпретації досліджень мікрогравітації визначалися відносні варіації локального гравітаційного поля. Поправкою за широту було знехтувано через малі розміри ділянки робіт.

За результатами інтерпретації було отримано значну від'ємну аномалію. Деконволюція Ейлера забезпечила приблизне положення та глибину до джерела аномалії. Форму та глибину об'єкту пошуків оцінювали за допомогою 3D моделювання густини. Результати інтерпретації показали, що склеп розташовується приблизно на глибині 1 м під підлогою в апсиді.

Такі дослідження свідчать, що метод мікрогравітації є дуже ефективним і, що істотно важливо, неруйнівним інструментом для виявлення антропогенних порожнин у старих історичних будівлях.

Завдяки своїм технічним характеристикам використання сучасних автоматизованих гравіметрів Scintrex CG-5 дозволяє вирішувати практично всі задачі приповерхневих пошуків в археології.

При вирішенні задач інтерпретації даних гравіметричних спостережень особливу увагу слід приділяти обробці даних, особливо оцінці ефекту археологічних забудов, який може створювати помилкові від'ємні аномалії та спотворювати поле аномалії Буге.

Слід відзначити, що підвищення ступеня інтерпретації даних мікрогравітаційної зйомки можна підвищити, якщо їх супроводжувати георадарними вимірюваннями.

Такі мікрогравіметричні дослідження слід супроводжувати моделюванням та розширеним аналізом гравітаційних аномалій для оцінки реальної інтенсивності останніх та визначення ефективності проєктованих гравіметричних мереж зйомки. Вважається доцільним і обчислення других та третіх похідних потенціалу сили тяжіння.

Реальні вимірювання похідних сили тяжіння при таких мікрогравітаційних археологічних дослідженнях не можуть бути замінені жодними методами трансформації.

ЛИТЕРАТУРА

1. ТОРГЕ В. Гравиметрия: Пер. с англ. — М., Мир, 1999. — 429 с.
2. HALL, D. H.: History of the earth sciences during the scientific and industrial revolutions. Elsevier Scient. Publ. Comp., Amsterdam-Oxford-New York 1976.
3. TODHUNTER, I.: A history of the mathematical theories of attraction and the figure of the earth. Macmillan and Co. 1873 (Dover Publ. Inc., New York 1962).
4. BATES, C. C., T. F. GASKELL, R. B. PRICE: Geophysics in the affairs of man. Pergamon Press, Oxford etc. 1982.
5. MESSERSCHMITT, J. B.: Die Schwerebestimmung an der Erdoberfläche. F. Vieweg u. Sohn, Braunschweig 1908.
6. Clairaut, A.C.: Theorie de la figure de la terre, tiree des principes de l'hydrostatique. Paris 1743. [Имеется перевод: Клеро А. Теория фигуры Земли, основанная на началах гидростатики. - М.: Изд-во АН СССР, 1947.]
7. BOUGUER, P.: La figure de la terre déterminée par les observations environs de l'équateur. Paris 1749.
8. BORDA, J. C., J. D. CASSINI DE THURY: Expériences pour connaître la longueur du pendule, qui bat les secondes à Paris. Base du Système métrique décimal, T. III, Paris 1792.
9. KATER, H.: An account of experiments for determining the length of the pendulum vibrating seconds in the latitude of London. Phil. Trans. Roy. Soc., London, A 108, 33-102, 1818.
10. KATER, H.: An account of experiments for determining the variation in the length of the pendulum vibrating seconds, at the principal stations of the Trigonometrical Survey of Great Britain. Phil. Trans. Roy. Soc., London, A 109, 337-508', 1819.
11. BESSEL, F. W.: Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekundenpendels. Abh. Kgl. Preufi. Akad. d. Wiss. zu Berlin, math. Kl., Berlin 1828.
12. BESSEL, F. W.: Construction eines symmetrisch geformten Pendels mit reciproken Axen. Astronomische Nachr., Altona 30, 1-16, 1849.
13. LAPLACE, P. S.: Mécanique Céleste. Tome 2, livre III,

146-152, Paris 1799.

14. GAUSS, C. F.: Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona durch Beobachtungen am Ramsdenschen Zenithsector. Vandenhoeck u. Ruprecht, Göttingen 1828.

15. LILLISTON, J. B.: Über unsere jetzige Kenntniss der Gestalt und Größe der Erde. Nachr. d. Kgl. Gesellsch. d. Wiss. und d. Georg-August-Universität, 33-98, Göttingen 1873.

16. SABINE, E.: An account of experiments to determine the figure of the earth by means of the pendulum vibrating seconds in different latitudes. London 1825.

17. AIRY, G. B.: On the computation of the effect of the attraction of mountain-masses, as disturbing the apparent astronomical latitude of stations in geodetic surveys. Phil. Trans. Roy. Soc., London, 145, 101-104, 1855.

18. STERNECK, R. VON: Der neue Pendelapparat des k. u. k. Militär-Geographischen Institutes. Mitt d. K. K. Milit.-Geogr. Inst., VII, Wien 1887.

19. CAVENDISH, H.: Experiments to determine the density of the earth. Phil. Trans. Roy. Soc., London, 88, 469-526, 1798.

20. JOLLY, PH. VON: Die Anwendung der Waage auf Probleme der Gravitation. Ann. d. Physik 5, 112-134, 1878.

21. PRATT, J. H.: On the deflection of the plumb-line in India, caused by the attraction of the Himalaya Mountains and of the elevated regions beyond, and its modification by the compensating effect of a deficiency of matter below the mountain mass. Phil. Trans. Roy. Soc., London, 149, 745—778, 1859.

22. HELMERT, F.R.: die mathematischen und physikalischen Theorien in höheren Geodäsie. Teubner, Leipzig 1880/1884. (Nachdruck Minerva GmbH, Frankfurt a. M. 1962.) [Имеется перевод I тома: Гельмерт Ф.Р. Математические и физические теории высшей геодезии, т. I. — М.: Геодезиздат, 1962.]

23. HELMERT, F. R.: Die Schwerkraft im Hochgebirge, insbesondere in den Tyroler Alpen. Veröff. Kgl. Preuß. Geod. Inst., No. 1, Berlin 1890.

24. HELMERT, F. R.: Der normale Theil der Schwerkraft im Meeresniveau. Sitz. ber. Kgl. Preuß. Akad. d. Wiss. sch. zu Berlin, 328-336, 1901.

25. EÖtvös, R. von: Untersuchungen über Gravitation und Erdmagnetismus. Ann. d. Physik 59, 354—400, 1896. [Имеется перевод: Этвеш Р. Опыты над тяготением и земным магнетизмом. Сб. рефератов и переводных статей по геодезическим вопросам. Приложение к "Запискам Военно-топографического управления Главного штаба", ч. 63, С:Пб., Воен. тип., 1910, с.2-49.]
26. EÖtvös, R.von: Bestimmung der Gradienten der Schwerkraft und ihrer Niveauflächen mit Hilfe der Drehwaage. Verh. D. XV allg. Konf. der Intern. Erdmessung 1906, Db. I, 337—395, Budapest 1908. [Имеется перевод: Этвеш Р. Определение градиентов силы тяжести и ее поверхностей уровня при помощи крутильных весов. Сб. рефератов и переводных статей по геодезическим вопросам. Приложение в "Записках Военно-топографического управления Главного штаба", ч. 63, С-Пб., Воен. тип., 1910, 73-127.]
27. SCHWEYDAR, W.: Die Bedeutung der Drehwaage von Eotvös für die geologische Forschung nebst Mitteilung der Ergebnisse einiger Messungen. Z. f. prakt. Geologie 26, 157-162, 1918.
28. HERSCHEL, J.F.W.: A treasure on astronomy. Longman, London, 1833. [Имеется перевод: Гершель Дж. Очерки астрономии, т. I и II. - М., 1861—1862.]
29. ЖУРАВЛЕВ Н.Ф. Определение сжатия земного эллипсоида по измерениям силы тя- жести.-Тр. ГАИШ, т. 14, ч. 2, М., 1940.
30. HAYFORD, J. F.: The figure of the earth and isostasy from measurements in the United States. U.S. Coast and Geod. Survey, Washington, D. C. 1909. 278*HAYFORD, J. F., W. BOWIE: The effect of topography and isostatic compensation upon the intensity of gravity. U.S. Coast and Geod. Survey, Spec. Publ. No.10, Washington 1912.
31. BOWIE, W.: Investigations of gravity and isostasy. U.S. Coast and Geodetic Survey, Spec.Publ. No. 40, Washington 1917.
32. HEISKANEN, W. A.: Untersuchungen über Schwerkraft und Isostasie. Veröff.-Finn. Geod. Inst., No. 4, Helsinki 1924.
33. VENING-MEINESZ, F. A.: Une nouvelle méthode pour la réduction isostatique régionale de l'intensité de la pesanteur. Bull. Géod. No. 29, 33-51, 1931.
34. HEISKANEN, W. A.: Ist die Erde ein dreiachsiges Ellipsoid? Gerlands Beitr. z.Geophysik 19, 356-377, 1928.
35. PIZETTI, P.: Sulla eepressione della gravfta alia superficie

- del geoide, supposto ellissoidico. Atti R. Accad. Lincei, Ser. V, Vol. 3, 1894.
36. SOMIGLIANA, C.: Teoria generale del campo gravitazionale dell'elsoide di rotazione. Mem. della Soc. Astron. Ital, Vol. IV, Milano 1929.
 37. JEFFREYS, H.: An application of the free-air reduction of gravity. Gerlands Beitr. z. Geophysik 31, 378-386, 1931.
 38. HIRVONEN, R. A.: The continental undulations of the geoid. Veröff. Finn. Geod. Inst., No. 19, Helsinki 1934.
 39. NETTLETON, L. L.: Geophysical prospecting for oil. McGraw-Hill, New York, N.Y. 1940.
 40. HAMMER, S.: Estimating ore masses in gravity prospecting. Geophysics 10, 50-62, 1945.
 41. HAALCK, H.: Lehrbuch der angewandten Geophysik. Gebr. Bomtraeger, Berlin-Nikolassee 1953.
 42. JUNG, K.: Schwerkraft verfahren in der angewandten Geophysik. Akad. Verlagsgesellschaft Geest u. Portig KG, Leipzig 1961.
 43. GRAF, A.: Über die bisherigen Erfahrungen und Meßergebnisse mit dem Seegravimeter. J. Geophys. 23, 4-25, 1957.
 44. LACOSTE, L. J. B.: Surface ship gravity measurements on the Texas A and M College ship "Hidalgo". Geophysics 24, 309-322, 1959.
 45. WOOLLARD, G. P.: The gravity meter as a geodetic instrument. Geophysics 15, 1-29, 1950.
 46. HEISKANEN: W. A.: On the World Geodetic System. Veröff. Finn. Geod. Inst., Nr. 39, Helsinki 1951.
 47. HEISKANEN: W. A.: The Columbus geoid. Trans. Am. Geophys. Union 38, 841-848, 1957.
 48. TANNI, L.: On the continental undulations of the geoid as determined from the present gravity material. Publ. Isos tat. Inst. of I.A.G., No. 18, Helsinki 1948.
 49. МОЛОДЕНСКИЙ М.С. Основные вопросы геодезической гравиметрии. Тр. ЦНИИГАиК. Вып. 42. М., Геодезиздат, 1945;
 50. МОЛОДЕНСКИЙ М.С. Внешнее гравитационное поле и фигура физической поверхности Земли-Изв. АН СССР. Сер. географическая и геофизическая. Т. XII, N* 3, 1948, с. 193-211.
 51. HIRVONEN, R. A.: On the statistical analysis of gravity

- anomalies. Publ. Isostat. Inst. Int. Assoc. Geod., No. 37, Helsinki 1962.
52. MORITZ, H.: Interpolation and prediction of point gravity anomalies. Publ. Isostat. Inst. Int. Assoc. Geod., No. 40, Helsinki 1963.
53. KRARUP, T.: A contribution to the mathematical foundation of physical geodesy. Danish Geod. Inst., Medd. No. 44, Copenhagen 1969.
54. BJERHAMMAR, A.: A new theory of geodetic gravity. Trans. Roy. Inst. Techn. No. 243, Stockholm 1964.
55. GUILLET, A.: Mesure precise de l'accélération g de la chute des corps dans le vide. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 207, 614-616, 1938.
56. VOLET, CH.: Sur la mesure absolue de la gravité. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 222, 373-375, 1946.
57. FALLER, J. E., Y. G. Guo, J. GSCHWIND, T. M. NIEBAUER, R. L. RINKER, J. XUE: The JILA portable absolute gravity apparatus. BGI No. 53, 87-97, 1983.
58. SAKUMA, A.: État actuel de la nouvelle détermination absolue de la pesanteur au Bureau International des Poids et Mesures, Sèvres. Bull. Géod. No. 69, 249-260, 1963.
59. COOK, A. H.: The absolute determination of the acceleration due to gravity. Metrologia I, 84-114, 1965.
60. ДБУЛІТ П. Д. Місце геодезії та гравіметрії в комплексі наук про Землю // Геодинаміка 1(20)/2016
61. MORELLI, C.: Compensazione della rete internazionale della stazione de riferimento per le misure di gravita relativa. Inst. Geofis. Publ. No. 211, Trieste 1946.
62. HIRVONEN, R. A.: On the establishment of the values of gravity for the national reference stations. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. H III, Geol. Geogr. 17, Helsinki 1948.
63. WOOLIARD, G. P., J. C. ROSE: International gravity measurements. S.E.G. Monogr., Univ. of Wisconsin, Geophys. and Polar. Res. Center, Madison, Wisconsin 1963.
64. KOZAI, Y.: The earth's gravitational potential derived from the motion of satellite 1958)32. Smithsonian Astrophysical Observatory, Research in Space Science, Spec. Rep. 22, 1959.
65. MERSON, R. H., D. G. KING-HELE: The use of artificial satellites to explore the earth's gravitational field; results from Sputnik 2 (1957/?). Nature 182, 640-641, 1958.

66. MARSH, J. G., S. VINCENT: Global detailed gravimetric geoid computation and model analysis. *Geophys. Surveys* 1, 481-511, 1974.
67. BOTT, M. H. P.: The use of rapid digital computing methods for direct gravity interpretation of sedimentary basins. *Geophys. J. R. Astr. Soc.* 3, 63-67, 1960.
68. TALWANI, M., M. EWING: Rapid computation of gravitational attraction of three dimensional bodies of arbitrary shape. *Geophysics* 25, 203-225, 1960.
69. BHATTACHARYYA, B. K.: Two-dimensional harmonic analysis as a tool for magnetic interpretation. *Geophysics* 30, 829-857, 1965.
70. TSUBOI, **Чн.**, T. FUCHIDA: Relations between gravity values and corresponding subterranean mass distribution. *Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo Univ.* 15, 636-649, 16, 273-284, 17, 351-384, 1937/1939.
71. SKEELS, D. C.: Ambiguity in gravity interpretation. *Geophysics* 12, 43-56, 1947.
72. MORELLI, C., C. GANTAR, T. HONKASALO, R. K. MCCONNELL, J. G. TANNER, B. SZABO, U. UOTILA, C. T. WHALEN: The International Standardization Net 1971 (ISGN71). I.U.G.G.-I.A.G.-Publ. Spec. No. 4, Paris 1974.
73. AGARWAL, G. C., C. S. JOSHI (eds.): National Report on the Geodetic and Gravimetric Work done in India 1983-86. Pres. XIX. Gen. Ass. I.U.G.G., Vancouver 1987.
74. ДВУЛІТ П. Д. Гравіметрична мережа України: сучасний стан і перспективи розвитку // *Геодинаміка*. - 2009. - № 1. - С. 44-46
75. КРЮКОВ О. М., Чинков В. М., Мірошніченко О. М., Сидоренко І. С. Стан та перспективи гравіметричного дослідження території України // *Укр. Метрол. Журн.* - 1998. - Вип. 3. - С. 42-45
76. ДВУЛІТ П. Д., ЕНТИН В. А., КУЧЕР О. В. Розвиток державної гравіметричної мережі України як пріоритетна складова програм із проблем мінерально-сировинного забезпечення країни, Мінеральні ресурси України // *Науковий журнал*. - К.: Укр. ДІРІ, 2010. - № 2. - С. 5-6.;
77. ДВУЛІТ П. Д., СМЕЛЯНЕЦЬ О. В. Завдання модернізації гравіметричної мережі України // *Вісник геодезії та картографії*. - К., 2013. - № 6. - С. 6-10

78. СТАРОСТЕНКО В.І. Визначення вертикальних похідних потенціалу притягання по результатах спостережень з горизонтальним градієнтметром, 1970
79. СТАРОСТЕНКО В.І. Стійкі чисельні методи в залахах гравіметрії, 1978
80. СТАРОСТЕНКО В.І., СОБАКАРЬ Г. Т. Неприпливні зміни сили тяжіння, 1982
81. СТАРОСТЕНКО В.І. Методика вирішення прямих задач гравіметрії та магнітометрії на кулеподібних планетах, 1986.
82. БУЛАХ Е. Г. Прямые и обратные задачи гравиметрии и магнитометрии. Математические методы геологической интерпретации гравиметрических и магнитометрических данных : монография / Е. Г. Булах; Ин-т геофизики им. С.И.Субботина НАН Украины. - К. : Наук. думка, 2010. - 463 с.
83. БУЛАХ Е. Г. Обратные задачи гравиметрии для совокупности шаровых тел / Е. Г. Булах, М. Н. Маркова // Геоінформатика. - 2006. - № 2. - С. 19-23.
84. БУЛАХ Е. Г. Обзор работ по методам минимизации в обратных задачах гравиметрии и магнитометрии / Е. Г. Булах // Геофиз. журн.. - 1999. - 21, № 4. - С. 5-19
85. БУЛАХ Е. Г. Применение метода минимизации для решения задач структурной геологии по данным гравиразведки [Текст] : монография / Е. Г. Булах, В. А. Ржаницын, М. Н. Маркова ; АН УССР, Ин-т геофизики. - К. : Наукова думка, 1976. - 218, [2] с
86. ТЯПКИН О. К. Применение гравиразведки для оценки геолого-экологических последствий горнодобывающей деятельности / О. К. Тяпкин, В. П. Солдатенко // Геофиз. журн.. - 2000. - 22, № 1. - С. 21-30
87. ТЯПКИН О. К. Использование гравиразведки и магниторазведки в экологических исследованиях / О. К. Тяпкин // Геофиз. журн.. - 2002. - 24, № 2. - С. 71-78.
88. БІЛОГАН Г. Р. Про розв'язування спеціальної оберненої гравіметричної задачі / Г. Р. Білоган // Вісн. астрон. шк.. - 2000. - 1, № 1. - С. 79-81. - Бібліогр.: 4 назв. - укр.
89. ПЕТРОВСКИЙ А. П. Информационное обеспечение и модельные представления интегральной интерпретации геолого-

геофизических данных при изучении нефтегазоносных структур / А. П. Петровский // Геофиз. журн.. - 2004. - 26, № 3. - С. 77-86.

90. СВЕТЛОВ С.М. Методы анализа и снижения динамических погрешностей баллистических гравиметров: Дис... канд. техн. наук: 05.11.15 / Харьковский гос. НИИ метрологии (ХГНИИМ). - Х., 2000. - 172л.

91. БАЛК П. И. Метод минимизации риска для решения обратных задач гравиразведки при слабых предположениях о свойствах геологических помех / П. И. Балк, А. С. Долгаль // Геофиз. журн.. - 2016. - 38, № 5. - С. 108-118.

92. ЯКИМЧУК Н. А. Пространственное восстановление гравитационных и магнитных полей для дистанционных исследований Земли [Текст] : дис... д-ра физ.-мат. наук: 04.00.22 / Якимчук Николай Андреевич ; Институт бизнеса, менеджмента и переподготовки кадров Госкомгеологии Украины. - К., 1997. - 345 с

93. ЖУРАВЛЕВА О.И. Методы решения обратных задач структурной гравиметрии на основе равномерных критериев оптимальности [Текст] : дис... канд. физ.-мат. наук: 01.04.12 / Журавлева Ольга Игоревна ; Ивано-Франковский гос. технический ун-т нефти и газа. - Ивано-Франковск, 1996. - 185 л.

94. КИШМАН-ЛАВАНОВА Т.М. Прямі та обернені задачі гравіметрії в класі блочно побудованих геологічних моделей [Текст] : дис... канд. фіз.-мат. наук: 04.00.22 / Кишман-Лаванова Тамара Миколаївна ; НАН України, Ін-т геофізики ім. С. І. Субботіна. - К., 2008. - 139 арк

95. АНИКЕЕВ С. Г. Методика интерпретации гравиметрических материалов при произвольном строении геологических сред [Текст] : дис... канд. геол. наук: 04.00.22 / Аникеев Сергей Григорьевич ; Ивано-Франковский гос. технический ун-т нефти и газа. - Ивано-Франковск, 1999. - 242 л. -

96. ДЕНИСЮК Р. П. Плотностное моделирование различных типов геологических структур на основе созданной системы решения обратных задач гравиметрии [Текст] : дис... д-ра геол. наук: 04.00.22 / Денисюк Ростислав Павлович ; Ивано-Франковский гос. технический ун-т нефти и газа. - Ивано-Франковск, 1999. - 350 л

97. ТРОЙНИЧ К. С. Комплексна інверсія даних сейсмо- та гравіроздав методом одночасної ітеративної реконструкції [Текст]

- : автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук : 04.00.05 / Тройніч Костянтин Сергійович ; Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. - Київ, 2016. - 20 с
98. ГРАВИМЕТРІЯ. Підручник/ Дзуліт П.Д.- Львів. ЛАГТ, 1998.-196с.
99. КАУФМАН А.А., ХАНСЕН Р. Принципы метода гравиметрии / Пер. с англ. – Междунар. Ассоз. «АИС», 2011, 376 с.
100. SJOBERG en W. A., MORITZ H.: Physical geodesy. W. H. Freeman and Co., San Francisco and London 1967.
101. BLAKELY R. Potential Theory in Gravity and Magnetic Application, Cambridge University Press. 1996
102. GROTEN E.: Geodesy and the earth's gravity field. F. Diimmler, Bonn 1979/1980
103. БЕЗРОДНИЙ Д., КУЛІНІЧ Ю. Аналітична апроксимація геопотенціального поля методом Квадрадерева // Матеріали конференції «Xth Interna-tional Conference on Geoin-formatics - Theoretical and Applied Aspects», 2011., Ел. ресурс S145
104. HEISKANEN W. A., MORITZ H.: Physical geodesy. W. H. Freeman and Co., San Francisco and London 1967.
105. MORITZ, H.: Geodetic Reference System 1980. In: С. С. Tscherning (ibl.), The Geodesist's Handbook 1984 -Bull. Geod. 58, 388-398, 1984.
106. БЕЗРОДНИЙ Д., ЛУГОВСЬКА Н. Використання горизонтального градієнту сили тяжіння при вивченні геометрії геологічних об'єктів Матеріали конференції «Xth International Conference on Geoinformatics - Theoretical and Applied Aspects», 2011. Електронний ресурс S144
107. PIZETTI, P.: Sulla espressione della gravita alla superficie del geoide, supposto ellissoidico. Atti R. Accad. Lincei, Ser. V, Vol. 3, 1894.
108. TORGE, W. Das Schweregrundnetz 1976 der Bundesrepublik Deutschbland (DSGN76). ZfV 105, 454-57, 1980.
109. ГРУШИНСКИЙ Н.П. Основы гравиметрии. М., Наука, 1983
110. ДЗУЛІТ П.Д. Гравіметрія / Підручник. Львів, ЛАГТ, 1998. 196 с.
111. ПРИЛУКОВ В.В. Алгоритмічний та програмний розв'язок прямих та обернених задач гравіметрії та магнітометрії у класі тіл, що задані горизонтальними пластинами : Дис... канд. наук: 04.00.22 - 2007.

112. БРОВАР В В Гравитационное поле в задачах инженерной геодезии – М., Недра, 1981
113. KING, R. W., MASTERS E. G., RIZOS C., STOLZ A., COLLINS J.: Surveying with Global Positioning System-GPS. F. Diimmler, Bonn 1987
114. SJOBERG L. E. Integral formulas for heterogeneous data in physical geodesy. Bull. Geod. 53, 297-315, 1979.
115. EDERSEN L. B.: Constrained inversion of potential field data. Geophys. Prosp. 27, 726-748, 1979a.
116. ЗАГРЕБИН Д. В. Введение в теоретическую гравиметрию. Л., Наука, 1976
117. МИРОНОВ В С Курс гравиразведки // Л Недра 1980
118. МУДРЕЦОВА Е А, Веселов К Е Гравиразведка / Справочник геофизика // М Недра, 1990
119. ОГОРОВОДА Л В . ШИМБИРЕВ Б П , ЮЗЕФОВИЧ А П Гравиметрия // М., Недра. 1978
120. ЦУБОИ Т. Гравитационное поле Земли // М Мир, 1982
121. ШИМБИРЕВ Б П Теория фигуры Земли // М Недра, 1975
122. BARLIK M. PACHUTA A , PRASZYNSKA-WOJCIECHOWSKA M. Cwiczeniu geodezji fizycznej i grawimetrii // Warszawa, 1992
123. БЕЗРОДНА І.М. Посібник з лабораторного практикуму з курсу «Петрофізика» // http://www.geol.univ.kiev.ua/lib/lab_Petrophysics.pdf
124. ДВУЛІТ П.Д., СМЕЛЯНЕЦЬ О.В. Про необхідність модернізації гравіметричної мережі України / Геодинаміка 2(13)/2012
125. ДВУЛІТ П.Д. Гравіметрична мережа України: сучасний стан і перспективи розвитку // Геодинаміка. - 2009. - № 1(8). - С. 44-46.
126. АНТОНОВ В.О. Проект на виконання геофізичних робіт по збереженню і відновленню Державної опорної гравіметричної мережі І і ІІ класу (титул 231/03). - Дніпропетровськ, 2003
127. СИДОРЕНКО Г.С., МІРОШНИЧЕНКО О.М., КУЧЕР О.В., ЗАСЬЦЬ І.М. Проблеми досягнення високої точності вимірів при побудові гравіметричної мережі // Вісник геодезії та картографії. - 2006. - № 5. - С. 10-16,

128. СИДОРЕНКО Г.С. К интеграции национальной гравиметрической сети Украины в мировую гравиметрическую сеть // Радиоэлектроника и информатика. – 2002
129. ДСТУ3382-96 Державна повірочна схема для засобів вимірювань прискорення сили ваги. Київ, Держстандарт України, 1996. 7 с.
130. BONDARENKO V.P., LOKSHIN YN. V., SVETLOVS M., SIDORENKO G.S., SOLOVYOV V.S., SHURUBKIN V.D. Metrology Absolute Gravimeters // International Association of Geodesy Symposia — Berlin, Heidelberg: Springer - Verlag, 1997. Vol. 117. P. 20-23.
131. ЧЕРЕМШТСЬКИЙ М, КУЧЕРА О. Впровадження світової геодезичної системи координат WGS-84 на території України // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва. Ювілейний збірник наукових праць, присвячений 5-й річниці профспілкового свята працівників геології, геодезії та картографії. Львів: Ліга-Прес, 2000. С. 10-12.
132. JANUSZ SCEDZINSKI Unigrace National Report of Poland // Reports of Geodesy №2(32), 1998, Inst. of Geodesy and Geod. Astr. Warsaw University of Technology. Warsaw. P.53-59.
133. MARCEL MOYEZES Unigrace National Report of Slovakia // Reports of Geodesy №2(32), 1998, Inst. of Geodesy and Geod. Astr. Warsaw University of Technology. Warsaw. P.65-71.
134. ТОЛСТОЙ М.І. та ін. Основи геофізики. К.: Обрії, 2007. – 446 с.
135. ПАНТЕЛЕЕВ В.Л. Теория Фигуры Земли, курс лекций, Москва, 2005
136. ВІРЧЕНКО Н. Основні методи розв'язання задач математичної фізики. 2006. Інтерс Воля. 96 с.
137. ДМИТРЕНКО А.П. Современные трансформации определения геоида: монография. – Кривой Рог: Минерал, 2012. –218 с
138. БРОВАР В.В. Гравитационное поле в задачах инженерной геодезии. - М.: Недра, 1983. - 112 с
139. ПАЛЯНИЦЯ Б. , ДЖУМАН Б. , СИДОРОВ І. Гравіметричні роботи на території Дністровської ГАЕС, Геодезія і геодинаміка, 24 – 31, 2018
140. ТРЕТЯК К. Аналіз результатів моніторингу острівних льодовиків антарктичного узбережжя цифровим стерео

фотограмметричним методом / К. Третьак, В. Глотов, Ю. Голубінка. - С. 130-136

141. КИВЕЛЮК Т.Т., ТЯПКИН К.Ф. Гравиразведка. Издание: Недра, Москва, 1982 г

142. АНІКЄЄВ С.Г. Про спосіб виявлення у полі сили тяжіння аномалій глибинних структур (на прикладі Українських Карпат). Геоінформатика, 2009, с. 47-53

143. ГАЙНАНОВ А.Г. Гравиметрические исследования земной коры океанов. МГУ. 1980. 240 с.

144. СТУПАК Н.К., НАУГОЛЬНКОВ В.Б. Использование ЭЦВМ для качественной интерпретации результатов комплексных геофизических наблюдений. Гозческ сборник. Киев. 1974. С. 60-61.

145. ЕНТИН, В. А., ГУСЬКОВ, С. И., ОРЛЮК, М. И., ГИНТОВ, О. Б., ОСЬМАК Р. В. (2015). Карта абсолютных значений поля силы тяжести территории Украины и некоторые аспекты ее возможной интерпретации. Геофизический журнал, 37(1), 53–56. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v37i1.2015.111323>.

146. ЕНТИН, В. А., ЛУКАШ, В. В. (1998). Отчет о результатах по подготовке геофизической и геохимической основы для ГДП-200 платформенного чехла и ГГК-200 кристаллического основания листа М-35-XXXVI (Гайворон). Киев, Геолфонды.

147. ЕНТИН, В. А. (2005). Геофізична основа тектонічної карти України масштабу 1:1000000. Геофизический журнал, 27(1), 74–88

148. ЕНТИН, В. А., ШИМКІВ, Л. М., НЕЧАЄВА, Т. С., ДЗЮБА, Б. М., ГИНТОВ, О. Б., ПАШКЕВИЧ, І. К., КРАСОВСЬКИЙ, С. С. (2002). Підготовка геофізичної основи тектонічної карти України масштабу 1:1000 000. Київ, Геоінформ України.

149. ЕНТИН В. А. (2005). Геофізична основа Тектонічної карти України масштабу 1:1 000 000. Геофизический журнал, 27(1), 74 – 88.

150. НЕЧАЄВ, С. В., ВОЙНОВСЬКИЙ, А. С., ІСАКОВ, Л. В., АНІЩЕНКО, Т. М., ШУКШИНА, Л. В., ЧУРУБОВ, С. С., ПАРФЕНОВА, А. Я. (2005). «Складання карти рідкіснометалевого зруденіння Українського щита масштабу 1:500 000». Київ, Вид. УкрДГРІ.

151. МИЧАК С. В. Структурні особливості і кінематичний розвиток західної частини Українського щита. – Кваліфікаційна

наукова праця на правах рукопису. Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора геологічних наук за спеціальністю 04.00.22 – геофізика (103 – Науки про Землю). – Інститут геофізики НАН України, Київ, 2019.

152. Гинтов О. Б., Орлюк М. И., Мычак С. В., Бакаржиева М. И., Фарфуляк Л. В. Субботско- Мошоринский этап деформирования земной коры Украинского щита // Геофиз. журн. - 2008. - 30, № 6. - С. 23-38.

153. ABD RAHIM BIN , ABDUL RAHIM BIN Application of Gravity Survey for Geological Mapping and Cavity Detection: Malaysian Case Studies // https://www.researchgate.net/publication/281079558_Application_of_Gravity_Survey_for_Geological_Mapping_and_Cavity_Detection_Malaysian_Case_Studies [accessed Aug 21 2022].

154. СТРАХОВ В.И. Основные идеи и методы извлечения информации из данных гравитационных и магнитных наблюдений. Теория и методика интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. М.: ИФЗ АНУССР. 1979. С. 146-269.

155. СТАРОСТЕНКО В.И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. Киев. Наукова думка. 1978. 227 с.

156. ГАЛИЗДРА Г.Я. Комплексная интерпретация геофизических полей при изучении глубинного строения земной коры. М., Недра. 1988.

157. ТЯПКИН К.Ф., КИВЕЛЮК Т.Т. Изучение разломных структур геолого-геофизическими методами. М. Неда 1982., 239 с.

158. БУРЬЯН Н.Р., БАЙСАРОВИЧ М.Н., БРОВКИНА Т.И., КРЯЧУН Н.М., ЛАЗАРЕНКО Ю.Н., МУСИЕНКО В.А., ПАШКОВСКАЯ Л.Н. Физико-геологическое моделирование геологических структур. Методические рекомендации. Л., 1991

159. ПЕТРОВСЬКИЙ О.П., 2004 Сучасні уявлення про глибинну геологічну будову Карпатського регіону на основі прямого 3D моделювання гравітаційного поля / І.М. Казюка, Т.О. Федченко, О.П. Петровський, О.М. Онищук, Н.С. Ганженко, Ю.В. Аніщенко // Геодинаміка. — 2011. — № 2 (11). — С. 95-97.

160. Сучасні уявлення про глибинну геологічну будову Карпатського регіону на основі прямого 3D моделювання гравітаційного поля / І.М. Казюка, Т.О. Федченко, О.П.

- Петровський, О.М. Онищук, Н.С. Ганженко, Ю.В. Аніщенко // Геодинаміка. — 2011. — № 2 (11). — С. 95-97.
161. Геологія і корисні копалини України : атлас; голов. ред. Л.С. Галецький.; НАНУ, Мін.екології та природних ресурсів. — К.: Такі справи, — 2001. - 168 с. — ISBN 966-02-2139-8
162. ПЕТРОВСЬКИЙ О.П., БОДЛЯК П.М., ФЕДЧЕНКО Т.О., КОСТИК А.О., ЯРЕМИН І.Я., ГНЕВУШ В.В. Сучасна просторова геолого-геофізична модель глибинної будови південно-східної частини Карпатського НГП та її адекватність гравітаційному полю. //Нафтогазова геофізика—інноваційні технології.—Матеріали конференції.—Ів.-Франківськ.—2009.—С.223-227.
163. ОМЕЛЬЧЕНКО В., ПІГУЛЕВСЬКИЙ П., ДУБРОВ Д., 2015 Використання гравірозвідки в комплексі геофізичних методів при вивченні солянокупольних структур ДДЗ. Вісник Київського університету, 3, с. 36-42
164. АНІКЄЄВ Г., ШУРОВСЬКИЙ О., 2015. Прогнозування нафтогазоперспективних ділянок у межах Південно-західної частини Срібненської депресії Дніпровсько-Донецької западини за даним гравірозвідки. Геодинаміка, № 1, с. 86-98.
165. БЕРЕЗКИН В.М., ПОТАПОВ О.А. Поиски и разведка глубокозалегающих месторождений нефти и газа геофизическими методами. Итоги науки и техники. ВНИИТИ АН СССР. 1985. 167 с.
166. ШРАЙБМАН В.И., ЖДАНОВ М.С., ВИТВИЦКИЙ О.В. Кореляционные методы преобразования и интерпретации геофизических anomalies. Недра. 1977. 177 с.
167. ZOHNDY A. A. R., EATON G. P., AND MABEY D. R. (1974) Application of surface geophysics to ground-water investigations. Book 2
168. EATON, G. P., AND WATKINS, J. S. (1970) The use of seismic refraction and gravity methods in hydrogeological investigations : Proc. Canadian Centennial Conf. Mining and Ground-Water Geophysics, Ottawa
169. Звіт про результати пошукових і розвідувальних робіт на Бандурському родовищі підземних вод, яке призначене для водозабезпечення ТОВ «Бандурський маслоекстракційний завод». Київ, 2012.

170. EATON, G. P., MARTIN, N. W. & MURPHY, M. A. 1965. Application of gravity measurements to some problems in engineering geology. Bulletin
171. BELL, F. G., CULSHAW, M. G., CRIPPS, J. C. & COVVE'¢, J. R. (eds) 1990, Field Testing in Engineering Geology. Geological Society Engineering Geology Special Publication No 6, pp 3-20
172. Методы геофизики в гидрогеологии и инженерной геологии М., Недра, 1985
173. БАГРІЙ С.М. (2016) Геофізичний моніторинг геологічного середовища в межах родовищ калійної солі (на прикладі Калуш-Голинського родовища) [Текст] : автореф. дис. ... канд. геол. наук : 04.00.22 / Багрій Сергій Михайлович ; Івано-Франків. нац. техн. ун-т нафти і газу. - Івано-Франківськ, 2016
174. Applicatitin of gravity measurements to some problems in engineering geology. Bulletin of ihe Association of En- gineering Geologists, 3, 6—21.
175. NIU TVFANN, R. 1977. Microgravity methods applied to the detection of cavities. In.' Proceedings of the Symposium on Detection of Subsurface Cavities. Soils and Pavements Laboratory, United States Waterways Experimental Sta- tion, Vicksburg, Mississippi.
176. PA'STEKA R., TERRAY M., HAJACH M., PA'SIAKOV'A M., 2007: Microgravity measurements and GPR technique in the search for medieval crypts: a case study from the St. Nicholas church in Trnava, SW Slovakia. Proceedings of the Archaeological Propection 7thconference, Nitra, S'tu'dijn'e zvesti, 41, 222–224.
177. YAROSLAVA PANISOVA, ROMAN PASTEKA. The use of microgravity technique in archaeology: A case study from the St. Nicolas Church in Pukanec, Slovakia, Contributions to Geophysics and Geodesy., Vol. 39/3, 2009 (237 – 254)
178. BISHOP I., STYLES P., EMSLEY S. J., FERGUSON N. S., 1997: The detection of cavities using the microgravity technique: case histories from mining and karstic environments. Mod- ern Geophysics in Engineering Geology, Geological Society, Engineering Geology Special Publication, 12, 153–166.
179. BL'TZKOVSKY' M., 1979: Processing and applications in microgravity surveys. Geophysical Prospecting, 27, 4, 848–861.

180. BUTLER D. K., 1984: Microgravimetric and gravity gradient techniques for detection of subsurface cavities. *Geophysics*, 49, 7, 1084–1096.
181. CG-5 Scintrex Autograv System Operation Manual. Scintrex Ltd. Toronto, Canada, Nr.867700 Rev. 4, p. 308 (April 2009).
182. CUSS R. J., STYLES P., 1999: The application of microgravity in industrial archaeology: an example from the Williamson tunnels, Edge Hill, Liverpool. *Geoarchaeology: exploration, environments, resources*. Geological Society, London, Special Publications, 165, 41–59.
183. DEBEGLIA N., DUPONT F., 2002: Some critical factors for engineering and environmental microgravity investigations. *Journal of Applied Geophysics*, 50, 4, 435–454.
184. FAJKLEWICZ Z., 1976: Gravity vertical gradient measurements for the detection of small geologic and anthropogenic forms. *Geophysics*, 41, 5, 1016–1030.
185. LAKSHMANAN J., MONTLUCON J., 1987: Microgravity probes the Great Pyramid. *Geophysics: The Leading Edge of Exploration*, 6, 1, 10–17.
186. OWEN T. E., 1983: Detection and mapping of tunnels and caves. In: Fitch A. A., (Ed.), *Development in Geophysical Exploration methods*, 5, 161258, Wiley, 209–221.
187. PAŠTEKA R., ZAHOREC P., 2000: Interpretation of microgravimetric anomalies in the region of the former church of St. Catherine, Dechtice. *Contr. Geophys. Geod.*, 30, 4, 373–387.
188. REID A. B., ALLSOP J. M., GARNER H., MILLETT A. J., SOMERTON I. W., 1990: Magnetic interpretation in three dimensions using Euler deconvolution. *Geophysics*, 55, 1, 80–91.
189. TERRAY M., PAŠTEKA R., 2007: Využitie geofyzikálnych metód merania pri vyhľadávaní podzemných objektov na príklade Kostola sv. Mikuláša v Trnave. *Pamiatky Trnavy a Trnavského kraja*, 10, 17–24.
190. THOMPSON D. T., 1982: EULDPH: A new technique for making computer-assisted depth estimates from magnetic field data. *Geophysics*, 47, 1, 31–37.