МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

С. А. Вижва
Г. Т. Продайвода
П. М. Кузьменко

AVO-аналіз та інверсія сейсмічних даних

Навчальний посібник

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів

КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ 2014

УДК 550.34(075.8)
ББК 26.2я73
В42

Рецензенти:
д-р геол.-мінерал. наук О. А. Трипільський,
д-р геол.-мінерал. наук, проф. В. М. Курганський,
канд. геол.-мінерал. наук Т. Є. Довжок

Рекомендовано до друку вченою радою
геологічного факультету
(протокол № 3 від 10 жовтня 2012 року)

Ухвалено науково-методичною радою
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
14 листопада 2012 року

Вижва С. А.

В42 AVO-аналіз та інверсія сейсмічних даних: навч. посібник / С. А. Вижва, Г. Т. Продайвода, П. М. Кузьменко. – К. : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2013. – 284 с.

ISBN 978-966-439-698-8

Розглянуто фізичні засади поширення пружних хвиль, лінійні моделі дисперсії і затухання хвиль у геологічному середовищі. Описано теоретико-методологічні засади AVO-аналізу та сейсмічної інверсії під час пошуків і розвідки родовищ нафти й газу. Наведено методичні аспекти спеціалізованої обробки сейсмічної інформації. На реальних та синтетичних сейсмічних даних продемонстровано приклади застосування методів AVO-аналізу та сейсмічної інверсії.

Для студентів вищих навчальних закладів.

УДК 550.34(075.8)
ББК 26.2я73

Гриф надано Міністерством освіти і науки України
(лист № 1/11-10204 від 17.06.13)

© Вижва С. А., Продайвода Г. Т., Кузьменко П. М., 2014
© Київський національний університет імені Тараса Шевченка, ВПЦ "Київський університет", 2014
ISBN 978-966-439-698-8

ВСТУП

Вилучення корисної інформації із записів сейсмограм відбувається в процесі їх обробки й інтерпретації. У сейсморозвідці використовують обернену кінематичну й обернену динамічну задачі. Обернена кінематична задача зводиться до відновлення положення сейсмічних меж і розподілу швидкостей, а її розв'язок називають структурно-кінематичною інтерпретацією сейсмічних даних. Структурно-кінематичні задачі на сучасному рівні розвитку сейсморозвідки розв'язуються достатньо надійно завдяки розробці методів міграції сейсмічних даних і методів сейсмічної томографії. При цьому динамічні характеристики також відіграють важливу роль, але не одержують безпосередньої геологічної інтерпретації.

Розв'язання оберненої динамічної задачі забезпечує оцінювання динамічних параметрів – акустичної жорсткості та коефіцієнтів згасання сейсмічних хвиль. Динамічна інтерпретація ґрунтується на кількісному аналізі інтенсивності й форми корисних сейсмічних хвиль та часу їх поширення.

Якщо задачі структурно-кінематичної інтерпретації успішно розв'язуються при застосуванні відносно простих моделей, то задачі динамічної інтерпретації вимагають застосування складніших моделей. Ця складність продиктована необхідністю якомога тісніше дослідити взаємозв'язок між сейсмічним хвильовим полем і літологічним складом та мікроструктурою геологічного середовища. Останні є об'єктом дослідження пошукової сейсморозвідки, тому що забезпечують визначення колекторних властивостей характеру насичення і напружено-деформованого стану гірських порід.

Саме від ступеня достовірності кількісного визначення петрофізичних характеристик методами сейсморозвідки і залежить її ефективність при пошуках і розвідці покладів вуглеводнів.

Таким чином, нагальною задачею розвитку сучасної сейсморозвідки безперечно є необхідність радикального підвищення її ефективності при пошуках і розвідці покладів вуглеводнів шляхом зменшення кількості непродуктивних свердловин і фінансових витрат на їх буріння, які останнім часом невпинно зростають.

Бурхливий розвиток сейсморозвідки завжди був продиктований необхідністю розв'язування все складніших пошуково-розвідувальних задач. На рубежі 60-х і 70-х років минулого сторіччя сейсморозвідка при дослідженнях успішно перейшла від інтервалу структурних неоднорідностей, які належать регіональній геології геокомплексів, до структурних неоднорідностей масштабу рівня геоформацій, які вивчаються стратиграфією, формаційним і структурно-фаціальним аналізом. Ці дослідження сприяли не лише виникненню нового наукового напрямку – сейсмостратиграфії, але і забезпечили бурхливий розвиток структурної сейсморозвідки, зокрема, методів міграції і сейсмічної томографії.

Вимоги сьогодення – перехід до розв'язування найбільш складної задачі – вивчення методами сейсморозвідки мезомасштабного структурного рівня текстур гірських порід, який є предметом дослідження сучасної літології і петрофізики. Для вилучення із сейсмічних записів інформації про локальні гео-петрографічні параметри і їх взаємозв'язок із петрофізичними властивостями гірських порід в невеликий, порівняно з довжиною сейсмічної хвилі, макроскопічний об'єм, необхідно використовувати ефективні петрофізичні параметри. Зокрема, ефективні пружні й акустичні властивості локальних макроскопічних об'ємів визначаються як об'ємними співвідношеннями і структурою локальних літологічних неоднорідностей, так і їх фізичними властивостями та характером взаємодії між ними. Тому для числових розрахунків ефективних пружних і акустичних властивостей геологічного середовища потрібно застосовувати моделі, які максимально наближені до реального геологічного середовища і враховують його напружено-деформований стан і флюїдний режим.

Органічне поєднання досягнень в області числового розв'язування задач динамічної теорії поширення сейсмічних хвиль, теоретичних і експериментальних досліджень закономірностей зміни динамічних характеристик сейсмічних хвиль від літологічного

складу, мікроструктури, характеру флюїдонасичення тріщинно-порового простору та напружено-деформованого стану геологічного середовища відкривають нові можливості щодо вирішення задач AVO-аналізу й інверсії сейсмічних даних.

Надзвичайно важливу роль при цьому, особливо в сенсі підвищення апріорної й апостеріорної достовірності AVO-аналізу, відіграють сучасні методи математичного моделювання ефективних динамічних пружних і акустичних властивостей реального геологічного середовища.

Підручник написано відповідно до програми дисциплін "Сейсмометрія" для бакалаврів і "Сейсмоакустика" та наукового практикуму для магістрів.

Методи AVO-аналізу дуже слабко відображено в сучасних підручниках із сейсморозвідки. Тому метою цього посібника є намір заповнити прогалину, адже AVO-аналіз та інверсія продовжують бурхливо розвиватися за кордоном і являють собою органічну складову сучасних автоматизованих систем обробки сейсмічних даних.

РОЗДІЛ 1
Поширення сейсмічних хвиль у лінійних пружних моделях геологічного середовища

1.1. Загальна характеристика хвильового руху

Основним інструментом дослідження методів сейсморозвідки при пошуках і розвідці нафтових і газових родовищ є хвильовий рух, який збурюється штучними джерелами коливань у реальному геологічному середовищі. Хвильовий рух, що збурюється, розглядається як особливий тип руху, закономірності розповсюдження якого визначаються розподілом пружних і акустичних властивостей та густини в неоднорідному геологічному середовищі. Якщо при дослідженнях хвильового руху обмежитися моделлю лінійного пружного середовища, то на характер його закономірностей автоматично накладаються суттєві обмеження, які випливають з умов, у рамках яких справедливий закон Гука. Для моделі лінійного пружного середовища характерна відсутність будь-яких незворотних втрат енергії пружної хвилі. Пружні зміщення в середовищі, які збурюються джерелом, повинні бути достатньо малими, а деформаційні процеси оборотними. Після припинення дії зовнішніх сил середовище миттєво відновлює початкову форму й об'єм, тобто, у середовищі зникають деформації.

У лінійному пружному середовищі будь-яке порушення рівноваги, викликане дією зовнішніх сил на елементи поверхні, згідно із законами Гука і Ньютона, спричиняє збурення в ньому хвильо-

вого руху. Порушення рівноваги, завдяки дії зовнішніх сил, у будь-якій точці геологічного середовища миттєво викликає деформації, які у свою чергу в сусідній частині його об'єму викликають напруги і деформації. Таким чином, збурення розповсюджується й охоплює все більший об'єм геологічного середовища.

Частина тіла, яка виявилася збуреною в один із наступних моментів, не збігається з тією частиною, яка була первісно збурена. Поверхню, що рухається і обмежує збурену частину середовища, називають поверхнею розриву, або поверхнею сингулярності. На поверхні розриву порушуються умови неперервності й диференційовності функцій, які жорстко регламентовані. Зокрема, умова сумісності зв'язує можливий стрибок похідної з можливим стрибком самої функції (умова сумісності Адамара).

Отже, картина розповсюдження пружної хвилі така: частинки середовища у хвилі одержують швидкість, деформуються і створюють внутрішні пружні напруги, які й передають хвилю від однієї частини тіла до іншої. При розповсюджені хвилі необхідно розрізняти два абсолютно різні явища – рух частинок середовища у хвилі й переміщення пружної хвилі в середовищі. Перше явище – це рух частинок як матеріальних точок; а друге – передача збуреного стану середовища з одних частинок на інші. Зміщення і швидкість частинок у хвилі залежить від сили, прикладеної до середовища. Ці величини у пружних хвилях малі, а після проходження хвилі кожна частина середовища практично залишається у своєму початковому положенні.

Водночас хвиля розповсюджується в середовищі від місця виникнення з певною швидкістю, яка не залежить від сили, а лише від пружності й густини середовища. Чим більша пружність середовища, тим більші пружні напруги виникають у ньому при деякій деформації і тим швидше передається збурення від однієї частинки до іншої й тим більша швидкість розповсюдження хвилі. І навпаки, чим більша густина, тим повільніше частинки одержують швидкість при дії пружних напруг і тим менша швидкість.

Таким чином, швидкість пружної хвилі – це завжди скінченна величина, яка визначається пружними властивостями і густиною середовища.

Пружні хвилі відсутні, якщо сила, яка діє на тіло, стала. При синусоїдальній дії сили за характерний проміжок часу можна досліджувати лише її період, при імпульсній дії – час наростання сили.

Досліджувати пружні хвилі можна двома принципово різними способами. *У першому* хвилі розглядають як рух матеріальних точок (частинок середовища), які пружно взаємодіють між собою. У цьому способі об'єкт дослідження – окрема частинка середовища та її рух.

До частинок можна застосувати рівняння системи матеріальних точок, урахувати сили взаємодії між ними, їх інерцію та знайти у такий спосіб рух кожної частинки. Цим способом розглядають прості види хвиль – розповсюдження одновимірних хвиль.

Але при аналізі хвиль будь-якого типу цей спосіб дуже незручний. Дійсно, сили пружності, які діють на частинку, викликані деформаціями сусідніх частинок, а ці деформації пов'язані з рухом ще більш віддалених частинок і т. д. Отже, щоб знайти траєкторію переміщення однієї частинки, треба з'ясувати її для всіх інших частинок. Тому простіше відмовитися від досить громіздкого розгляду поведінки кожної частинки і замість цього вивчати хвилю в цілому як самостійний об'єкт. У цьому і полягає *другий спосіб*, який формально можна назвати механікою пружних хвиль. І навпаки, при застосуванні першого способу маємо справу з механікою частинок середовища. Такий вибір головного об'єкта дослідження не окремих частинок середовища, а всієї хвилі в цілому диктується тим, що для хвилі вдається знайти прості закони поведінки: закони розповсюдження, закони відбиття і заломлення на межах різних середовищ, закони розсіювання і т. д.

Загальні умови поведінки хвиль у цілому розглядають як наслідки ньютонівської механіки для частинок середовища, але нас не цікавить рух окремої частинки середовища. Хвильова картина є більш універсальною. Хоча хвиля – механічне явище, поведінка хвилі – явище зовсім інше, ніж рух матеріальних тіл. Так, звичайні в механіці тіл поняття координати, траєкторії, прискорення або не можна застосувати до хвилі, або можна застосувати частково, хоча ці поняття справедливі для кожної частинки середовища, в якій розповсюджується хвиля. Хвилі, яка виходить із деякого джерела, не можна приписати траєкторії, оскільки вона поширюється від джерела в усіх напрямках.

Пружними хвилями називають механічні збурення деформації, які поширюються в пружному середовищі. Зовнішні сили, які викликають ці збурення в середовищі, називають джерелами хвиль. Розповсюдження пружних хвиль зводиться до збурення коливань у все більш віддалених від джерела хвиль частинок середовища. В однорідному суцільному геологічному середовищі поширення пружних хвиль не пов'язано з перенесенням речовини. Пружні хвилі нерозривно зв'язані з матеріальним середовищем і зумовлені зміщенням частинок середовища. Будь-яка хвиля в цьому середовищі поширюється зі сталою швидкістю, тому до хвилі поняття прискорення не можна застосовувати. Вимагають більш глибокого аналізу найважливіші параметри – швидкість поширення хвилі та форма сейсмічної хвилі.

1.2. Кінематичні й динамічні параметри сейсмічних хвиль

Подальший аналіз закономірностей поширення сейсмічних хвиль неможливий без визначення основних характеристик хвильового руху: 1) кінематичних, які визначають швидкість або час поширення хвилі; 2) динамічних, які характеризують форму сейсмічної хвилі.

Зауважимо, що термін "швидкість" хвилі не збігається з тим поняттям, яке прийнято для тіла. Справді, швидкість тіла визначають як відношення шляху, пройденого тілом, до часу, який затрачено на проходження цього шляху. Причому вважають, що ототожнення тіла в різні моменти часу, можна охарактеризувати, розглядаючи його у двох різних положеннях. Можливість ототожнення в різні моменти часу рухомого тіла і кожної його частини в механіці тривіальна й завжди береться до уваги. Але хвиля зв'язана в різні моменти з різними частинками середовища. Тому ототожнення стосується тільки форми хвилі. Під формою сейсмічної хвилі далі розумітимемо розподіл амплітуд і енергії хвилі в часі та просторі. Якщо форма хвилі зберігається, то ототожнення можливе. Якщо форма хвилі

змінюється так, що ототожнення відповідних точок хвилі є неможливим, то поняття швидкості втрачає свій зміст.

Графік залежності від координат або від часу будь-якої величини, що характеризує хвилю, називають просторовим або часовим профілем хвилі цієї величини. Якщо профіль хвилі не змінюється у процесі поширення, а лише переміщується вздовж напрямку розповсюдження, то тоді швидкість його переміщення в просторі й буде швидкістю поширення хвилі. Для її визначення необхідно в деякій фіксованій точці простору реєструвати зміни в часі відповідної характерної величини. Нехай уздовж координатної осі x поширюється плоска хвиля з певним просторовим профілем.

Для спостерігача, що перебуває в точці x_0, зміщення частинки в момент часу t_0 набуває значення $u(x,t)$. Якщо просторовий профіль хвилі не змінюється і переміщується з деякою швидкістю υ, то величина u в точці x у момент часу t не змінить свого значення. Звідси випливає таке: для всіх точок, які лежать в координатній осі x, у момент часу t справедлива рівність

$$x = x_0 + \upsilon(t - t_0) \tag{1.1}$$

або після деяких простих перетворень маємо

$$t - \frac{x}{\upsilon} = t_0 - \frac{x_0}{\upsilon}. \tag{1.2}$$

Звідси доходимо висновку про те, що функція $u(x,t)$, яка описує поширення хвилі, залежить лише від величини $\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)$, оскільки вона набуває одних і тих самих значень для будь-яких x і t при сталій величині $\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)$, тобто

$$u(x,t) = f\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right). \tag{1.3}$$

Функція (1.3) описує хвилю, яка поширюється в додатному напрямку осі x. Якщо ж хвиля розповсюджується у від'ємному напрямку, то

$$u(x,t) = f\left(t + \frac{x}{\upsilon}\right). \tag{1.4}$$

При одночасному збуренні в одному середовищі хвиль, які розповсюджуються у протилежних напрямках, одержуємо результуюче збурення

$$u(x,t) = f\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) + f\left(t + \frac{x}{\upsilon}\right). \qquad (1.5)$$

Нехай у деякій точці геологічного середовища збурено пружну хвилю штучним джерелом. Графічно представити хвилю в цьому випадку можна шляхом побудови залежності певної характеристики такої хвилі від відстані до джерела коливань. Як характеристику локально деформованого середовища можна вибрати пружне зміщення точок від положення рівноваги $u(x,t)$. Графік залежності пружних зміщень точок хвилі від координат або часу називають просторовим або часовим профілем сейсмічної хвилі.

На рис. 1.1 зображено просторовий профіль сейсмічної хвилі, збурений деяким сейсмічним джерелом у момент t_0. Зафіксувавши в момент t_1 деяку фазу коливань цієї хвилі, яка досягла точки з координатою x_1, побудуємо графік просторового профілю хвилі в цій точці. Аналогічно побудуємо графік просторового профілю хвилі для моменту часу t_2, який відповідає відстані x_2, яку подолала ця фаза хвилі за вказаний час. Незважаючи на те, що профіль хвилі в цей момент часу має менше амплітуд, у цілому його форма не змінилася. Таким чином, через те, що форма профілю хвилі не змінилася при поширенні на відстань $\Delta x = x_2 - x_1$ за час $\Delta t = t_2 - t_1$, то її швидкість

$$\upsilon = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \qquad (1.6)$$

Оскільки при визначенні швидкості хвилі зафіксовано конкретну фазу коливання (рис. 1.1), то таку швидкість називають фазовою швидкістю сейсмічної хвилі.

Якщо побудувати графік залежності $u(x,t)$ від часу при фіксованій відстані від джерела сейсмічних коливань, то одержимо часовий профіль сейсмічної хвилі (рис. 1.2). Таким чином, часовий профіль хвилі, який виражає залежність пружних зміщень від часу, є оберненим до просторового профілю сейсмічної хвилі. На

рис. 1.1 система координат фіксована у просторі, а на рис. 1.2 вона рухається разом із хвильовим пакетом. Форму хвильового пакета можна подати у вигляді функції просторових координат і часу поширення сейсмічної хвилі за допомогою співвідношення

$$u(x,t) = A(x) f\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right), \qquad (1.7)$$

де $A(x)$ – деякий множник, який характеризує зміни сейсмічної хвилі при поширенні через геологічне середовище.

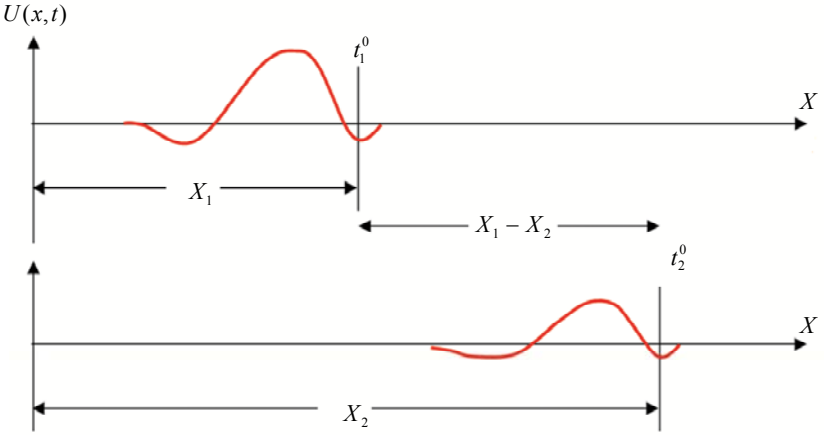


Рис. 1.1. Просторовий профіль сейсмічної хвилі у двох різних точках на відстанях X_1 і X_2 від джерела коливань у моменти часу t_1 і t_2

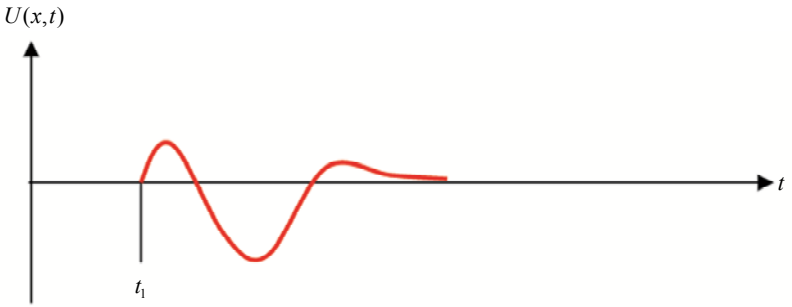


Рис. 1.2. Часовий профіль хвилі в момент часу t_1 у фіксованій точці

Зміщення $u(x,t)$ є фундаментальною характеристикою хвильового руху, тому що певною мірою воно є носієм енергії джерела, яке збурило сейсмічну хвилю. Якщо збурюється хвиля з енергією E_0, то вигляд функції $A(x)$ для сферичного хвильового фронту можна оцінити, виходячи з того, що густина енергії хвилі пропорційна квадрату амплітуди:

$$\frac{E_0}{4\pi r^2} = k\left[A(r)\right]^2. \tag{1.8}$$

Звідси маємо

$$A(r) = \left(\frac{E_0}{4\pi r^2 k}\right) = \frac{A_0}{r}. \tag{1.9}$$

Тому для сферичної хвилі формулу (1.7) можна представити у такому вигляді:

$$u(r,t) = \frac{A_0}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right). \tag{1.10}$$

Із формули (1.10) випливає, що амплітуда хвильового пакета сферичної сейсмічної хвилі зменшується обернено пропорційно відстані від джерела.

1.3. Характеристика плоских монохроматичних пружних хвиль

Серед можливих видів збурень особливе значення мають гармонійні коливання біля деякого середнього положення, оскільки збурення інших видів можна розглядати як суперпропозицію цих коливань. Розглянемо випадок, коли величина *u* являє собою зміщення деякої площини середовища і змінюється за косинусоїдальним законом:

$$u(x,t) = u_0 \cos\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right), \tag{1.11}$$

де ω – колова частота; u_0 – початкова амплітуда.

Колова частота є одним з основних параметрів, який характеризує хвилю. Вона пов'язана з періодом коливань T і частотою $(f = 1/T)$ такими співвідношеннями:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f. \qquad (1.12)$$

Відстань, на яку поширюється збурення за один період, називається довжиною хвилі (λ), тобто

$$\lambda = \upsilon T. \qquad (1.13)$$

Вираз (1.11) можна тепер переписати у вигляді

$$u(x,t) = u_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{\upsilon}\right) = u_0 \cos(\omega t - kx), \qquad (1.14)$$

де $k = \frac{\omega}{\upsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$ називається хвильовим числом. Величина kx в кожний момент часу характеризує зсув фаз у точці x відносно початку координат. Уведемо узагальнену фазу хвилі φ:

$$\varphi = \omega t - kx. \qquad (1.15)$$

Хвильове число k пов'язане зі зміною фази φ залежно від відстані x у заданий момент часу:

$$k = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_t, \qquad (1.16)$$

а колова частота виражається через зміну фази φ залежно від часу в заданій точці:

$$\omega = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_x. \qquad (1.17)$$

Таким чином, між означеними вище параметрами існує певна просторово-часова відповідність (табл. 1.1).

Таблиця 1.1

Просторово-часова відповідність між характеристиками монохроматичної хвилі

Час	Простір
Період T Колова частота ω $\Big\}$ $\omega = \frac{2\pi}{T}$	Довжина хвилі λ Хвильове число k $\Big\}$ $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Швидкість поширення збурення $\upsilon = \omega / k$ називається фазовою швидкістю. Це швидкість, з якою має рухатися спостерігач

для того, щоб у кожний момент часу бачити коливання в одній і тій самій фазі. Хвиля при цьому вважається нерухомою. Хвильовий фронт плоскої хвилі має плоску поверхню, на якій усі точки коливаються в одній і тій самій фазі.

Уведемо радіус-вектор $\vec{r}$, який з'єднує будь-яку точку фронту плоскої хвилі з початком координат. Приймемо одиничний вектор $\vec{n}$, перпендикулярний хвильовому фронту, і називатимемо його *хвильовим вектором*. Проекцією радіуса-вектора $\vec{r}$ на напрямок хвильової нормалі $\vec{n}$ є відстань хвильового фронту від початку координат, тобто

$$\vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{r} \,. \tag{1.18}$$

Ураховуючи компоненти вектора $\vec{n}[n_1, n_2, n_3]$ і координати кінця радіуса-вектора $\vec{r}[x_1, x_2, x_3]$, скалярний добуток цих векторів можна представити як

$$\vec{n}\vec{r} = n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 \,. \tag{1.19}$$

Оскільки хвиля є плоскою, це зумовлює лінійний характер залежності фази φ від координат. Вираз (1.3) для тривимірного випадку можна записати так:

$$u(\vec{x}, t) = F\left(\; t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{\upsilon} \; \right). \tag{1.20}$$

Для випадку плоскої косинусоїдальної хвилі маємо

$$u(\vec{x}, t) = u_0 \cos\omega\left(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{\upsilon} \right) = u_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \,, \tag{1.21}$$

де введено хвильовий вектор $\vec{k} = \frac{\omega \vec{n}}{\upsilon} = \frac{2\pi \vec{n}}{\lambda} = k\vec{n}$.

Очевидно, якщо розповсюдження хвилі супроводжується поглинанням, її амплітуда залежить від розташування точки спостереження, тобто $\vec{r}$, і тоді

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = u_0(\vec{x}) \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \,. \tag{1.22}$$

Плоску монохроматичну пружну хвилю можна представити в комплексній формі

$$\vec{u} = \vec{u}^0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = \vec{u}^0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \,, \tag{1.23}$$

де $\vec{u}^0$ – сталий вектор, який не залежить від координат і від часу.

1.4. Поширення хвильового пакета. Групова швидкість

Монохроматична хвиля не може передавати ніякої інформації, оскільки в такій хвилі в кожній точці відбувалися, відбуваються і завжди незмінно відбуватимуться гармонічні коливання. Для передавання інформації за допомогою хвилі необхідно, щоб у ній що-небудь змінювалось, наприклад, щоб вона тривала протягом обмеженого проміжку часу. Це вже не буде монохроматична хвиля; такий сигнал можна розглядати як інтерференційну картину, утворену суперпозицією гармонійних хвиль різних частот. Інформацію передає саме ця інтерференційна картина.

Якщо різні хвилі поширюються в середовищі з різними швидкостями, то стверджують, що має місце дисперсія швидкості хвилі. За наявності дисперсії фазові швидкості різні для гармонійних хвиль різної довжини або різної частоти. Якщо фазова швидкість однакова для всіх синусоїдальних хвиль, то дисперсія відсутня. Але в диспергованому середовищі сама інтерференційна картина змінюється, оскільки компоненти хвиль різної довжини розповсюджуються з різною швидкістю. Таким чином, у диспергованому середовищі інформація, що передається хвилею, є спотвореною. Яка глибина цього спотворення і якою мірою все-таки можна передавати сигнал у диспергованому середовищі?

З'ясуємо, як знайти зміну профілю хвилі при її поширенні в середовищі із заданим законом дисперсії. Розглянемо дві хвилі з частотами ω і $\omega+\delta\omega$ і амплітудами u_1 і u_2:

$$u_1 = \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t), \tag{1.24}$$

$$u_2 = \cos\left[(\vec{k} + \delta\vec{k})\vec{r} - (\omega + \delta\omega)t\right]. \tag{1.25}$$

Знайдемо їх суму

$$u = u_1 + u_2 = 2\cos\left[(\vec{r}\delta\vec{k} - t\delta\omega)\right]\times$$
$$\times\cos\left[(\vec{k} + \frac{\delta\vec{k}}{2})\vec{r} - (\omega + \frac{\delta\omega}{2})t\right]. \tag{1.26}$$

Унаслідок підсумовування в (2.21) з'явився амплітудний множник

$$2\cos\left[\vec{r}\delta\vec{k} - t\delta\omega\right]. \tag{1.27}$$

Отже, поверхня сталої амплітуди буде така:

$$\vec{r}\delta\vec{k} - t\delta\omega = \text{const}, \tag{1.28}$$

звідки випливає після диференціювання

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial t} = \frac{\delta\omega}{\delta\vec{k}}. \tag{1.29}$$

Це і є групова швидкість, яка дорівнює відношенню різниці частот до різниці хвильових чисел.

Нехай у напрямку координатної осі розповсюджується не монохроматична хвиля, а група хвиль або хвильовий пакет. Хвильовим пакетом називатимемо сигнал (імпульс) скінченної тривалості, частотний спектр якого не є монохроматичним. Хвильовий пакет є суперпозицією хвиль, які мало відрізняються одна від одної за довжиною хвилі і напрямком поширення.

Виберемо за змінну хвильове число k, тоді хвильовий пакет як сума нескінченної кількості монохроматичних хвиль із різними амплітудами й частотами представимо в інтегральній формі:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{i(\omega t - kx)}dk, \tag{1.30}$$

де $A(k)$ – спектральна щільність амплітуди хвильового пакета.

Якщо в середовищі відсутня дисперсія, тобто швидкість хвильового пакета не залежить від частоти, то на відстані x_0 кожна зі складових пакета запізнюється на одну й ту саму величину $t_0 = x_0 / \upsilon$. Через проміжок часу t_0 у точці на відстані x_0 з'явиться весь хвильовий пакет без змін. Отже, у середовищі без дисперсії швидкість розповсюдження хвильового пакета не залежить від частоти, час запізнення хвильового пакета також не залежить від частоти.

Розглянемо тепер випадок поширення хвильового пакета в середовищі, яке має дисперсію. Оскільки спектр амплітуди хвильового пакета $A(k)$ локалізований у вузькій області біля несучої частоти ω_0, то можна обмежитися розвиненням частоти ω як функції k за степенями $(k - k_0)$. Тоді, беручи до уваги лише перші два члени розвинення, одержимо

$$\omega_{(k)} \approx \omega_{0(k_0)} + \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0} (k - k_0). \qquad (1.31)$$

Уведемо позначення $\upsilon_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0}$ і зауважимо, що величина υ_g має розмірність швидкості. Згідно з означенням для хвильового пакета $u(x,t)$ вираз (1.30) запишемо у вигляді

$$u(x,t) = \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} A(k) e^{i(\omega t - kx)} dk. \qquad (1.32)$$

Після підстановки в нього співвідношення (1.31) і заміни змінної інтегрування $\xi = k - k_0$ та врахування того, що $A(k)$ є повільно змінювана функція *k*, рівняння (1.32) представимо в більш зручному для інтегрування вигляді

$$u(x,t) = A(k_0) e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \int_{-\Delta k}^{\Delta k} e^{i(\upsilon_g t - x)\xi} d\xi. \qquad (1.33)$$

Після інтегрування по ξ знаходимо

$$u(x,t) = 2A(k_0) \frac{\sin\left[(\upsilon_g t - x)\Delta k\right]}{(\upsilon_g t - x)} \cdot e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} = A(x,t) e^{i(\omega_0 t - k_0 x)}. \qquad (1.34)$$

Під знаком синуса до виразу (1.34) входить мала величина Δk, а це означає, що $A(x,t)$ буде повільно змінюватися при зміні x і t. Тому $A(x,t)$ можна розглядати як амплітуду майже монохроматичної хвилі, а множник $(\omega_0 t - k_0 x)$ – як її фазу. Визначимо координату x, де амплітуда $A(x,t)$ має максимум. Цю точку називатимемо центром групи хвиль. Очевидно, що шуканий максимум знаходитиметься в точці

$$x = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0} t. \qquad (1.35)$$

Звідси випливає, що швидкість поширення хвильового пакета (υ_g) буде визначено після диференціювання рівності (1.35) по *t*, тобто

$$\upsilon_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0}. \qquad (1.36)$$

РОЗДІЛ 2
Лінійні моделі дисперсії і затухання хвиль у геологічному середовищі

Якщо в середовищі є втрати енергії пружної хвилі, то це неминуче спричиняє дисперсію, тобто залежність швидкості поширення хвиль від частоти. Ідеально пружне однорідне тіло не має втрат хвильової енергії. Оскільки адіабатичний процес розповсюдження хвиль, при якому хвильовий рух, збурюваний будь-яким конкретним джерелом, може продовжуватися скільки завгодно довго. При цьому коливання можуть ставати слабшими при збільшенні відстані від локалізованої області джерела, але повна енергія руху частинок, тобто об'ємний інтеграл від кінетичної і пружної енергій, залишається сталим. Отже, ідеально пружне середовище характеризується лінійною однозначною залежністю між напругами і деформаціями протягом усього періоду змінної напруги. Звідси випливає, що напруги і деформації завжди знаходяться в одній фазі. Дисипація енергії пружної хвилі відбуватиметься у випадку, коли напруги і деформації не зв'язані однозначною залежністю протягом періоду коливань. Відсутність такої однозначної залежності між напругами і деформаціями виникає тоді, коли в рівнянні, що пов'язує напруги і деформації, з'являються похідні напруг і (або) деформацій від часу. Це означає, що в діапазоні частот, в якому затухання є помітно великим, деформація запізнюється відносно напруг.

Пружна енергія хвиль у реальному геологічному середовищі поглинається і розсіюється. Розсіювання пружних хвиль у геологічному середовищі викликається просторовими змінами пружних властивостей, а точніше, залежить від просторових похідних пружних характеристик і від густини. Такі похідні за величиною мо-

жуть бути досить значними, або навіть нескінченними. Наприклад, на межах тіла явища відбиття і рефракція хвиль можуть приводити до когерентного або некогерентного розсіювання. Різниця в пружних властивостях і густині геологічного середовища викликається різними причинами: неоднорідністю складу, наявністю меж, включенням іншої фази, пустотами і тріщинами. У загальному випадку будь-яка локалізована неоднорідність являтиме собою центр розсіювання, що при збільшенні частоти пружних хвиль уможливлює дослідження неоднорідності все менших масштабів. Затухання, викликане розсіюванням, залежить від розміру, форми, концентрації неоднорідностей, розподілу їх за розмірами, від співвідношення розміру неоднорідності й довжини хвилі.

Поглинання пружної енергії хвилі в геологічному середовищі є наслідком великої кількості процесів, які з феноменологічного погляду називають "внутрішнім тертям". Затухання внаслідок внутрішнього тертя називають власним поглинанням середовища. Сумарний ефект внутрішнього тертя характеризується безрозмірною величиною добротності (Q), яка може набувати різних значень.

Сигнали, що реєструються в методах сейсмоакустики, безперечно зазнають впливу внутрішнього тертя. У цілому процеси затухання діють як на форму імпульсу, що розповсюджується в геологічному середовищі, так і на власну дисперсію швидкості.

2.1. Фактор добротності. Коефіцієнти затухання хвиль

Як зазначалося вище, сумарний ефект внутрішнього тертя Q є безрозмірною величиною і характеризує ступінь пружності геологічного середовища. Оскільки нас цікавить інформація про поведінку геологічного середовища за короткі проміжки часу, то для його визначення звернемося до динамічного експерименту. Нехай на геологічне середовище діє напруга, величина якої періодично змінюється в часі згідно із законом

$$\sigma^* = \sigma_0 e^{i\omega t}, \qquad (2.1)$$

де σ_0 – амплітуда напруги; ω – колова частота.

Із вимоги лінійності випливає таке: деформація буде також періодичною функцією цієї самої частоти, але внаслідок втрат пружної енергії запізнюватиметься по фазі на деякий кут δ. Отже, залежність деформації від часу можна подати у вигляді

$$\varepsilon^* = \varepsilon_0 e^{i(\omega t - \delta)}, \tag{2.2}$$

де ε_0 – амплітуда деформації; δ – кут, на який деформація запізнюється по фазі або кут утрат. Очевидно, що для ідеально пружного середовища $\delta = 0$. Але у випадку непружного кут втрат не дорівнює нулю. Тому при лінійній залежності між напругами і деформаціями коефіцієнт пропорційності між ними буде комплексною величиною. Назвемо цю величину *комплексним модулем* $M^*(i\omega)$ і згідно з узагальненим законом Гука визначимо його зі співвідношення:

$$\frac{\sigma^*}{\varepsilon^*} = M^*(i\omega) = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} e^{-i\delta} = M_1(\omega) - iM_2(\omega), \tag{2.3}$$

де $M_1(\omega)$ і $M_2(\omega)$ – дійсна й уявна частини комплексного модуля $M^*(i\omega)$.

Знайдемо модуль $\left|M^*\right|$ і тангенс непружних втрат $\operatorname{tg}\delta$ у середовищі:

$$\left|M^*\right| = \sqrt{M_1^2 + M_2^2}, \tag{2.4}$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{M_2}{M_1}. \tag{2.5}$$

Якщо скористатися формулою Ейлера для комплексних чисел, то формулу (2.3) можна представити у вигляді

$$M^* = \left|M^*\right|(\cos\delta + i\sin\delta). \tag{2.6}$$

Дійсна й уявна частини комплексного модуля визначаються із співвідношень:

$$M_1 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\cos\delta, \tag{2.7}$$

$$M_2 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\sin\delta. \tag{2.8}$$

Величини M_1 і M_2 називають модулями "накопичення" і "втрат" відповідно. Наведені вище викладення можна підтвердити, якщо обчислити енергію, яка накопичується і розсіюється за один період коливань. Енергія в одиниці об'єму в будь-який момент часу протягом циклу дорівнює $\int \sigma d\varepsilon$, де інтегрування здійснюється між початковою і кінцевою точками циклу. Енергія ΔW, яка розсіюється в одиниці об'єму за один період коливань:

$$\Delta W = \int \sigma^* d\varepsilon^* = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{\sigma^* d\varepsilon^*}{dt} dt. \qquad (2.9)$$

Зауважимо, що при оцінюванні інтегралів (2.9) напруги і деформації мають виражатися у дійсній формі, оскільки комплексна форма справедлива лише для лінійних перетворень.

Тоді після підстановки (2.1) і (2.2) у (2.9) одержимо

$$\Delta W = \omega \varepsilon_0^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (M_1 \sin\omega t \cos\omega t + M_2 \cos^2 \omega t) dt = \pi M_2 \varepsilon_0^2. \qquad (2.10)$$

Отже, знайдемо енергію ΔW, розсіяну за весь цикл в одиниці об'єму

$$\Delta W = \pi M_2 \varepsilon_0^2. \qquad (2.11)$$

З іншого боку, маємо максимальну енергію W, накопичену в одиниці об'єму:

$$W = \int_{\omega t=0}^{2\pi/\omega} \sigma^* d\varepsilon^* = \frac{1}{2} M_1 \sigma_0^2. \qquad (2.12)$$

Із виразів (2.11), (2.12) і (2.5) випливає, що відношення втраченої енергії до накопиченої певним чином пов'язано з тангенсом кута втрат енергії, тобто

$$\frac{\Delta W}{W} = 2\pi \frac{M_2}{M_1} = 2\pi \operatorname{tg}\delta. \qquad (2.13)$$

Оскільки δ (або $\operatorname{tg}\delta$) є мірою втрат енергії (за один період), зумовлених непружністю геологічного середовища, то величина δ називається *внутрішнім тертям геологічного середовища.*

Добротність Q можна визначити, якщо скористатися поняттям резонансного поглинання в системі, яка здійснює вимушені коливання. Резонансне поглинання в деякому частотному діапазоні має місце у випадку, коли прикладена до системи періодична напруга викликає періодичну деформацію, що запізнюється по фазі.

Поняття добротності має сенс для коливальної системи, в якій втрати за одиницю часу значно менші порівняно з енергією, що накопичена системою. Існує спосіб визначення Q за допомогою поняття смуги пропускання $\Delta\omega$:

$$Q = \frac{\omega_r}{\Delta\omega}, \tag{2.14}$$

де $\Delta\omega$ – різниця частот, яка відповідає половині потужності на амплітудно-частотній характеристиці системи при умові, що $\Delta\omega << \omega_r$; ω_r – резонансна частота.

Якщо ω_1 і ω_2 – частоти, при яких квадрат амплітуди коливань зменшується вдвічі порівняно з максимальною величиною при резонансі, то

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_r} = Q^{-1} = \delta. \tag{2.15}$$

У сейсмоакустиці ці визначення застосовуються безпосередньо рідко в такому вигляді, оскільки спостерігають або затухання протягом певного часу амплітуди стоячої хвилі зі сталим хвильовим числом, або затухання у просторі хвилі, що поширюється в середовищі.

Нехай джерело коливань збурює плоску монохроматичну хвилю, яка затухає при розповсюдженні в геологічному середовищі. Тоді для одержання виразу для затухаючої плоскої хвилі слід припустити, що або хвильовий вектор і швидкість, або частота є комплексними. Якщо візьмемо до уваги вирази

$$\upsilon = \upsilon_1 + i\upsilon_2, \tag{2.16}$$

$$\overline{k} = \overline{k_1} - i\alpha \tag{2.17}$$

і формулу для плоскої хвилі

$$A(x_1 t) = A_0 e^{i(\omega t - k x)}, \tag{2.18}$$

то після підстановки (2.17) у (2.18) одержимо вираз для плоскої затухаючої хвилі

$$A(x_1 t) = A_0 e^{i\omega t} e^{-ikx} = A_0 e^{i\omega t} e^{-i(k_1 - i\alpha)x} =$$

$$= A_0 e^{i\omega t} e^{-ik_1 x} e^{-\alpha x} = A_0 e^{-\alpha x} e^{i(\omega t - k_1 x)} \quad . \qquad (2.19)$$

Отже, коефіцієнт затухання α є уявною частиною комплексного хвильового вектора. Фазову швидкість, яка є дійсною частиною комплексного хвильового вектора, запишемо так:

$$\upsilon = \frac{\omega}{k_1}. \qquad (2.20)$$

Візьмемо до уваги, що колова частота ω і хвильовий вектор k пов'язані рівністю

$$k = \frac{\omega}{\upsilon}. \qquad (2.21)$$

Підставимо у вираз (2.21) співвідношення (2.16) і (2.17) й одержимо

$$k_1 - i\alpha = \frac{\omega}{\upsilon_1 + i\upsilon_2}. \qquad (2.22)$$

Після того, як позбудемося комплексної величини у знаменнику в правій частині виразу, знайдемо

$$k_1 - i\alpha = \frac{\omega\upsilon_1}{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2} - i\frac{\omega\upsilon_2}{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2}. \qquad (2.23)$$

Прирівнюючи дійсні й уявні частини, маємо

$$k_1 = \frac{\omega\upsilon_1}{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2}; \qquad (2.24)$$

$$\alpha = \frac{\omega\upsilon_2}{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2}. \qquad (2.25)$$

Коефіцієнт затухання α можна записати через комплексний модуль пружності, якщо прийняти, що

$$\upsilon = \sqrt{M^* / \rho}, \qquad (2.26)$$

де ρ – густина; $M^* = M_1 + iM_2$ – комплексний модуль. Легко показати, що

$$\alpha = \frac{\omega\upsilon_2}{\upsilon\ \upsilon_1} = \frac{\omega\sqrt{M_2}}{\upsilon\ \sqrt{M_1}}. \qquad (2.27)$$

Наведені формули виражають коефіцієнт затухання через відстань x, при цьому α має розмірність довжини.

Якщо потрібно виразити коефіцієнт затухання як функцію від часу t, то необхідно взяти k дійсним, а υ і ω – комплексними:

$$\omega = \omega_1 + i\alpha_1. \tag{2.28}$$

Тоді

$$A(x_1 t) = A_0 e^{-\alpha_1 t} e^{i(\omega t - k x)}, \tag{2.29}$$

де α_1 – має розмірність оберненого часу.

Після підстановки у вираз (2.29) величин (2.16) і (2.28) знаходимо

$$\alpha_1 = k\upsilon_2. \tag{2.30}$$

Оскільки затухання характеризується обвідною високочастотної хвилі, то для визначення α скористаємося співвідношенням

$$A(x) = A_0 e^{-\alpha x}. \tag{2.31}$$

У цьому випадку вважається, що α не залежить від x. Коефіцієнт затухання α визначимо, враховуючи (2.31):

$$\alpha = -\frac{1}{A(x)}\frac{dA(x)}{dx} = -\frac{d}{dx}\left[\ln(A(x)\right]. \tag{2.32}$$

Те саме можна одержати й іншим способом, якщо (2.31) записати так:

$$\ln A(x) = \ln A_0 - \alpha x. \tag{2.33}$$

Зіставляючи різницю таких виразів для двох різних відстаней x_1 і x_2 $(x_1 < x_2)$, отримаємо

$$\alpha = \frac{1}{x_2 - x_1}\ln\left[\frac{A(x_1)}{A(x_2)}\right]. \tag{2.34}$$

Для вираження відношення амплітуд $A(x_1)$ і $A(x_2)$ у децибелах (дБ) або неперах (Нп) слід скористатися виразами

$$20\lg\left[\frac{A(x_1)}{A(x_2)}\right]\text{дБ}, \quad \ln\left[\frac{A(x_1)}{A(x_2)}\right]\text{Нп}. \tag{2.35}$$

При цьому

$$\alpha = \frac{1}{x_2 - x_1}\, 20 \lg\left[\frac{A(x_1)}{A(x_2)}\right] \text{ дБ/один. довжини,} \quad (2.36)$$

$$\alpha = \frac{1}{x_2 - x_1}\, \ln\left[\frac{A(x_1)}{A(x_2)}\right] \text{ Нп/один. довжини;} \quad (2.37)$$

$$\alpha \text{ (дБ/один. довжини)} = 8{,}686 \text{ (Нп/один. довжини).} \quad (2.38)$$

Іншою величиною, яка характеризує втрати енергії, є логарифмічний декремент затухання Θ, який для системи, що здійснює власні гармонічні коливання (за умови, що затухання мале), визначається із співвідношення

$$\Theta = \ln\left(\frac{A_n}{A_{n+1}}\right), \quad (2.39)$$

де A_n і A_{n+1} – амплітуди, які відповідають двом послідовним періодам коливань.

Оскільки енергія пропорційна квадрату амплітуди, то

$$W = W_0 e^{-2\alpha t} \quad (2.40)$$

і

$$\frac{\Delta W}{W_0} = 2\alpha \Delta t. \quad (2.41)$$

Покладемо, що $\Delta t = T$, тоді одержимо

$$\frac{\Delta W}{W} = 2\alpha T = 2\Theta, \quad (2.42)$$

$$Q = \frac{\pi}{\Theta}. \quad (2.43)$$

Величину Q подамо в такому вигляді:

$$Q = \pi n, \quad (2.44)$$

де n – кількість коливань, протягом яких амплітуда зменшується в e разів. Якщо прийняти

$$e^{\alpha n T} = e, \quad (2.45)$$

то тоді

$$n = \frac{1}{\alpha T} \quad (2.46)$$

і

$$Q = \frac{\pi}{\alpha T} = \pi f / \alpha = \frac{\pi}{\Theta}. \qquad (2.47)$$

За період коливань хвиля розповсюджується на відстань, яка дорівнює одній довжині хвилі, тому, якщо втрати енергії викликані лише поглинанням, то

$$\alpha T = \eta \lambda, \qquad (2.48)$$

де η – коефіцієнт поглинання, який характеризує зменшення амплітуди внаслідок тільки поглинання:

$$A(x) = A_0 e^{-\eta x}, \qquad (2.49)$$

де $A(x)$ і A_0 – значення амплітуди у двох точках.

Тоді можна встановити взаємозв'язок між величинами η, δ і Q:

$$Q = \pi / \eta \lambda = \pi / \Theta. \qquad (2.50)$$

Необхідно звернути увагу на те, що співвідношення між величинами, які характеризують внутрішнє тертя геологічного середовища й одержані в різних експериментах, мають такий простий вигляд лише у випадку, коли

$$\delta = Q^{-1} = \frac{\Theta}{\pi} << 1. \qquad (2.51)$$

Отже, в однорідних матеріалах без дисперсії різні визначення коефіцієнтів затухання є еквівалентними. У сильно диспергуючих середовищах, наприклад, геологічних, зустрічаються деякі труднощі при встановленні зв'язку між різними означеннями. Наприклад, пружної енергії W, яка використовується в означенні міри внутрішнього тертя. Локально накопичена пружна енергія не дорівнює кінетичній енергії руху і, відповідно, не дорівнює половині повної енергії в даному локальному об'ємі.

Якщо припустити, що геологічне середовище локально однорідне й ізотропне, то в цьому випадку зразок гірської породи, на якому досліджується затухання різними способами, у кінці експерименту дає еквівалентні результати. Оскільки максимальна накопичена енергія деформації також дорівнює максимальній кінетичній енергії, то в експериментах зі стоячими хвилями або хвилями, що розповсюджуються у зразку, обидва методи дають однаковий результат. Якщо зразок однорідний та ізотропний, то

параметр Q, визначений унаслідок вимірювання ширини резонансної кривої при збуренні у зразку вимушених коливань, також є еквівалентний попереднім результатам.

Якщо безрозмірна величина Q не залежить від частоти, то коефіцієнт поглинання пропорційний першому степеню частоти. У рідинах при низьких частотах коефіцієнт поглинання змінюється пропорційно квадрату частоти і, відповідно, величина Q^{-1} пропорційна першому степеню частоти.

2.2. Моделі в'язкопружного середовища

2.2.1. Загальні відомості

У лінійному пружному середовищі швидкість поширення пружних хвиль не залежить від частоти і затухання відсутнє. У в'язкопружному – швидкість хвилі має дисперсію і затухання. Для підтвердження цього висновку розглянемо гармонійну хвилю і скористаємося узагальненим рівнянням для лінійного в'язкопружного тіла в диференціальній формі:

$$P_\mu S_{ik} = Q_\mu e_{ik}, \quad P_\chi \sigma_{kk} = Q_\chi \varepsilon_{kk}, \qquad (2.52)$$

де σ_{kk}, S_{ik} – відповідно шарова і девіаторна складові тензора напруг $\sigma_{ik}(\vec{x},t) = \mathrm{Re}\left[\sigma^0_{ik}(\vec{x})e^{i\omega t}\right]$; ε_{kk}, e_{ik} – відповідно шарова і девіаторна складові тензора деформацій $\varepsilon_{ik}(\vec{x},t) = \mathrm{Re}\left[\varepsilon^0_{ik}(\vec{x})e^{i\omega t}\right]$;

$$2\overline{\mu} = \frac{Q_\mu}{P_\mu}; \qquad 3\overline{\chi} = \frac{Q_\chi}{P_\chi}; \qquad (2.53)$$

$$P_\mu = \sum_{i=1}^{N} a_i^{(\mu)} \frac{d^i}{dt^i}; \qquad P_\chi = \sum_{i=1}^{N} a_i^{(\chi)} \frac{d^i}{dt^i}; \qquad (2.54)$$

$$Q_\mu = \sum_{i=1}^{N} b_i^{(\mu)} \frac{d^i}{dt^i}; \qquad Q_\chi = \sum_{i=1}^{N} b_i^{(\chi)} \frac{d^i}{dt^i}. \qquad (2.55)$$

Комплексні модулі $\mathrm{Y}_\mu(i\omega)$ і $\mathrm{Y}_\chi(i\omega)$ такої моделі в'язкопружного тіла можна звести до вигляду

$$\mathrm{Y}_\mu(i\omega)=\frac{\sum\limits_{k=1}^{N} b_k^{(\mu)}(i\omega)^k}{\sum\limits_{k=1}^{N} a_k^{(\mu)}(i\omega)^k}; \qquad (2.56)$$

$$\mathrm{Y}_\chi(i\omega)=\frac{\sum\limits_{k=1}^{N} b_k^{(\chi)}(i\omega)^k}{\sum\limits_{k=1}^{N} a_k^{(\chi)}(i\omega)^k}. \qquad (2.57)$$

Рівняння динамічної рівноваги без урахування масових сил можна записати так:

$$\sigma_{ik,k}^0+\rho\omega^2 u_i^0=0, \qquad (2.58)$$

де $u_k(\vec{x},t)=\mathrm{Re}\left[u_k^0(\vec{x})e^{i\omega t}\right]$ – вектор переміщень;

$$\varepsilon_{ik}^0=\frac{1}{2}(u_{i,k}^0+u_{k,i}^0). \qquad (2.59)$$

Підстановка (2.52) у (2.58) дає основне рівняння, аналогічне представленню Ламе у класичній теорії пружності:

$$\left(\mathrm{Y}_\chi+\frac{1}{3}\mathrm{Y}_\mu\right)\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{U}^0+\mathrm{Y}_\mu\nabla^2\vec{U}^0+\rho\omega^2\vec{U}^0=0, \qquad (2.60)$$

де Y_μ, $\mathrm{Y}_\chi-\frac{2}{3}\mathrm{Y}_\mu$ – комплексні величини, аналогічні сталим Ламе.

Застосування операції div до рівняння дає такий вираз:

$$\nabla^2\mathrm{div}\vec{U}^0+\frac{\rho\omega^2}{\mathrm{Y}_\chi+4/3\,\mathrm{Y}_\mu}\mathrm{div}\vec{U}_0=0. \qquad (2.61)$$

Запишемо розв'язок рівняння

$$\mathrm{div}\vec{U}^0=A\cdot\exp\left[\pm i\sqrt{\frac{\rho}{\mathrm{Y}_\chi+4/3\,\mathrm{Y}_\mu}}\cdot(\vec{n}\cdot\vec{r})\right], \qquad (2.62)$$

де $\vec{n}$ – одиничний вектор; $\vec{r}$ – радіус-вектор; A – довільна стала.

Отже, вираз

$$\operatorname{div}\vec{u}^{0} = \operatorname{Re}\left\{ A\cdot\exp\left[i\,\omega\left(t \pm \sqrt{\frac{\rho}{\mathrm{Y}_{\chi} + 4/3\ \mathrm{Y}_{\mu}}}\cdot(\vec{n}\cdot\vec{r}) \right)\right]\right\} \qquad (2.63)$$

характеризує зміщення, котрі описують тільки зміни об'єму, тобто вираз (2.63) визначає хвилю зміни об'єму, яка поширюється у в'язкопружному середовищі, а саме, поздовжню хвилю:

$$\upsilon_{P} = \sqrt{\frac{\operatorname{Re}(\mathrm{Y}_{\chi} + 4/3\ \mathrm{Y}_{\mu})}{\rho}}\,. \qquad (2.64)$$

Коефіцієнт затухання поздовжньої хвилі

$$\alpha_{P} = -\omega\sqrt{\frac{\rho}{I_{m}\left(\mathrm{Y}_{\chi} + 4/3\ \mathrm{Y}_{\mu}\right)}}\,. \qquad (2.65)$$

Отже, як швидкість поширення поздовжньої хвилі, так і її коефіцієнт затухання у в'язкопружному середовищі залежать від частоти.

Якщо тепер до рівняння (2.2.9) застосуємо операцію rot, то дістанемо

$$\left(\nabla^{2} + \frac{\rho\omega^{2}}{\mathrm{Y}_{\mu}}\right)\operatorname{rot}\vec{U}^{0} = 0\,. \qquad (2.66)$$

Звідси випливає, що

$$\operatorname{rot}\vec{U}^{0} = B\exp\left[\pm i\,\omega\sqrt{\frac{\rho}{\mathrm{Y}_{\mu}}}\,(\vec{n}\cdot\vec{r})\right], \qquad (2.67)$$

де B – сталий антисиметричний тензор.

Вираз

$$\operatorname{rot}\vec{u} = \operatorname{Re}\left\{ B\cdot\exp\left[i\,\omega\left(t \pm \sqrt{\frac{\rho}{\mathrm{Y}_{\mu}}}\cdot(\vec{n}\cdot\vec{r})\right)\right]\right\} \qquad (2.68)$$

визначає зміщення, які описують тільки зміну форми, тобто він визначає хвилю зсуву, що поширюється у в'язкопружному середовищі.

Швидкість поширення хвилі зсуву

$$\upsilon_{S} = \sqrt{\frac{\operatorname{Re}\mathrm{Y}_{\mu}}{\rho}}\,, \qquad (2.69)$$

а коефіцієнт затухання визначається за формулою

$$\alpha_s = -\omega \sqrt{\frac{\rho}{I_m \, \Upsilon_\mu}} \,. \qquad (2.70)$$

Величина Υ_μ є дійсною лише у випадку, коли оператори P_μ, Q_μ мають нульовий порядок, тобто, коли зв'язок між девіаторами напруг і деформацій у в'язкопружному середовищі є таким, як і в пружному. У решті випадків гармонійні хвилі зсуву характеризуються дисперсією та дисипацією енергії, а коефіцієнт затухання залежить від частоти.

2.2.2. Класичні моделі в'язкопружного середовища

Класичні теорії ґрунтуються на моделях, в яких поряд із пружністю діє деякий механізм дисипації енергії хвилі. Його пов'язують із в'язкістю, внутрішнім тертям або пружною післядією середовища. Моделі, в яких до пружних напруг додається в'язкість (або внутрішнє тертя), описуються тілом Максвелла, тілом Кельвіна – Фойгта і стандартним лінійним тілом, в якому поєднуються два попередніх.

Теорію пружної післядії запропоновано Больцманом у 1876 році. Згідно з припущенням Больцмана деформація, викликана прикладеними напругами, затримується завдяки властивості матеріалу її "запам'ятовувати".

Розглядатимемо одновимірну задачу для однорідного ізотропного в'язкопружного середовища з реологічними модулями η_p і μ_r, які можна обчислити, скориставшись часом релаксації напруг (θ_p) і деформацій (τ_r), тобто зі співвідношень:

$$\theta_p = \sqrt[p]{\eta_p}, \quad \tau_r = \sqrt[r]{\mu_r} \,. \qquad (2.71)$$

Обмежимося залежністю між напругами і деформаціями в лінійній формі:

$$\sigma + \eta_1 \sigma^{(1)} + \eta_2^{(1)} \sigma^{(2)} + ... + \eta_{-1} \sigma^{(-1)} + ... = \\ = \mu \varepsilon + \mu_1 \varepsilon^{(1)} + ... + \mu_{-1} \varepsilon^{(-1)} + ..., \tag{2.72}$$

де похідні за часовою змінною будь-якого порядку позначено додатним показником у дужках, а інтеграли будь-якої кратності – від'ємним показником у дужках.

2.2.3. Тіло Кельвіна – Фойгта

Поряд із пружними силами в такому середовищі виникають додаткові напруги, зумовлені в'язкістю і пропорційні швидкості деформації. Для такого середовища залежність між напругами і деформаціями має вигляд

$$\sigma = \mu \varepsilon + \mu_1 \varepsilon^{(1)}, \tag{2.73}$$

а хвильове рівняння

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}. \tag{2.74}$$

Частинний розв'язок хвильового рівняння (2.74) – плоска неоднорідна гармонійна хвиля, вектор пружних зміщень якої можна описати рівнянням

$$u = u_0 e^{i\left(\omega t - \tilde{k} x\right)} = u_0 e^{-\alpha x} e^{i\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)},$$

де $\tilde{k}(\omega) = \dfrac{\omega}{\upsilon(\omega)} - i\alpha(\omega)$.

Тоді рівняння комплексного хвильового числа $\tilde{k}$ для тіла Кельвіна – Фойгта має вигляд

$$\tilde{k} = \frac{\omega^2 \rho}{\mu}\left[\frac{1}{1 + i\omega\tau_1}\right]. \tag{2.75}$$

Отже, запишемо залежності коефіцієнта поглинання і швидкості від частоти:

$$\alpha(\omega) = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}\left[\frac{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_1^2} - 1}{2\left(1 + \omega^2 \tau_1^2\right)}\right]^{1/2}; \tag{2.76}$$

$$\upsilon(\omega) = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \frac{\left[2\left(1+\omega^2\tau_1^2\right)\left(\sqrt{1+\omega^2\tau_1^2}\right)\right]^{1/2}}{\omega\rho} \quad . \qquad (2.77)$$

Характер цих залежностей можна представити для двох межових значень $\omega = 0$ і $\omega = \infty$, а також у вигляді апроксимацій низькочастотної $\omega\tau_1 << 1$ і високочастотної.

Хвилі нульової частоти розповсюджуються з тією самою швидкістю, що і в ідеально пружному середовищі, і не затухають. В області низьких частот коефіцієнт поглинання пропорційний квадрату частоти $\left(\omega^2\right)$, а у високочастотній області – $\omega^{1/2}$. Дисперсія швидкості в низькочастотній області майже відсутня, а у високочастотній області пропорційна $\omega^{1/2}$. Хвилі нескінченно великих частот поширюються з великою швидкістю, а внаслідок нескінченно великого затухання просто не розповсюджується із джерела. Тому верхні межі параметрів υ і α (при $\omega = \infty$) фізично допустимі.

2.2.4. Тіло Максвелла

Напруги, що виникають у неідеально пружному середовищі при деформації, поступово релаксують, тому при знятті напруги тіло не повертається до початкового стану і в ньому з'являються залишкові деформації. Рівняння для тіла Максвелла можна представити так:

$$\sigma + \eta_1 \sigma^{(1)} = \mu_1 \varepsilon^{(1)} . \qquad (2.78)$$

Чисто гуківська залежність сюди не входить, але вона з'являється, якщо знизити порядок цього рівняння інтегруванням правої і лівої частин. Тоді одержимо еквівалентне рівняння

$$\eta_{-1}\sigma^{(1)} + \sigma = \mu\varepsilon , \qquad (2.79)$$

де вже з'явилися члени гуківської залежності.

З останнього рівняння матимемо таке хвильове рівняння:

$$\rho\eta_{-1}\frac{\partial u}{\partial t} + \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} . \qquad (2.80)$$

Хвильове рівняння можна одержати дещо іншим шляхом. Для цього спочатку розв'яжемо диференціальне рівняння (2.2) відносно σ:

$$\eta\sigma = \mu_1 \varepsilon - \frac{\mu_1}{\theta} e^{-t/\theta} \int_{-\infty}^{t} \varepsilon e^{t/\theta} dt . \qquad (2.81)$$

Тут час релаксації θ першої похідної σ дорівнює η_1. У свою чергу $\mu_1 = \tau_1 \mu$.

Здиференціюємо рівняння (2.81) по x, тоді, враховуючи співвідношення (2.78), дістанемо хвильове рівняння

$$\rho\eta_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\mu_1}{\theta} e^{-t/\theta} \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{t/\theta} dt . \qquad (2.82)$$

Еквівалентність хвильових рівнянь (2.80) і (2.82) уже не очевидна. Вона встановлюється лише після одержання рівняння частот, однакового для (2.80) і (2.82), і має вигляд

$$\tilde{k}^2 = \frac{\omega^2 \rho}{\mu} \left[\frac{1 + i\omega\theta}{i\omega\tau} \right]. \qquad (2.83)$$

Звичайно приймають $\theta = \tau$ й одержують залежність

$$\alpha(\omega) = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \left[\frac{\sqrt{1+\omega^2\tau^2} - \omega\tau}{2\omega\tau} \right]^{1/2}; \qquad (2.84)$$

$$\upsilon(\omega) = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \left[2\omega\tau(\sqrt{1+\omega^2\tau^2} - \omega\tau) \right]^{1/2}. \qquad (2.85)$$

Одержані параметри характерні для зсувних хвиль у в'язкій рідині – хвилі нульової частоти в ній не поширюються, а для високих і надвисоких частот таке середовище можна вважати твердим зі сталою швидкістю і коефіцієнтом поглинання, який не залежить від частоти.

2.2.5. Стандартне лінійне тіло

У стандартному лінійному тілі поєднуються два розглянуті вище механізми поглинання, тому рівняння стану має вигляд

$$\sigma + \eta_1 \sigma^{(1)} = \mu \varepsilon + \mu_1 \varepsilon^{(1)} . \qquad (2.86)$$

Тоді одержуємо хвильове рівняння

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho \eta_1 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \qquad (2.87)$$

і рівняння частот

$$\tilde{k}^2 = \frac{\omega^2 \rho}{\mu} \left[\frac{1 + i\omega\theta}{1 + i\omega\tau} \right]. \qquad (2.88)$$

Залежності $\alpha(\omega)$ і $\upsilon(\omega)$ мають вигляд

$$\alpha(\omega) = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \left[\frac{\sqrt{(1+\omega^2\theta^2)(1+\omega^2\tau^2)} - (1+\omega\theta)\,\theta\tau}{2(1+\omega^2\tau^2)} \right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (2.89)$$

$$\upsilon(\omega) = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \frac{\left\{ 2\left(1+\omega^2\tau^2\right) \left[(1+\omega^2\theta^2)(1+\omega^2\tau^2) - (1+\omega\ \theta)\,\omega\tau) \right] \right\}^{\frac{1}{2}}}{\omega\tau - \omega\theta} . \qquad (2.90)$$

Тут уже у вирази входять дві характеристики релаксації θ і τ, які не можуть бути однаковими, оскільки в такому випадку рівняння частот (2.88), а відповідно й два інші рівняння, перейдуть у чисто гуківські залежності.

Хвилі нульової частоти розповсюджуються в такому середовищі з такою самою швидкістю, як і в ідеально пружному тілі й без затухання. В області низьких частот спостерігається квадратична залежність поглинання від частоти $(\alpha \sim \omega^2)$, а у високочастотній області $\alpha(\omega)$ не залежить від частоти. Оскільки нижня й верхня межі швидкості не однакові, то швидкість має аномальну дисперсію в середньому діапазоні частот (при $\omega\overline{\tau} << 1$: $\alpha \sim \omega^2$ і $\upsilon \sim \omega^0$; при $\omega\overline{\tau} >> 1$: $\alpha \sim \omega^0$; $\upsilon \sim \omega^0$).

2.2.6. Середовище з пружною післядією

Напруги в середовищі з пружною післядією зумовлені не лише існуючою деформацією, але й усіма попередніми станами деформованого тіла. Загальний вигляд рівняння стану цього середовища

$$\sigma(t) = \mu\,\varepsilon(t) - \int_0^{\infty} \Psi(\xi)\,\varepsilon(t-\xi)\,d\xi, \qquad (2.91)$$

де $\Psi(\xi)$ – функція пружної післядії; ξ – час запізнення щодо поточного моменту. Значення функції $\Psi(\xi)$ згідно з фізичними умовами має зменшуватися зі зростанням ξ.

У теорії Больцмана функція післядії задається у вигляді

$$\Psi(\xi) = \left(\mu \big/ \tau\right) e^{-\xi/\tau}, \qquad (2.92)$$

де τ – час релаксації; μ – модуль пружності.

Підстановка функції (2.92) у рівняння (2.91) при гармонічному режимі коливань дає вираз

$$\rho\frac{(i\omega)^2}{(-i\tilde{k})} = \mu\left(i\tilde{k}\right) - \left(-i\tilde{k}\right)\frac{\mu}{\tau}\int_0^{\infty} e^{-\frac{(1+i\omega\tau)\xi}{\tau}} d\xi. \qquad (2.93)$$

Після інтегрування (2.93) одержимо співвідношення, яке приведе до рівняння частот:

$$\tilde{k}^2 = \frac{\omega^2\rho}{\mu}\,\frac{(1+i\omega\tau)}{i\omega\tau}. \qquad (2.94)$$

Це рівняння повністю збігається з рівнянням стану тіла Максвелла, тому і хвильове рівняння даного середовища, і всі фізичні наслідки будуть точнісінько такими, як і в розглянутому випадку для тіла Максвелла.

2.2.7. Теорія Гуревича

У теорії Г. І. Гуревича зроблено спробу фізичного обґрунтування реологічних співвідношень з атомістичних позицій. Згідно з фізичними уявленнями про взаємодію частинок, які пов'язані не ідеально пружними зв'язками у твердому тілі, поряд із гуківськи-

ми зсувними й об'ємними деформаціями вводяться і пружнорелаксаційні деформації зсуву й дилатації, які мають неперервний спектр релаксацій у деякому діапазоні часу від $\tau_{\text{п}}$ до $\tau_{\text{к}}$. Уведення цих характеристик приводить до середовища з пружною післядією у вигляді експоненціальної функції $\Psi(\xi)$. На відміну від теорії Больцмана береться не одна функція післядії, а їх неперервний спектр за цим часом релаксації.

Якщо обмежитися малими напругами зсуву, то тоді повна деформація зсуву $e_{12}(t)$ є сумою пружної деформації $e_{12}^{r}(t)$ і пружнорелаксаційної деформацій $e_{12}^{p}(t)$, яка має обмежений спектр часу релаксації τ (з ядром $1/\tau$):

$$e_{12}^{p}(t) = \int_{T_P}^{T_M} \varepsilon_{12}(t_1\tau)\frac{d\tau}{\tau}, \qquad (2.95)$$

де $T_P << T_M$ – межі часу релаксації.

Величина $\varepsilon_{12}(t_1\tau)$ задовольняє рівняння типу Кельвіна – Фойгта, яке запишемо в такому вигляді:

$$\sigma_{12}(t) \equiv \mu e_{12}^{p}(t) = \mu^{*}\varepsilon_{12}(t_1\tau) + (\mu + \mu^{*})\tau\frac{\partial \varepsilon_{12}(t_1\tau)}{dt}, \qquad (2.96)$$

де μ – модуль зсуву; μ^{*} – пружнорелаксаційний модуль, якщо $\mu^{*} = 0$, то модель переходить у тіло Максвелла.

Аналогічні формули мають місце для деформацій зсуву e_{13}, e_{23}.

У повній деформації зміни одиничного об'єму $\Delta(t) = \varepsilon_{ii}$ можна також виділити пружні зміни одиничного об'єму $\Delta^{r}(t)$ і пружнорелаксаційні $\Delta^{p}(t)$. Причому для пружнорелаксаційної зміни об'єму також справедливе співвідношення

$$\Delta^{p}(t) = \int_{T_P}^{T_M} \Delta(t_1\tau)\frac{d\tau}{\tau}, \qquad (2.97)$$

де $\Delta(t_1\tau)$ задовольняє рівняння

$$\overline{\sigma}_{kk}(t) \equiv K\Delta^{p}(t) = K^{*}\Delta(t_1\tau) + (K + K^{*})\,\tau\,\frac{\partial\Delta(t_1\tau)}{\partial t}, \qquad (2.98)$$

тут $\overline{\sigma}_{kk}(t) = \frac{1}{3}\left[\sigma_{11}(t) + \sigma_{22}(t) + \sigma_{33}(t)\right]$ – середні нормальні напруги; K *і* K^{*} – пружний і пружнорелаксаційний модулі стиснення.

Інтегрування (2.96) і 2.98) та підстановка одержаних виразів у формули для швидкості повних деформацій дає вирази, які описують залежність між деформаціями і напругами:

$$\frac{\partial e_{12}}{\partial t} = \frac{1}{\mu}\left\{\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial t} + \frac{\mu}{\mu^{*}}\int_{S_m}^{S_M}\exp(-st)\left[\int_0^t \exp(sr)\frac{\partial\sigma_{12}(r)}{\partial r}\,dr\right]ds\right., \qquad (2.99)$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial t} = \frac{1}{k}\left\{\frac{\partial\overline{\sigma}_{kk}}{\partial t} + \frac{k}{k^{*}}\int_{S^1_m}^{S^1_M}\exp(-st)\left[\int_0^t \exp(sr)\frac{\partial\overline{\sigma}(r)}{\partial r}\,dr\right]ds\right., \qquad (2.100)$$

де $S_m = \left[\left(1 + \mu/\mu^{*}\right)T_M\right]^{-1}$; $\quad S_M = \dfrac{T_M}{T_P}S_m$; $\qquad (2.101)$

$$S'_m = \left[\left(1 + k/k^{*}\right)T_M\right]^{-1}; \quad S'_M = \frac{T_M}{T_P}S'_m. \qquad (2.102)$$

Підстановка (2.99) і (2.100) у рівняння руху дозволяє знайти вирази для комплексних частотно-залежних швидкостей поздовжньої й поперечної поляризації

$$\tilde{\upsilon}_p^{-2} = \frac{\rho}{K + \frac{4}{3}M}\,\frac{(1 + i\,m)(1 + i\,n)}{1 + i\,r}, \qquad (2.103)$$

$$\tilde{\upsilon}_s^{-2} = \frac{\rho}{M}(1 + i\,m), \qquad (2.104)$$

де K, M – комплексні модулі стиснення і зсуву:

$$K(\omega) = K(1 + K/K^{*}\,\mathrm{Re}[I_p])^{-1}; \qquad (2.105)$$

$$M(\omega) = \mu(1 + \mu/\mu^{*}\,\mathrm{Re}[I_s])^{-1}; \qquad (2.106)$$

$$m(\omega) = MI_m[I_s]/\mu^{*}; \qquad (2.107)$$

$$n(\omega) = KI_m[I_p]/K^{*} \qquad (2.108)$$

$$r(\omega) = \left(K_m + \tfrac{4}{3}M_n\right)/\left(K_m + \tfrac{4}{3}M\right). \qquad (2.109)$$

Тут $I_q(q=p,s)$ – однотипні інтеграли від комплексної функції за різними відрізками дійсної осі:

$$I_q=\int_{a_q}^{b_q}\frac{ds}{s-i\omega}=\frac{1}{2}\ln\frac{b_q^2+\omega^2}{a_q^2+\omega^2}+i\,\mathrm{arctg}\frac{1-a_q/b_q}{\omega/b_q+a_q/\omega}. \qquad (2.110)$$

Межі інтегрування a_q, b_q визначаються так:

$$a_S=S_m \quad i \quad b_S=S_ì \ , \quad a_P=S_m^{/} \quad i \quad b_P=S_M^{/}.$$

Беручи до уваги, що комплексне значення фазової швидкості $\tilde{\upsilon}$ залежить як від фазової швидкості υ_q, так і від декремента затухання α_q плоскої монохроматичної хвилі, одержимо

$$\frac{1}{\tilde{\upsilon}_q}=\frac{1}{\upsilon_q}\left(1+i\frac{\alpha_q}{2\pi}\right). \qquad (2.111)$$

Враховуючи формули (2.103) і (2.104), маємо

$$\upsilon_P=\sqrt{\frac{K+4/3\,M}{\rho}}\left(\sqrt{1+\beta^2}-1\right)^{1/2}\left(\sqrt{2}\Big/\beta\right); \qquad (2.112)$$

$$\upsilon_S=\sqrt{\frac{M}{\rho}}\left(\sqrt{1+m^2}-1\right)^{1/2}\left(\sqrt{2}\Big/m\right); \qquad (2.113)$$

$$\alpha_P=\frac{2\pi}{\beta}\left(\sqrt{1+\beta^2}-1\right); \qquad (2.114)$$

$$\alpha_S=2\pi\left(\sqrt{1+m^2}-1\right)/m\,; \qquad (2.115)$$

$$\beta=\frac{m+n-r(1-mn)}{r(m+n)+(1-mn)}. \qquad (2.116)$$

Припустимо таке:

1) спектр часу релаксації достатньо широкий $\left(\ln(T_M/T_P)>10\right)$;

2) пружний і пружнорелаксаційний коефіцієнти Пуассона додатні;

3) релаксаційні явища при об'ємному стисненні проявляються слабше, ніж при зсуві $\left(0<K/K^*<1;\quad 0<\mu/\mu^*<10\right)$;

4) частотний діапазон обмежений таким чином:

$$\omega_m \equiv 10\,S_m < \omega < \frac{S_M}{10}\min\left[1, \exp\left(\frac{\mu^*}{\mu} - 5\right)\right] \equiv \omega_M \,.$$

Тоді можна скористатися наближеними формулами:

$$\upsilon_P = \sqrt{\left(K + {}^4\!/_3\, M\right)/\rho}\,; \tag{2.117}$$

$$\upsilon_S = \sqrt{M/\rho}\,; \tag{2.118}$$

$$\alpha_P \approx \pi\beta \approx \alpha_s\left[1 + \frac{K\mu^*/(MK^*) - 1}{1 + {}^4\!/_3\, M/K}\right]; \tag{2.119}$$

$$\alpha_S \approx \pi m \approx \frac{\pi^2}{2}\frac{M}{\mu^*}\,, \tag{2.120}$$

де $\quad M = \mu \Big/ \left(1 + \frac{\mu}{\mu^*} q_1\right); \quad K = K \Big/ \left(1 + \frac{K}{K^*} q_2\right); \quad q_1 = \ln\left(S_M/\omega\right),$

$q_2 = \ln\left(S_M/\omega\right)$.

Спрощені формули дозволяють досліджувати частотну залежність швидкості й декремента затухання, якщо відомі їх значення на деякій частоті ω_0.

2.3. Модель "чорного ящика"

Якщо припустити, що геологічне середовище є лінійно-непружним і в ньому береться до уваги явище дисипації енергії хвилі, то його можна розглядати як деяку лінійну стаціонарну систему. Для такої моделі виконується принцип суперпозиції. Щоб одержати стандартний спосіб вивчення такої моделі, незалежно від її структури, її можна розглядати як модель "чорного ящика".

Для реалізації моделі "чорного ящика" розглядатимемо в першому наближенні геологічне середовище як деяку лінійну стаціонарну систему, котра передає сейсмоакустичні коливання від джерела до приймача. Якщо на вхід системи надходить сигнал

$x(t)$, який збурюється джерелом коливань, то цей сигнал передається геологічним середовищем і вже в перетвореному вигляді (у вигляді відгуку) $y(t)$ реєструється в пункті прийому. Інформація про взаємодію хвилі з геологічним середовищем вміщується у функції відгуку, яку можна обчислити на основі деякої вибраної сейсмоакустичної моделі. Явища дисперсії та поглинання саме й визначають взаємодію хвилі з геологічним середовищем.

Незалежно від вибраної моделі всі функції лінійного відгуку мають деякі загальні властивості аналітичних функцій. Зокрема, якщо існує дійсна й уявна частини функції, то існує дійсна й уявна частини відгуку, що зв'язані співвідношенням взаємності Крамерса – Кроніга. Із цих загальних аналітичних властивостей випливає дисперсійне співвідношення, яке визначає стале розповсюдження як функцію частоти.

У загальному випадку явище дисперсії зумовлено не лише непружністю геологічного середовища, але й просторовою дисперсією, неоднорідністю та анізотропією. Можлива також і сталість геологічного середовища, зумовлена його активністю та нестаціонарністю.

2.3.1. Дисперсійне співвідношення Крамерса – Кроніга

Згідно з принципом Больцмана приріст деформації, викликаної приростом прикладених напруг, можна записати лінійним інтегральним рівнянням

$$\sigma(t) = \left[M_r \varepsilon(t)\right] + \int_{-\infty}^{t} M(t-\tau)\frac{d\,\varepsilon(\tau)}{d\,\tau} d\,\tau\,, \qquad (2.121)$$

де M_r – нерелаксаційний пружний модуль; $M(t-\tau)$ – релаксаційний модуль, тобто функція "пам'яті".

Зважимо на те, що

$$\varepsilon(\tau) = \varepsilon_0 e^{i\omega\tau}\,, \qquad (2.122)$$

тоді підстановка (2.122) у вираз (2.121) дає

$$\sigma(t)=\left[M_r\varepsilon(t)\right]+\int\limits_{-\infty}^{t}M(t-\tau)i\omega\varepsilon_0\,\mathrm{e}^{i\omega\tau}d\tau\ . \qquad (2.123)$$

Замінимо змінну $T=t-\tau$, тоді після підстановки маємо

$$\sigma(t)=\left[M_r\varepsilon(t)\right]+i\omega\int\limits_{0}^{\infty}M(T)\ \mathrm{e}^{-i\omega T}\varepsilon_0\,\mathrm{e}^{i\omega t}dT\ . \qquad (2.124)$$

Беремо до уваги, що $\varepsilon(t)=\varepsilon_0 e^{i\omega t}$, тоді, поділивши праву й ліву частини рівняння (2.124) на $\varepsilon(t)$, одержимо

$$\frac{\sigma(t)}{\varepsilon(t)}=\left[M_r\right]+i\omega\int\limits_{0}^{\infty}M(\tau)\,\mathrm{e}^{-i\omega\tau}d\tau\,, \qquad (2.125)$$

де виконано заміну T на τ.

Скориставшись формулою Ейлера

$$\mathrm{e}^{-i\omega\tau}=\cos\omega\tau-i\sin\omega\tau\,, \qquad (2.126)$$

вираз (2.125) можна представити у вигляді

$$\frac{\sigma(t)}{\varepsilon(t)}=\left[M_r\right]+i\omega\int\limits_{0}^{\infty}M(\tau)\left(\cos\omega\tau-i\sin\omega\tau\right)d\tau=$$

$$=\left[M_r\right]+\omega\int\limits_{0}^{\infty}M(\tau)\left(i\cos\omega\tau-\sin\omega\tau\right)d\tau. \qquad (2.127)$$

Позначимо односторонні перетворення Фур'є так:

$$M_1=\omega\int\limits_{0}^{\infty}M(\tau)\sin(\omega\tau)d\tau\,, \qquad (2.128)$$

$$M_2=\omega\int\limits_{0}^{\infty}M(\tau)\cos(\omega\tau)d\tau\,, \qquad (2.129)$$

Отже, маємо

$$M^*=\left[M_R+M_1\right]+iM_2\,, \qquad (2.130)$$

де M^* – комплексний модуль.

Виконаємо обернені перетворення Фур'є виразів (2.128) і (2.129) і знайдемо співвідношення для релаксаційного модуля:

$$M(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{M_1(\omega)}{\omega}\sin(\omega t)\,d\omega, \qquad (2.131)$$

$$M(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{M_2(\omega)}{\omega}\cos(\omega t)\,d\omega. \qquad (2.132)$$

Рівняння (2.131) і (2.132) – співвідношення, які є в'язкопружними аналогами відомих дисперсійних рівнянь Крамерса – Кроніга. Отже, застосування перетворення Фур'є до функції "пам'яті", тобто до релаксаційного модуля, дає підстави стверджувати, що функція $M(\omega)$, яка є Фур'є-зображенням функції $M(t)$, має властивості функції передачі, що описує механізм утрат:

$$\sigma(\omega)=M(\omega)\varepsilon(\omega). \qquad (2.133)$$

Це означає, що природа втрат у реальному просторі і часі визначається оператором, який описує певний реальний механізм.

Тобто, необхідно знайти функцію, для якої пара Фур'є- перетворень $M_1(\omega)$, $M_2(\omega)$ задовольняє спостережену залежність Q від частоти. Очевидно, у загальному випадку існує нескінченна кількість таких функцій.

2.3.2. Лінійні системи

Лінійна система – неперервна або дискретна – це така система, яка має вхід і вихід, характеризується певним станом, і для якої справедливий принцип суперпозиції. Отже, відгук деякої лінійної системи на суму двох лінійних вхідних сигналів дорівнюватиме просто сумі лінійних відгуків цієї системи на кожний вхідний сигнал. Лінійна система буде інваріантною в часі, якщо вхід $x(t)$ породжує вихід $y(t)$, а вхід $x(t-t_0)$ породжує вихід $y(t-t_0)$ при будь-якому часовому (або просторовому) зсуві t_0.

Система називається *стаціонарною*, якщо один і той самий вхідний сигнал створює один і той самий вихідний сигнал незалежно від часу, коли вхідний сигнал надходить на вхід.

Щодо сейсмічних систем, то їх входом є сукупність дій, зумовлених наявністю геологічного середовища. Впливом на реальне

геологічне середовище може бути вибух або удар, який формує пружний імпульс, а реакцією середовища – пружні коливання, які реєструються в точках прийому. Під час поширення сигналу в геологічному середовищі, при його реєстрації й обробці він неодноразово зазнає перетворень. Таку сейсмічну систему можна розглядати як динамічну. Ця система змінює свій стан за наявності певного зовнішнього впливу. Зауважимо, що реальна динамічна сейсмічна система взагалі не є лінійною, тому її заміна лінійними математичними системами доцільна тільки в певних межах (зокрема, лише при поширенні пружних хвиль дуже малої амплітуди коливань і при довжині хвилі, що в багато разів перевищує характерні розміри неоднорідностей геологічного середовища). У першому наближенні її можна розглядати як стаціонарну лінійну динамічну сейсмічну систему.

Моделювати поведінку лінійної системи можна за допомогою імпульсної характеристики $h(t)$, яка є відгуком системи на дельта-функцію Дірака. Подамо вхідний сигнал у вигляді

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\,. \qquad (2.134)$$

Оскільки система лінійна й стаціонарна, то на виході її має бути та сама комбінація запізнілих імпульсних відгуків:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,h(t-\tau)\,d\tau\,. \qquad (2.135)$$

Отже, вихідний сигнал можна одержати шляхом згортки вхідного сигналу з імпульсним відгуком системи

$$y(t) = x(t) * h(t)\,. \qquad (2.136)$$

Для дискретних лінійних систем спеціальним вхідним сигналом є одинична дискретна дельта-послідовність $\delta[n]$, яка називається *функцією одиничного відгуку* і визначається так:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad n = 0; \\ 0, & \text{якщо} \quad n \neq 0. \end{cases} \qquad (2.137)$$

На відміну від випадку з неперервною дельта-функцією Дірака при визначенні $\delta[n]$ відсутні будь-які аналітичні труднощі. Будь-

яку довільну послідовність $x[n]$ можна записати у вигляді зваженої суми дискретних імпульсних функцій:

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]\delta[k]. \qquad (2.138)$$

Нехай $h[n]$ – дискретна імпульсна характеристика дискретної лінійної системи, яка збуджується одиничною імпульсною функцією. Тоді вихідний відгук $y[n]$ на довільну вхідну послідовність $x[n]$ визначатиметься такою дискретною згорткою:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n-k]x[k]=h[n]*x[n]. \qquad (2.139)$$

Зауваження: залежно від того, круглі або квадратні дужки використовуються при записі функцій, об'єднаних оператором згортки $<<*>>$, будемо відповідно мати на увазі операції неперервної або дискретної згортки. Каузальною дискретною системою є система, вихід якої в момент часу *n* залежить тільки від входу $x[k]$, де $k\le n$, а це означає, що $h[k]=0$ при $k<0$.

Оскільки дельта-функцію Дірака фізично реалізувати не можна, тому широко застосовуються (як стандартний сигнал при дослідженні реальних систем) гармонійні коливання $e^{i\omega t}$. Множина комплексних гармонік утворює повну сім'ю власних функцій лінійної системи стаціонарного типу. Повнота цієї сім'ї випливає з відомого подання абсолютно інтегрованої функції у вигляді інтеграла Фур'є:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega)e^{i\omega t}d\omega, \qquad (2.140)$$

де $G(\omega)$ – спектр функції $x(t)$, який є прямим перетворенням Фур'є цієї функції:

$$G_x(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt. \qquad (2.141)$$

Відгук на вхідний гармонійний сигнал $x(t)=e^{i\omega t}$ має вигляд

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}h(t-\tau)d\tau. \qquad (2.142)$$

Виконаємо заміну змінної

$$u = t - \tau \tag{2.143}$$

у формулі (2.142), тоді одержимо

$$y(t) = e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} h(u)\, du\,. \tag{2.144}$$

Коефіцієнт пропорційності між вихідним і вхідним гармонійними сигналами є просто передаточна функція, отже,

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} h(t)\, dt\,. \tag{2.145}$$

Таким чином, передаточна функція і перехідна імпульсна характеристика пов'язані перетворенням Фур'є. Причому $e^{i\omega t}$ – це власна функція, оскільки вихідний сигнал являє собою комплексну гармоніку з комплексною амплітудою. Сукупність значень $H(\omega)$ при $-\infty \le \omega \le \infty$ утворює спектр лінійної системи. Отже, спектральна характеристика стаціонарної лінійної системи збігається з перетворенням Фур'є імпульсної характеристики.

Звідси випливає можливість визначення імпульсної характеристики за відомою спектральною характеристикою:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega\,. \tag{2.146}$$

Враховуючи умови лінійності та рівняння (2.140), (2.144), маємо

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) H(\omega) e^{i\omega t} d\omega\,. \tag{2.146}$$

Одержаний вираз є інтегралом Фур'є для $y(t)$, отже, спектр функції $y(t)$

$$G_y(\omega) = G_x(\omega) H(\omega)\,. \tag{2.147}$$

Таким чином, спектр вихідного сигналу дорівнює добутку спектра вхідного сигналу на передаточну функцію (спектральну характеристику системи). Спектральна характеристика системи відображає її поведінку в частотній області (табл. 2.1).

Проходження сигналу через лінійну стаціонарну систему супроводжується зсувом фази $\phi(\omega)$, який дорівнює аргументу пе-

редаточної функції. Оскільки цей зсув не пропорційний частоті, система має дисперсію запізнення групи складових сигналу τ_g із частотами поблизу ω_0 і визначається як

$$\tau_g = -\left(\frac{d\phi}{d\omega}\right)_{\omega_0}. \qquad (2.148)$$

Але не всі сигнали можна розкласти на прості гармонічні функції. Узагальнену характеристику системи для більш широкого класу вхідних і вихідних функцій одержимо при використанні стандартних сигналів виду e^{st} у вигляді передаточної функції системи $H(s)$, де $s = \sigma + i\omega$. Передаточна функція $H(s)$ зв'язана з імпульсною характеристикою $h(t)$ двостороннім перетворенням Лапласа:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt, \qquad (2.149)$$

Таблиця 2.1

Відгук лінійної стаціонарної системи

Вхід $\rightarrow$	**Лінійна стаціонарна**	$\rightarrow$ **Вихід система**
Гармонічний сигнал $e^{i\omega t}$	$H(\omega)$	Гармонічний сигнал $H(\omega)e^{i\omega t}$
Синусоїдальний сигнал $\cos\omega t$	$H(\omega) = \lvert H(\omega)\rvert e^{i\phi(t)}$	Синусоїдальний сигнал, зсунутий по фазі $\lvert H(\omega)\cos(\omega t + \phi)\rvert$
Імпульсна функція Дірака $\delta(t)$	1	Імпульсний відгук $h(t)$
Сигнал $x(t)$ Його спектр $G_x(\omega)$	Згортка з $h(t)$ Множення на $H(\omega)$	Сигнал $y(t) = h(t) * x(t)$. Його спектр $G(\omega) = H(\omega)G_x(\omega)$

Якщо існує функція, модуль якої $|h(t)| \le Me^{st}$, де M і s – дійсні числа, то для неї обернені перетворення Лапласа визначаються формулою

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} H(s) e^{st} ds. \qquad (2.150)$$

Передаточна функція визначена в деякій області комплексної площини $s = \sigma + i\omega$ і сама є комплексною характеристикою системи.

При $s = i\omega,\ \sigma = 0$, передаточна функція переходить у спектральну характеристику.

Умову фізичної реалізації називають також умовою виконання принципу причинності, яка вимагає, щоб реакція на виході системи не з'являлася раніше, ніж на її вході прикладатиметься зовнішня сила. Це рівнозначно виконанню умови $h(t) = 0$ при $t < 0$.

2.3.3. Z-перетворення

Z-перетворення є особливою формою перетворень, дуже корисною (необхідною) при обчисленнях, де застосовуються функції в цифровому (дискретному) вигляді. Використаємо перетворення

$$\delta(t - t_0) \Leftrightarrow e^{-i\omega t_0}. \qquad (2.151)$$

Тоді одержимо

$$f[t] \Leftrightarrow G[\omega] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n\Delta] e^{-in\omega\Delta}. \qquad (2.152)$$

Прийнявши

$$z = e^{-i\omega\Delta}, \qquad (2.153)$$

дістанемо вираз

$$G[\omega] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n\Delta] z^n = G(z), \qquad (2.154)$$

де $G(t)$ і є Z-перетворення $f[t]$, тобто $f[t] \leftrightarrow G(z)$. Так, якщо $f[t] = [1, 2, -5, 4, -6]$, то $G(z) = 1 + 2z - 5z^2 + 4z^3 - 6z^4$. Від'ємні степені Z відповідають значенням у минулому.

Очевидно, що множення на Z еквівалентне затримці часової функції на один інтервал дискретизації, а ділення на Z – зміщенню цієї функції вперед на один інтервал.

Якщо входом дискретної лінійної системи з імпульсною характеристикою $h[n]$ є експоненціальна послідовність $x[n]=z^n$, то вихідний відгук системи визначатиметься виразом

$$y[n]=H(z)z^n, \tag{2.155}$$

де

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}. \tag{2.156}$$

Отже, z^n – це власна функція дискретної лінійної системи, а $H(z)$ – дискретна системна функція, визначена для тих значень z, при яких сума в (2.156) збігається.

Функцію $H(z)$ можна розглядати як двостороннє Z-перетворення послідовності $h[n]$. Зауважимо, що $H(z)$ – це деяка неперервна функція z, незважаючи на те, що вона була визначена за дискретною послідовністю. Тобто її можна позначити із застосуванням круглих дужок як $H(z)$, що має вигляд полінома. Ряд важливих властивостей Z-перетворення наведено в табл. 2.2.

Таблиця 2.2

Властивості *Z*-перетворення

Властивість	**Функція дискретного перетворення**	**Z-перетворення**
Визначення	$x[n], y[n]$	$G_x(z), G_y(z)$
Лінійність	$ax[n]+by[n]$	$aG_x(z)+bG_y(z)$
Зсув	$x[n-m]$	$z^{-m}G_x(z)$
Обернення часу	$x[-n]$	$G_x(1/z)$
Згортка	$x[n]*y[n]$	$G_x(z)G_y(z)$

Використовуючи двостороннє перетворення Лапласа

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt, \tag{2.157}$$

можна знайти Z-перетворення Лапласа.

Двостороннє перетворення Лапласа $Y(s)$ сигналу на виході лінійної системи має вигляд

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} y[t]e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n\Delta t]\delta[t-n\Delta t]\right]e^{-st}dt. \quad (2.158)$$

Почленно інтегруючи і беручи до уваги властивості дельта-функції Дірака, одержимо

$$Y(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t)e^{-sn\Delta t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t)(e^{-s\Delta t})^n. \quad (2.159)$$

Оскільки e^{-st} є ядром неперервного двостороннього перетворення Лапласа, позначимо за допомогою комплексної зміни $z = e^{-s\Delta t}$ аналогічне дискретизоване ядро. Тоді двостороннє Z-перетворення Лапласа $X(z)$ визначиться виразом

$$X(z) = Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^n, \quad (2.160)$$

де $x[n] = x[n\Delta t]$, $z = e^{-s\Delta t}$.

У звичайному двосторонньому Z-перетворенні комплексна змінна z має вигляд $z = e^{s\Delta t}$, тобто

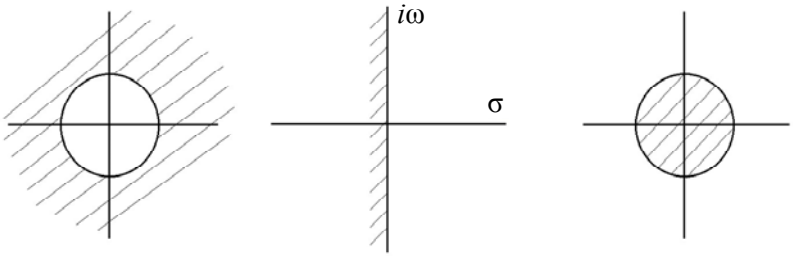
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}. \quad (2.161)$$

Обернене Z-перетворення обчислюють за формулою

$$x(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_c X(z)z^{n-1}dz, \quad (2.162)$$

де інтегрування здійснюється, включаючи початок координат контуру C (проти часової стрілки), який лежить в області збіжності $X(z)$. Комплексна змінна $z = e^{-s\Delta t} = e^{\delta\Delta t}e^{-i\omega\Delta t}$ в Z-перетворенні Лапласа відображає праву половину s-площини (рис. 2.1) усередині одиничного кола, а ліву половину s-площини – в області зовні одиничного кола. Аналогічно комплексна змінна $z = e^{s\Delta t} = e^{\sigma\Delta t}e^{i\omega\Delta t}$ звичайного Z-перетворення відображає праву половину s-площини в області зовні одиничного кола, а ліву по-

ловину *s*-площини всередині одиничного кола. На рисунку показано області мінімальної фазності та стійкості для перетворення Лапласа, *Z*-перетворення Лапласа і звичайного *Z*-перетворення.



а) $z = e^{-s\Delta t}$ *б*) $s = \sigma + i\omega$ *в*) $z = e^{s\Delta t}$

Рис. 2.1. Зв'язок між *Z*-перетворенням Лапласа (*а*), перетворенням Лапласа (*б*), *Z*-перетворенням (*в*)

Переваги *Z*-перетворення при цифровій обробці зумовлені тим, що їх можна достатньо просто записати й оперувати з ними як зі звичайними поліномами. Один важливий клас дискретних системних функцій утворюють функції з раціональним *Z*-перетворенням. Нехай деяка каузальна дискретна лінійна система описується таким лінійним різницевим рівнянням зі сталими коефіцієнтами:

$$\sum_{k=0}^{\grave{I}} a[k]y[n-k] = \sum_{k=0}^{Q} b[k]x[n-k], \qquad (2.163)$$

яке зв'язує вхідну і вихідну послідовності $x[n]$ і $y[n]$, де $n \geq 0$. Послідовності $a[0],\ldots,a[m]$ і $b[0],\ldots,b[Q]$ повністю характеризують систему. Тут можна покласти $a[0]=1$. Якщо задано деяку множину початкових умов для вхідної й вихідної послідовностей при $n<0$ і вхідну послідовність $x[n]$ при $n \geq 0$, то нескладно обчислити вихідну послідовність $x[n]$ при $n \geq 0$. При нульових початкових умовах *Z*-перетворення, яке відповідає рівнянню (2.163), матиме вигляд

$$Y(z)\sum_{k=0}^{\grave{I}} a(k)z^{-k} = X(z)\sum_{k=0}^{Q} b[k]z^{-k}, \qquad (2.164)$$

згідно із властивостями згортки. Таким чином, системна функція $H^{\circ}(z)$, що зв'язує вхід і вихід, визначатиметься виразом

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{Q} b[k]z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{M} a[k]z^{-k}}, \qquad (2.165)$$

і є раціональною функцією від z^{-1}. Одна з еквівалентних факторизованих форм функції $H(z)$ має вигляд

$$H(z)=\frac{b[0]\prod_{k=1}^{Q}(1-z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{M}(1-P_k z^{-1})}, \qquad (2.166)$$

де $b[0]-$ масштабний коефіцієнт. Корені $z_1,\ldots,z_Q$ полінома в чисельнику і корені $P_1,\ldots,P_M$ у знаменнику називаються відповідно нулями і полюсами функції $H(z)$.

Для стійкої системи всі полюси мають задовольняти умову $|P_k|<1$.

Мінімально-фазовою лінійною системою називається каузальна система, в якій усі полюси й нулі системної функції $H(z)$ лежать у середині одиничного кола в z-площині, тобто $|z_k|<1$ і $|P_k|<1$.

Системну функцію (2.165) можна також записати у формі розвинення на елементарні дроби, якщо покласти, що $Q\le M$ і кратні полюси відсутні, тоді

$$H(z)=\sum_{k=1}^{M}\frac{r[k]}{1-P_k z^{-1}}=\sum_{k=1}^{M}\frac{r(k)z}{z-P_k}. \qquad (2.167)$$

Лишок $r[k],\ k=1,\ldots,M,$ можна обчислити, використовуючи теорему про лишки

$$r[k]=\left[\frac{H(z)(z-P_k)}{z}\right]_{z=P_k}. \qquad (2.168)$$

За наявності кратних полюсів необхідно застосувати більш складний підхід.

Імпульсна характеристика системи при нульових початкових умовах – це сума дискретних експонент. Це можна показати, використавши обернене *Z*-перетворення до функції (2.167):

$$h(n)=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{M} r(k)\,P_k^n, & n\geq 0;\\ 0, & n<0.\end{cases} \tag{2.169}$$

2.3.4. Деякі важливі зауваження

Передаточна функція, визначена в деякій області комплексної площини $p=\sigma+i\,\omega$, сама є комплексною характеристикою системи. Якщо покласти $p=i\,\omega$ $(\sigma=0)$, то передаточна функція переходить у спектральну характеристику $L(i\,\omega)$. У свою чергу вона може визначатись як інтеграл Фур'є від імпульсної характеристики:

$$L(i\,\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\,\omega t}dt\,. \tag{2.170}$$

Запишемо обернене перетворення Фур'є

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} L(i\,\omega)e^{i\,\omega t}d\,\omega\,. \tag{2.171}$$

Область зміни аргументу можна розширити на комплексну площину $\xi=\omega+i\,w$, здійснюючи інтегрування у формулі (2.171) тільки по дійсній осі. Між аргументами перетворення Лапласа і Фур'є існує очевидний взаємозв'язок:

$$p=\sigma+i\,\omega=i\,\xi=i\,\omega-w\,. \tag{2.172}$$

При множенні на i вектор здійснює обертання на кут 90°. Згідно з (2.172) уявна вісь $i\,\omega$ площини p переходить у дійсну вісь ω площини ξ, додатна права півплощина $\mathrm{Re}\,p=\sigma>0$ – у нижню півплощину $\mathrm{Im}\,\xi=w<0$.

Спектральна характеристика $L(i\omega)$ також є комплексною і виражається двома еквівалентними формами:

$$L(i\omega) = \operatorname{Re} L(i\omega) + i \operatorname{Im} L(i\omega) = \left|L(i\omega)\right| e^{i\phi_L(\omega)}, \qquad (2.173)$$

де $\left|L(i\omega)\right|$ – амплітудна, а $\phi_L(\omega)$ – фазова характеристика системи.

Зрозуміло, що реальними є тільки дійсні частини комплексного аргументу. Уявні частини введено з метою зручності аналізу й математичних перетворень. У випадку фізично реальних систем уявні частини характеристик не можуть вводитись довільним чином, оскільки вони пов'язані з дійсною частиною характеристик перетворенням Гільберта:

$$\operatorname{Im} L(i\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} L(i\omega)}{\omega_1 - \omega} d\omega_1 . \qquad (2.174)$$

Існує і зворотне перетворення

$$\operatorname{Re} L(i\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} L(i\omega)}{\omega_1 - \omega} d\omega_1 . \qquad (2.175)$$

У точці $\omega_1 = \omega$ підінтегральні функції (2.174) і (2.175) перетворюються на ∞, тому інтеграли мають сенс як головні значення інтеграла Коші.

При порівнянні виразів (2.174) і (2.175) згідно з умовою лінійності системи

$$U(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) h(t-\tau) d\tau , \qquad (2.176)$$

яку в частотній області можна замінити простим добутком комплексних спектрів $S_{\cup}(\omega) = L(i\omega) S_y(\omega)$, видно, що перетворення Гільберта – це операція згортки в частотній області $\operatorname{Re} L(i\omega)$ і $\operatorname{Im} L(i\omega)$ із функцією $\frac{1}{\pi\omega}$. Тому можна говорити про лінійний фільтр з імпульсною характеристикою $\frac{1}{\pi\omega}$ (або $\frac{1}{\pi t}$ у часовій

області), який перетворює реальну частину функції на мінімальну й навпаки:

$$\operatorname{Re} L(i\omega) = -\frac{1}{\pi\omega} \operatorname{Im} L(i\omega), \qquad (2.177)$$

$$\operatorname{Re} L(i\omega) = -\frac{1}{\pi\omega} \operatorname{Im} L(i\omega). \qquad (2.178)$$

Важливо підкреслити, що для лінійної моделі реального геологічного середовища дійсна й уявна частини спектральної характеристики $L(i\omega)$ однозначно взаємозв'язані, і знаючи одну з них, другу можна одержати за допомогою перетворення Гільберта.

Амплітудна характеристика лінійної моделі геологічного середовища

$$\left|L(i\omega)\right| = \sqrt{\left[\operatorname{Re} L(i\omega)\right]^2 + \left[\operatorname{Im} L(i\omega)\right]^2}, \qquad (2.179)$$

узагалі кажучи, не є індивідуальною його характеристикою. Існує множина реальних лінійних систем, які мають однакові функції $\left|L(i\omega)\right|$, але відрізняються дійсними й уявними частинами, а відповідно і фазовою характеристикою $\phi_L(\omega)$.

Проте, застосувавши перетворення Гільберта до логарифма амплітудної характеристики (2.173)

$$\ln\left[L(i\omega)\right] = G(\omega) + i\phi_L(\omega), \qquad (2.180)$$

де $G(\omega) = \ln\left[L(i\omega)\right]$ – логарифм модуля або амплітудної характеристики (ослаблення сигналу), ми одержуємо фазову характеристику однієї системи всього ансамблю, тобто мінімально-фазової системи.

Логарифм спектральної характеристики є комплексною функцією частоти ω, і при певних умовах її дійсні та уявні частини можуть бути зв'язані перетворенням Гільберта:

$$\phi_{\angle}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\omega)}{\omega_1 - \omega} d\omega_1 . \qquad (2.181)$$

Але застосування формули (2.181) викликає певні труднощі, оскільки згідно з фізичною реалізовністю лінійної системи необхідно, щоб модуль її характеристики $\left|L(i\omega)\right|$ при $\omega \to \infty$ пряму-

вав до 0. Тоді функція $G(\omega)=\ln\left|L(i\omega)\right|$ при $\omega\to\infty$ прямує до $-\infty$. Перетворення Гільберта існує, якщо швидкість зростання функції $G(\omega)$ мала, тобто, якщо $G(\omega)/\omega\to 0$ для $\omega\to\infty$.

Більш жорсткою умовою виконання умови (2.181), а також фізичної реалізовності ансамблю систем є критерій Пейлі – Вінера:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|\ln\left[L(i\omega)\right]\right|}{1+\omega^2}d\omega<\infty. \qquad (2.182)$$

Тоді формули перетворення Гільберта змінюються так:

$$\phi_L(\omega)=\frac{2\omega}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{G(\omega_1)-G(\omega)}{\omega_1^2-\omega^2}d\omega_1, \qquad (2.183)$$

$$G(0)-G(\omega)=\frac{2\omega}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\omega\phi_L(\omega_1)-\omega_1\phi_L(\omega)}{\omega_1(\omega_1^2-\omega^2)}d\omega_1. \qquad (2.184)$$

Таким чином, якщо відома амплітудна характеристика системи, можна знайти єдину фазову характеристику, що буде відповідати мінімально-фазовій системі з найменшими часовими зсувами сигналів.

Отже, якщо розглядається геологічне середовище як лінійна система, яка передає сейсмоакустичні хвилі, то її спектральну характеристику можна знайти таким чином: нехай на вхід цієї системи подаються гармонічні коливання одиничної амплітуди $e^{i\omega t}\left(x=0\right)$, тоді на виході системи на відстані x одержимо сигнал $U(t)=L(i\omega)xe^{i\omega t}=e^{i\left(\omega t-\tilde{k}x\right)}$.

Звідси дістанемо

$$L(i\omega)=e^{-\alpha x}e^{-i\frac{\omega x}{\upsilon(\omega)}}. \qquad (2.185)$$

Амплітудна характеристика системи визначається функцією поглинання $\alpha(\omega)$, а фазова – функцією швидкості $\upsilon(\omega)$. Логарифм спектральної характеристики

$$\ln\left[L(i\omega)\right]=-\alpha(\omega)x-i\frac{\omega x}{\upsilon(\omega)} \qquad (2.186)$$

має вигляд формули (2.180) і за певних умов допускає застосування перетворення Гільберта (2.183) і (2.184) для встановлення

залежності між $\alpha(\omega)$ і $\upsilon(\omega)$. Якщо функції $G(\omega)$ і $\phi_L(\omega)$ виразити в (2.183) і (2.184) через $\alpha(\omega)$ і $v(\omega)$, то одержимо дисперсійне співвідношення Крамера – Кроніга.

Головна трудність застосування перетворень (2.183) і (2.184) згідно з принципом причинності зумовлює необхідність визначення функцій $\alpha(\omega)$ і $\upsilon(\omega)$ в межах частотного діапазону, який змінюється від 0 до ∞. Враховуючи дискретний характер геологічного середовища, при $\omega \to \infty$ модель суцільного середовища втрачає сенс, оскільки довжина хвилі стає співрозмірною з характерним розміром мікронеоднорідностей і навіть ультрамікронеоднорідностей. У такому випадку домінує просторова дисперсія.

Для подолання цих труднощів можна скористатися методом Гінзбурга, згідно з яким обчислюються різниці функцій:

$$\frac{\alpha(\omega)}{\omega} - \frac{\alpha(\omega_0)}{\omega_0}, \qquad \frac{1}{\upsilon(\omega)} - \frac{1}{\upsilon(\omega_0)}, \tag{2.187}$$

де ω_0 – деяка фіксована частота. Це дозволяє здійснювати інтегрування в межах від 0 до деякої скінченної частоти $\omega_k >> \omega_0$.

Метод Футтермана ґрунтується на лінійному законі $\alpha(\omega) = r\omega$ і на припущенні, що обрізання частоти має відбуватися на низьких частотах, а не на високих.

Узагалі легко довести, що залежності: $\alpha(\omega) = a_1\omega$, $\alpha(\omega) = b_2\omega^2$, $\alpha(\omega) = r\omega^n \quad (n \geq 1)$ фізично нереалізовні, оскільки не задовольняють критерій Пейлі – Вігнера. Це суто формальний прийом із використанням обмежуючих множників, які не мають фізичного змісту.

Тому під час обчислень дисперсії швидкості при використанні значень швидкостей на деякій опорній частоті ω_0 та інтегруванні в обмеженому діапазоні частот, зокрема, у випадку степеневого закону поглинання

$$\alpha(\omega) = r\,\omega^n \tag{2.188}$$

одержують залежність

$$\frac{1}{\upsilon(\omega_1)} - \frac{1}{\upsilon(\omega_0)} = r\,\mathrm{tg}\frac{n\pi}{2}\left(\omega_1^{n-1} - \omega_0^{n-1}\right). \tag{2.189}$$

Якщо $n=1$, то формула (2.189) має такий вигляд:

$$\frac{1}{\upsilon(\omega_1)}-\frac{1}{\upsilon(\omega_0)}=\frac{2r}{\pi}\ln\frac{\omega_1}{\omega_0}. \qquad (2.190)$$

Оскільки $\alpha(\omega)$ є логарифмом амплітудної характеристики геологічного середовища, то оцінка залежності $\upsilon(\omega)$ відповідає мінімально-фазовій системі.

У цілому, незважаючи на важливість одержаних результатів, залишається незрозумілим і необґрунтованим ряд важливих питань. Насамперед, це стосується обґрунтування мінімально-фазових спектральних характеристик геологічного середовища; можливості застосування перетворення Гільберта до експериментальної залежності $\alpha(\omega)$, екстраполяції цих залежностей в області низьких і високих частот. Це, у свою чергу, свідчить про обмеженість феноменологічного підходу в рамках принципу суцільності геологічного середовища.

2.3.5. Оцінювання власної дисперсії в поглинаючому середовищі

Розглянемо плоску хвилю $\delta\left(t-\frac{x}{\upsilon}\right)$, яка поширюється зі швидкістю υ уздовж додатного напрямку x в ідеально пружному однорідному середовищі. Така хвиля ідеально зберігає свою форму і всі частотні компоненти зміщуються по черзі з однією і тією самою швидкістю.

Тепер розглянемо таку хвилю як вхідний сигнал при $x=0$ для поглинаючого середовища. Вважатимемо, що Q приблизно стале в частотному діапазоні в середовищі (частотно-незалежне Q). Кожна компонента Фур'є-імпульсу

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(t-\frac{x}{\upsilon}\right)e^{i\omega t}dt=e^{i\omega x/\upsilon} \qquad (2.191)$$

буде тепер послаблюватися множником $e^{-\alpha(\omega)x}$, де коефіцієнт затухання $\alpha=\frac{\omega}{2\alpha Q}$.

Визначимо форму імпульсу $P(x,t)$ затухаючої хвилі на відстані x. Спочатку припустимо, що дисперсія відсутня, тоді імпульс синтезується і компонента Фур'є, яка має одну й ту саму швидкість υ має вигляд:

$$P(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{-|\omega|x}{2\upsilon Q}\right]\exp\left[i\omega\left(\frac{x}{\upsilon}-t\right)d\omega\right], \qquad (2.192)$$

де у множника, що описує затухання, замінено ω на $|\omega|$, якщо $x>0$.

Якщо Q не залежить від частоти, то внаслідок інтегрування (2.191) одержимо

$$P(x,t)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\frac{x}{2\upsilon Q}}{\left(\frac{x}{2\upsilon Q}\right)^2+\left(\frac{x}{\upsilon}-t\right)^2}\right]. \qquad (2.193)$$

Імпульс, що описується рівнянням (2.193), зображено на рис. 2.2 на фіксованій відстані x.

Як бачимо, одержаний таким чином імпульс має деякі очевидні особливості, які не узгоджуються з принципом причинності.

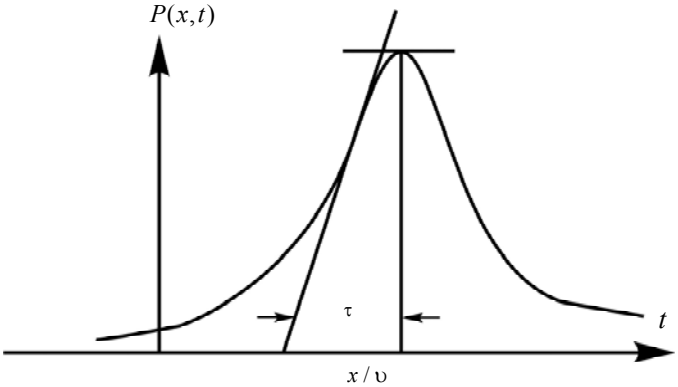


Рис. 2.2. Форма хвилі $P(x,t)$ як функція часу при фіксованій відстані x

По-перше, для нього характерна наявність коливання (хоча і слабкого) у точці $x=0$ навіть раніше моменту часу $t=0$. По-

друге, швидкість наростання τ імпульсу зі збільшенням відстані майже в 1,5 рази більша за $(2\upsilon Q)^{-1}$. Й останнє, форма сигналу не узгоджується з експериментом, який свідчить про асиметрію форми імпульсу з часом. Цей сигнал наростає протягом меншого часу, а спадає протягом більшого часу.

Одержані особливості дають підстави вважати, що припущення про лінійність, частотну незалежність Q і відсутність дисперсії не відповідають дійсності.

Діятимемо послідовно. Припустимо, що лінійність і частотна незалежність виконуються, але спостерігається дисперсія швидкості. В іншому випадку не вдасться уникнути симетрії затухаючого імпульсу. Дійсно, у загальному випадку Q є парною функцією ω, тобто $Q(\omega) = Q(-\omega)$. Отже, за відсутності дисперсії імпульс завжди симетричний відносно $t = x/\upsilon$.

Для кількісного оцінювання дисперсії швидкості вводиться поняття хвильового фронту в неідеально пружному середовищі. Нехай плоска хвиля $u(x,t)$ поширюється в напрямку зростаючих значень x, і хвильовий фронт вперше приходить у точку $x = 0$ в момент часу $t = 0$. Тоді

$$u(0,t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0. \tag{2.194}$$

При $x > 0$ кожну компоненту Фур'є можна представити як

$$u(x,\omega) = u(0,\omega)e^{ikx}, \tag{2.195}$$

де k – комплексне хвильове число, яке виражається через фазову швидкість $\upsilon(\omega)$ і коефіцієнт затухання $\alpha(\omega)$:

$$k = \frac{\omega}{\upsilon(\omega)} + i\alpha(\omega). \tag{2.196}$$

Оскільки виконується принцип лінійної суперпозиції хвилі в (x,t), маємо

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(0,\omega)e^{i(kx-\omega t)}d\omega, \tag{2.197}$$

що еквівалентно згортці $u(0,t)$ із функцією

$$P(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(kx-\omega t)}\, d\omega, \qquad (2.198)$$

де $P(x,t)$ – реакція поглинаючого середовища на δ-імпульс. Але тепер припускаємо частотну залежність фазової швидкості.

Спочатку необхідно довести, що при виконанні принципу причинності, тобто за умови $P(x,t)=0$, до часу вступу $\frac{x}{\upsilon_\infty}\left(t<\frac{x}{\upsilon_\infty}\right)$, ми приходимо до співвідношення

$$\frac{\omega}{\upsilon(\omega)}=\frac{\omega}{\upsilon_\infty}+H\left[\alpha(\omega)\right], \qquad (2.199)$$

де υ_∞ – межа $\upsilon(\omega)$ при $\omega\to\infty$; $H[\alpha(\omega)]$ – перетворення Гільберта від коефіцієнта поглинання.

По-перше, зауважимо таке: принцип причинності повністю еквівалентний твердженню про те, що функція $F(\omega)$, котра визначається як

$$F(\omega)=e^{i\left(k-\frac{\omega}{\upsilon_\infty}\right)x}, \qquad (2.200)$$

є аналітичною функцією у верхній півплощині, тобто при $\operatorname{Im}\omega\geq 0$. Дійсно, інтеграл

$$F(\omega)=p(x,\omega)e^{-i\omega x/\upsilon_\infty}=\int_{-x/\upsilon_\infty}^{\infty} p(x,t)e^{i\omega(t-x/\upsilon_\infty)}dt \qquad (2.201)$$

згідно з лемою Жордана є збіжним інтегралом у верхній півплощині F, і всі похідні цієї півплощини F існують, що й підтверджує аналітичність функції у верхній півплощині. З іншого боку, якщо функція аналітична, то можна записати

$$P(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega(t-x/\upsilon_\infty)}\, d\omega \qquad (2.202)$$

і додати на шляху інтегрування півколо на нескінченності у верхній півплощині. Внесок від інтеграла по додатковому шляху інтегрування дорівнює нулю при $t<x/\upsilon_\infty$, оскільки експонента прямує до нуля.

Отже, підінтегральний вираз у (2.202) є аналітичним усюди всередині замкненого контуру, тому умови причинності виконуються.

По-друге, покажемо також, що $\log F(\omega)$ – аналітична функція у верхній півплощині. Щоб довести це, необхідно лише показати, що у $F(\omega)$ немає коренів, в яких ω має невід'ємну уявну частину.

Нехай, навпаки, $F(\omega_0) = 0$ при $\operatorname{Im}\omega_0 \geq 0$. Тоді

$$F(\omega) = (\omega - \omega_0)^{\lambda} f(\omega) \tag{2.203}$$

для деякого $\lambda > 0$ і деякого f при $f(\omega_0) \neq 0$. Проте при зростанні x до $x + \Delta x$ із (2.200) випливає, що

$$(\omega - \omega_0)^{\lambda(1+\Delta x/x)} f(\omega)^{1+\Delta x/x} \tag{2.204}$$

є аналітичною функцією у верхній півплощині, що неможливо, оскільки ця функція має точку розгалуження у ω_0.

По-третє, нагадаємо про спеціальну форму теореми Коші: якщо функція $g(z)$ аналітична на замкненому контурі C і всередині обмеженої ним області, то для точки x на самому контурі C маємо

$$g(x) = \frac{1}{\pi i} P \int_C \frac{g(z)\,dz}{z - x}, \tag{2.205}$$

де P свідчить про те, що береться головне значення інтеграла згідно з теоремою Коші.

Застосуємо (2.205) до аналітичної функції

$$\begin{aligned} \log F(\omega) &= \log\left|F(\omega)\right| + i \arg F(\omega) = \\ &= -\alpha(\omega) x + i\omega \left(\frac{1}{\upsilon(\omega)} - \frac{1}{\upsilon_\infty} \right) x, \end{aligned} \tag{2.206}$$

використовуючи як контур C півколо нескінченного радіуса, яке охоплює верхню половину півплощини комплексного ω. Для дійсних значень ω одержуємо

$$\log F(\omega) = \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log F(\xi)\,d\xi}{\xi - \omega} \tag{2.207}$$

за умови, що внесок від півкола дорівнює нулю. Підставляємо (2.205) у (2.207) і, виділяючи в одержаному виразі дійсну й уявну частини, знаходимо

$$\alpha(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \xi \left(\frac{1}{\upsilon(\xi)} - \frac{1}{\upsilon_\infty} \right) \frac{d\xi}{\xi - \omega} = -H\left[\omega \left(\frac{1}{\upsilon(\omega)} - \frac{1}{\upsilon_\infty} \right) \right] \quad (2.208)$$

і

$$\omega \left(\frac{1}{\upsilon(\omega)} - \frac{1}{\upsilon_\infty} \right) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(\xi) d\xi}{\xi - \omega} = H\left[\alpha(\omega) \right], \quad (2.209)$$

що й треба було довести.

Результат

$$\frac{\omega}{\upsilon(\omega)} = \frac{\omega}{\upsilon_\infty} + H\left[\alpha(\omega) \right] \quad (2.210)$$

еквівалентний співвідношенню Крамера – Кроніга.

На цьому етапі виникає враження, що пошук $\upsilon(\omega)$ по суті вже є розв'язаною задачею. Для цього необхідно взяти перетворення Гільберта від коефіцієнта затухання, яке відповідає сталому значенню Q, і скористатися виразом (2.210).

Але з рівняння (2.210) випливає, що

$$\frac{\omega}{\upsilon_\infty} + H\left[\alpha(\omega) \right] = 2Q\alpha(\omega). \quad (2.211)$$

Такого перетворення Гільберта, для якого це співвідношення може виконуватися при сталому Q, не існує. Якби воно виконувалося, то ми могли б узяти перетворення Гільберта від обох частин (2.211). Але це неможливо, оскільки перетворення від ω / υ_∞ – розбіжний інтеграл.

Тому потрібно прийняти частотно-залежне Q, яке задовольняє (2.211), але із затуханням, котре забезпечує практично сталу величину Q у сейсмічному діапазоні частот.

Наприклад, візьмемо функцію для коефіцієнта затухання

$$\alpha(\omega) = \frac{\alpha_0 \omega}{1 + \alpha_1 \omega}, \quad (2.212)$$

де α_0, α_1 – константи.

Тоді

$$H\left[\alpha(\omega) \right] = \frac{2\alpha_0 \omega}{\pi\left(1 - \alpha_1^2 \omega^2\right)} \ln\left(\frac{1}{\alpha_1 \omega} \right). \quad (2.213)$$

Звертаємо увагу на те (рис. 2.3), що за наявності дисперсії імпульс асиметричний і запізнюється на певний час порівняно з диспергуючим імпульсом. Фронт цього імпульсу змінюється аналогічно тому, як це спостерігається при експериментальних дослідженнях.

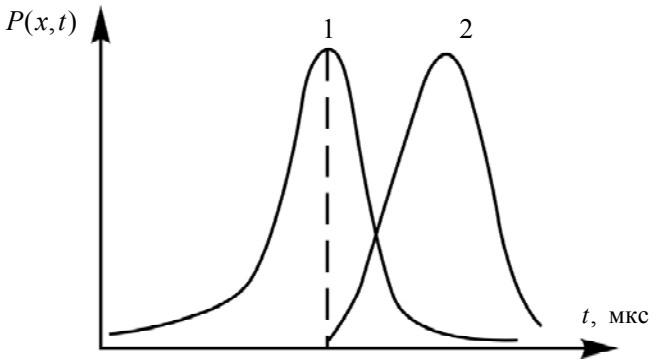


Рис. 2.3. Порівняння форми двох затухаючих імпульсів $P(x,t)$ на фіксованій відстані x :
1 – за відсутності дисперсії; 2 – за наявності дисперсії за законом затухання (2.212)

Але співвідношення (2.212), (2.213) справедливі лише при $\alpha_1\omega << 1$ на всьому сейсмічному діапазоні частот. Отже, відхилення затухання від закону $\alpha(\omega) \sim \omega$ не буде помітним доти, поки α не стане дуже великим. Тому можна не брати до уваги члени $\alpha_1^2\omega^2$ у виразі для $H[\alpha(\omega)]$ (2.213), тоді отримаємо наближену формулу для фазової швидкості

$$\frac{1}{\upsilon(\omega)} = \frac{1}{\upsilon_\infty} + \frac{2\alpha_0}{\pi}\ln\left(\frac{1}{\alpha_1\omega}\right). \qquad (2.214)$$

Зважаючи на (2.211), (2.212), (2.213), одержимо

$$Q = \frac{1}{2\upsilon_\infty\alpha_0}. \qquad (2.215)$$

Тепер знаходимо відношення фазових швидкостей на двох різних сейсмічних частотах ω_1 і ω_2 :

$$\frac{\upsilon(\omega_1)}{\upsilon(\omega_2)} = 1 + \frac{1}{\pi Q}\ln\left(\omega_1 \big/ \omega_2\right). \qquad (2.216)$$

Одержаний результат є непоганою апроксимацією для багатьох законів затухання, якщо Q практично стале в сейсмічному діапазоні частот.

Якщо прийняти закон затухання у вигляді степеневої функції

$$\alpha(\omega) = \alpha_0 |\omega|^s, \tag{2.217}$$

де $s < 1$, то перетворення Гільберта можна записати так:

$$H\left[\operatorname{sign}\omega|\omega|^{s-1}\right] = |\omega|^{s-1} \operatorname{tg}\left(\pi s/2\right). \tag{2.218}$$

Тоді одержимо

$$\frac{1}{\upsilon(\omega)} = \frac{1}{\upsilon_\infty} + \frac{\alpha(\omega)}{|\omega|} \operatorname{tg}\left(\pi s/2\right). \tag{2.219}$$

Для того, щоб закон затухання (2.217) був лінійним, необхідно, щоб $\alpha(\omega)/|\omega|$ було практично сталим. У цьому випадку відносна дисперсія між різними частотними компонентами в діапазоні сейсмічних частот може бути незначною, але абсолютна дисперсія (відносно фазової швидкості υ_∞) може бути значною, якщо $s < 1$. Це пояснюється повільною збіжністю перетворення Гільберта. Амплітудний спектр на частотах мегагерцового діапазону і вище контролює фазову затримку на сейсмічних частотах. Зрозуміло, що це не відповідає дійсності, тому реальний закон затухання повинен мати інший вигляд на високих частотах. Дійсно, згідно з (2.210), затримка фази на частоті ω, тобто, $x/\upsilon(\omega) = x/\upsilon_\infty + x\omega^{-1}H\left[\alpha(\omega)\right]$. Це означає, що фазова затримка на конкретній частоті визначається перетворенням Гільберта від спектра поглинання на всіх частотах.

Якщо асимптотична поведінка $\alpha(\omega)$ при $\omega \to 0$ і $\omega \to \infty$ вибрана таким чином, що інтеграл збігається повільно, то на сейсмічних частотах може виникнути дуже велика затримка. У цьому випадку необхідно накласти обмеження на коефіцієнт затухання $\alpha(\omega)$ на дуже високих і дуже низьких частотах.

Модель Ломніца описує результати експериментів логарифмічним законом:

$$\Psi(t)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } t \le 0; \\ q\ln(1+\theta t), & \text{якщо } t \ge 0, \end{cases} \tag{2.220}$$

де $\Psi(t)$ – функція повзучості, а фундаментальна частота θ може бути як завгодно великою, наприклад, мати частоту коливань вакантних вузлів кристалічної ґратки (10^{10} Гц).

Здійснимо перетворення Фур'є функції повзучості $\Psi(t)$ (2.220), тоді одержимо

$$\theta q\int_0^{\infty}\frac{e^{i\omega t}}{1+\theta t}dt \sim -q\left[\gamma+\ln\left(\frac{\omega}{\theta}\right)-\frac{i\pi}{2}\right]e^{i\omega/t}\tau\,. \tag{2.221}$$

Маючи $\omega << a$ і константу Ейлера $\gamma = 0{,}577\ldots$ та враховуючи, що $q << 1$, одержимо з (2.221) із точністю до членів 1-го порядку

$$\frac{\omega}{\upsilon(\omega)}+i\alpha(\omega)=\frac{\omega}{\upsilon_{\infty}}\left\{1-\frac{q}{2}\left[\gamma+\ln\left(\frac{\omega}{\theta}\right)\right]+\frac{i\pi q}{4}\right\}. \tag{2.222}$$

Уявна частина виразу (2.222) визначає одну з констант Ломніца:

$$q=\frac{2\upsilon_{\infty}}{\pi Q\upsilon(\omega)}\sim\frac{2}{\pi Q}\,. \tag{2.223}$$

Звідси, використовуючи дійсну частину (2.222), знаходимо частотну залежність

$$\frac{1}{\upsilon(\omega)}=\frac{1}{\upsilon_{\infty}}\left\{1-\frac{1}{\pi Q}\left[\gamma+\ln\left(\frac{\omega}{\theta}\right)\right]\right\}, \tag{2.224}$$

яка узгоджується зі співвідношенням, знайденим для частинного закону затухання:

$$\frac{\upsilon(\omega_1)}{\upsilon(\omega_2)}=1+\frac{1}{\pi Q}\ln\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right), \tag{2.225}$$

Отже, обґрунтування (2.225) випливає з незалежності Q в діапазоні сейсмічних частот.

Логарифмічна дисперсія одержала тепер достатньо повне обґрунтування для випадку з частотно-незалежним Q.

А тепер з'ясуємо, яким чином розв'язувати задачу про поширення хвилі в неідеально пружному середовищі, якщо аналогічну задачу для пружного середовища вже розв'язано.

Для цього потрібен множник, що описує поширення хвилі:

$$e^{i(kx-\omega t)} = e^{-\frac{\omega x}{2\upsilon(\omega)Q(\omega)}} e^{i\omega\left(\frac{x}{\upsilon(\omega)}-t\right)}. \qquad (2.226)$$

Незважаючи на те, що υ у розв'язках задач теорії пружності має вигляд частотно-незалежної константи $\upsilon = \upsilon_e$, ці розв'язки мають бути аналітичними функціями υ_e. Із теорії аналітичних продовжень випливає, що розв'язок для непружної моделі можна знайти шляхом заміни υ_e за правилом

$$\frac{1}{\upsilon_e} \to \frac{1}{\upsilon(\omega)}\left(1+\frac{i}{2Q(\omega)}\right). \qquad (2.227)$$

Якщо Q практично стале, то можна скористатися для опису дисперсії логарифмічним законом. Для цього виберемо опорну частоту, відносно якої розглядатиметься дисперсія. Наприклад, якщо візьмемо $f = 1\,\text{Гц}$ $(\omega = 2\pi)$, то швидкість у пружному середовищі υ_e буде замінено за правилом

$$\upsilon_e = \upsilon_1\left[1+\frac{1}{\pi Q}\ln\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)-\frac{i}{2Q}\right], \qquad (2.228)$$

де υ_1 – фазова швидкість об'ємної хвилі на частоті 1 Гц. Рівняння (2.228) справедливе з точністю до величини 1-го порядку мализни по Q.

2.4. Визначення декремента затухання сейсмічних хвиль за даними сейсморозвідки

Розглянемо можливості визначення коефіцієнта декрементів затухання сейсмічних хвиль методом відбитих хвиль (МВХ).

Нехай сейсмічне поле, яке реєструється на поверхні землі, є випадковим полем і являє собою випадковий потік елементарних сейсмічних сигналів, зумовлених взаємодією збуреного сейсмічного

сигналу з випадковим вертикально-неоднорідним геологічним середовищем. Необхідно знайти спектр потужності елементарного сейсмічного сигналу з інтерференційної сукупності на невеликому завдовжки сейсмічному записі зареєстрованої сейсмограми.

Амплітуда потужності сейсмічного сигналу при поширенні у вертикально-неоднорідному середовищі змінюватиметься внаслідок таких факторів:

1) утрати енергії, зумовлених формуванням відбитих й обмінних хвиль на відбиваючих сейсмічних межах;

2) геометричне розходження фронту сферичної хвилі, енергія якої зменшується пропорційно квадрату відстані від джерела коливань;

3) розсіювання енергії хвилі на неоднорідностях різного масштабу;

4) непружні втрати енергії.

Наголосимо на особливостях визначення декремента затухання хвилі в неоднорідному середовищі. Дійсно, для визначення міри затухання хвилі береться до уваги припущення, згідно з яким відносне зменшення амплітуди хвилі на відрізку шляху dz пропорційне довжині цього відрізка, тобто

$$dA(\omega, z) / A(\omega, z) = -\alpha(\omega) dz, \qquad (2.229)$$

де $A(\omega)$ – амплітуда хвилі з частотою ω; dz – елементарний шлях хвилі по вертикалі; $\alpha(\omega)$ – коефіцієнт пропорційності, який вважається незалежним від z.

Ефект поглинання внаслідок непружності геологічного середовища маскується фільтруючими властивостями, зумовленими локалізованими неоднорідностями різного масштабу.

Якщо обмежити інтервал глибин $z_1 = h_1$ і $z_2 = h_2$, то розв'язавши рівняння (2.229), маємо

$$\alpha(\omega) = -\frac{1}{(h_2 - h_1)} \ln \frac{A(\omega, h_2)}{A(\omega, h_1)}. \qquad (2.230)$$

Декремент затухання $\Theta(\omega)$ визначається величиною затухання на відстані, що дорівнює довжині хвилі, тобто

$$\Theta(\omega) = \alpha(\omega) \lambda(\omega); \qquad (2.231)$$

де $\lambda(\omega) = 2\pi \upsilon(\omega) / \omega$, (2.232)

тут $\lambda(\omega)$ – довжина хвилі з частотою ω; $\upsilon(\omega)$ – фазова швидкість хвилі з частотою ω.

У сейсморозвідці МВХ глибина не фіксована. Зокрема, лише при використанні методу вертикально-сейсмічного профілювання (ВСП) можна у свердловині розмістити сейсмоприймачі на фіксованих глибинах і знайти фазову швидкість

$$\upsilon(\omega) = \frac{\Delta h}{\Delta t(\omega)}. \qquad (2.233)$$

Якщо відомий амплітудний спектр потужності сейсмічного сигналу падаючої хвилі, то методом ВСП можна оцінити коефіцієнт затухання $\alpha(\omega)$. Проте визначення декремента $\Theta(\omega)$ за даними падаючих хвиль вимагає визначення фазової швидкості $\upsilon(\omega)$, яка в загальному випадку відрізняється від групової швидкості $V^{(g)}$.

2.4.1. Постановка задачі визначення затухання у МВХ

Припустимо, що певний інтервал глибин геологічного розрізу можна розглядати як лінійну динамічну систему, тобто як деяку модель "чорного ящика". Вважатимемо, що вхідний і вихідний сигнали відомі. Необхідно знайти спектральну характеристику середовища. Згідно з теорією лінійних динамічних систем, спектр вихідного сигналу $V(\omega)$ визначається добутком спектра вхідного сигналу $W(\omega)$ і спектральної характеристики інтервалу геологічного середовища $L(\omega)$:

$$V(\omega) = W(\omega)\, L(\omega). \qquad (2.234)$$

Оскільки відлік сейсмічного сигналу здійснюється не у величинах глибин, то слід взяти до уваги, що

$$\Delta t = \Delta h(\omega) \quad / \quad \upsilon(\omega), \qquad (2.235)$$

де приймається, що час $\Delta t = t_2 - t_1$ (тут t_1, t_2 – моменти часу, до яких, відповідно, відносяться вхідний $W(\omega)$ і вихідний $V(\omega)$ сигнали) – це час, протягом якого кожна складова спектра сигналу (ω) проходить шлях $\Delta h(\omega)$ із фазовою швидкістю $\upsilon(\omega)$.

Таким чином, при наземних сейсмічних спостереженнях можна визначити лише декремент затухання $\Theta(\omega)$, а не коефіцієнт затухання, тобто

$$\Theta(\omega) = \frac{2\pi\,\alpha(\omega)\upsilon(\omega)}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega\Delta t}\ln\frac{A(\omega,t_2)}{A(\omega,t_1)}, \qquad (2.236)$$

де $\dfrac{A(\omega,t_2)}{A(\omega,t_1)} = \dfrac{V(\omega)}{W(\omega)} = L(\omega)$. (2.237)

За наявності даних ВСП і польової сейсморозвідки, враховуючи (2.4.2), можна знайти фазову швидкість

$$\upsilon\,\omega) = \frac{\Delta h}{\Delta t}\frac{\ln[A(\omega,t_2)/A(\omega,t_1)}{\ln[A(\omega,h_2)/A(\omega,h_1)}. \qquad (2.238)$$

У методі ВСП сейсмічне хвильове поле має вигляд $u(h,t)$, тобто реєстрація коливань здійснюється в системі координат (h,t). Тому з'являється можливість визначення як $\alpha(\omega)$, так і $\upsilon(\omega)$, якщо скористатися відбитими хвилями при визначенні добутку $\alpha(\omega)\cdot\upsilon(\omega)$.

Декремент затухання сейсмічної хвилі зв'язаний з добротністю $Q(\omega)$ співвідношенням

$$Q(\omega) = \pi / \Theta(\omega). \qquad (2.239)$$

Отже, для визначення як коефіцієнтів затухання, так і декрементів затухання необхідно знайти спектр інтенсивності сейсмічного сигналу на скінченному часовому інтервалі сейсмічного запису та спектральну характеристику геологічного середовища. Розв'язання останньої задачі, тобто визначення спектральної характеристики, зводиться до некоректно поставленої задачі типу інтегрального рівняння згортки із застосуванням регуляризації. Розв'язання задачі визначення спектра інтенсивності сейсмічного сигналу вимагає апріорної інформації про спектр інтенсивності вхідного і вихідного сигналів на інтервалі геологічного розрізу, що досліджується.

Навіть, якщо відома форма сигналу, який випромінює джерело сейсмічних хвиль, унаслідок наявності непружних властивостей середовища і неоднорідностей в околі джерела, форма сигналу спотворюється, і на вхід інтервалу дослідження надходить сигнал, який не тотожний його первісній формі. Тому форму сигналу

необхідно досліджувати безпосередньо за інтерференційними записами сейсмічних хвиль на обмежених інтервалах часу.

Якщо припустити, що амплітуди послідовності сигналів мають однаковий розподіл, незалежні між собою та мають дисперсію σ^2, то їх послідовність утворює пуассонівський потік, а його параметр $\bar{N}$ характеризує середню кількість імпульсів за одиницю часу. Кореляційна функція K_z цього процесу на інтервалі T сейсмотраси ($T >> T_0$ – значно більше тривалості елементарного сейсмічного сигналу) залежатиме лише від часу затримки імпульсів τ:

$$K_z[(t+\tau), t \,|t_0, T] = \bar{N}\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(u+\bar{N}\sigma^2) f(u)\, du = \bar{N}\sigma^2 R(\tau), \quad (2.240)$$

де $R(\tau)$ – автокореляція імпульсу $f(t)$. Якщо t і $(t+\tau)$ задовольняють умову $t_0 + T_0 - T/2 \le t \le t_0 + T_0 + T/2$ і $t_0 + T_0 - T/2 \le t+\tau \le$ $\le t_0 + T_0 + T/2$, то для кореляційної функції $K_z[(t+\tau), t\,|t_0, T]$ можна скористатися звичайним символом $K_z(\tau)$.

Оскільки спектр функції $R_z(\tau)$ дорівнює $|S(\omega)|^2$, то можна вважати, що при великих T процес $z(t)$ має спектральну інтенсивність

$$N_z(\omega) = \lambda\, \sigma^2 |S(\omega)|^2. \quad (2.241)$$

Отже, якщо корисний сигнал $z(t)$ реєструється на фоні хвилі-завади $\xi(t)$, то внаслідок незалежності процесів $z(t)$ і $\xi(t)$ енергетичний спектр суми $z(t)+\xi(t)$ дорівнює сумі енергетичних спектрів $N_z(\omega) + N_\xi(\omega)$.

Таким чином, визначення форми $f(t)$ випромінюваного в геологічне середовище сигналу принципово можливе завдяки формулі (2.241), згідно з якою енергетичний спектр $N_z(\omega)$ випадкової послідовності імпульсів із точністю до сталого множника збігається з квадратом амплітудного спектра сигналу $f(t)$. У часовій області це означає, що кореляційна функція $K_z(\tau)$ із точністю до множника також збігається з автокореляційною функцією сигналу $R_z(\tau)$.

Обмеження, які випливають із формули (2.241), зводяться до того, що для забезпечення необхідної відносної похибки при ви-

значенні оцінки відліку кореляційної функції потрібно, щоб довжина функції кореляції не перевищувала 0,1, а довжина сейсмічної траси – $T > 6$. Зрозуміло, що умову стаціонарності процесу на таких великих інтервалах забезпечити неможливо.

Ситуація змінюється, якщо є можливість одержати M реалізацій випадкового процесу $Z_i(t),\ i = 1,2,\ldots,M,$ за умови, що корисний сигнал і сигнал хвилі-завади статистично незалежні. У цьому випадку виконання умови (2.241) із наперед гарантованою точністю можна досягти усередненням спектрів інтенсивності невеликих інтервалів запису ΔT, вимагаючи при цьому виконання рівності

$$M\Delta T = T, \qquad (2.242)$$

де T – еквівалентна довжина інтервалу траси при визначенні спектра елементарного сейсмічного сигналу за однією реалізацією.

Але реалізувати цю можливість дуже важко, оскільки практично не вдається досягти умови статистичної незалежності насамперед корисного сигналу. Наприклад, сейсмограма в методі відбитих хвиль спільної глибинної точки (МВХ СГТ) після введення кінематичних і статичних поправок має вигляд

$$x_i(t) = z(t) + \xi_i(t), \qquad (2.243)$$

де $i = 1,2,\ldots,M$ (M – кратність підсумовування); $z(t)$ – корисний сигнал, $\xi_i(t)$ – хвиля-завада.

Складова $z(t)$ на кожній трасі не є незалежною внаслідок спеціальної організації сейсмограм СГТ.

2.4.2. Спектральна характеристика геологічного середовища

Визначення спектральної характеристики геологічного середовища є динамічною задачею теорії лінійних систем. Перетворення Фур'є від спектральної характеристики певного інтервалу геологічного розрізу $L(\omega)$ є його імпульсним відгуком $l(t)$, тобто

$$l(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} L(\omega)e^{i\omega t}d\omega. \qquad (2.244)$$

Визначення $L(\omega)$ можливе лише у випадку, коли відома форма елементарного сейсмічного сигналу на вході і виході.

Ці достатньо жорсткі умови практично виконати дуже важко. Адже визначення спектральної характеристики здійснюється за скінченним інтерференційним інтервалом сейсмічного запису, який включає і певний рівень хвиль-завад. У лінійній теорії сигналів розглядається дуже широкий інтервал частот $-\infty < \omega < \infty$ і деякі стандартні сигнали. Вважається, що найкращим класом функцій, які діють на вхід лінійної системи, є сім'я власних функцій $Z_\alpha(t), \quad \alpha \in A$, кожна з яких задовольняє умову

$$L[Z_\alpha(t)] = \lambda_\alpha Z_\alpha(t), \qquad (2.245)$$

де λ_α – власне значення лінійного оператора L. Сукупність власних значень при $\alpha \in A$ і є спектральною характеристикою стаціонарної лінійної системи. Очевидно, що необхідно використовувати тільки повні системи власних функцій, які дозволяють будувати розвинення для будь-якого вхідного сигналу. Повною сім'єю власних функцій такої системи є множина комплексних гармонік $e^{i\omega t}, -\infty < \omega < \infty$.

У практиці сейсморозвідки форма сигналу джерела невідома і змінюється випадковим чином. Спектр потужності геологічного середовища визначається в обмеженому діапазоні частот, в якому зосереджено переважну частину енергії вхідного сигналу, і при певному відношенні сигнал/хвиля-завада.

Задача поширення сейсмічних хвиль у реальному геологічному середовищі розглядається, як правило, при суттєвих спрощеннях (пружне наближення, вертикально-шарувата модель з ізотропними шарами). Навіть при таких спрощеннях під час розв'язування зворотної динамічної задачі максимально чого можна досягти – це визначити акустичну жорсткість вертикально-шаруватого середовища.

2.4.3. Імпульсна і спектральна характеристики вертикально-неоднорідного шаруватого геологічного середовища

Покажемо, що імпульсна характеристика (або рівнозначно, спектральна характеристика) вертикально-неоднорідного середовища визначає певною мірою пружні властивості й структуру геологічного середовища. По суті це свідчить про те, що існує тісна анало-

гія між оберненою фільтрацією і оберненою динамічною задачею для вертикально-неоднорідного геологічного середовища.

Нехай $f(t)$ – функція, яка описує збурення, діє на середовище, а $F(t)$ є імпульсна характеристика, тобто відгук середовища на це збурення. Тоді вихідний сигнал, зареєстрований на сейсмоприймачі, можна зобразити у вигляді інтеграла згортки

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t-\tau) f)(\tau) d\tau \ . \qquad (2.246)$$

При застосуванні операції згортки функцій, що згортаються, можна ці функції поміняти місцями (властивість комутативності):

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) F)(\tau) d\tau \ . \qquad (2.247)$$

Тому, зареєстровану сейсмограму $y(t)$ можна розглядати як реакцію фільтра з імпульсною характеристикою $f(t)$ на вхідний сигнал $F(t)$. Відповідний обернений фільтр має відновлювати імпульсну характеристику $F(t)$.

Розглянемо кусково-однорідну модель середовища, яке складається з N елементарних шарів $z_{k-1} \le z \le z_k \quad (z_0 = 0, \quad z_n = H)$. Кожний шар характеризується параметрами Ламе:

$$\rho_k = \rho(z_k), \ \lambda_k = \lambda(z_k), \ \mu_k = \rho(\mu_k).$$

Значення в кожному шарі задовольняють умову

$$\Delta\tau = \int_{Z_{k-1}}^{Z_k} \frac{dz}{\upsilon_p(z)} = \text{const} \ . \qquad (2.248)$$

До поверхні пружного півпростору $(z \ge 0)$ в точках площини $z = 0$ прикладено нормальні напруги $e^{i\omega t}$, а в кожному k-му шарі розв'язок буде представляти собою суму двох монохроматичних хвиль, одна з яких поширюється вгору, а друга – вниз:

$$u(t,z) = \vec{k}[a_k \exp(i\omega \frac{z - z_{k-1}}{\upsilon_k}) + b_k \exp(-i\omega \frac{z - z_{k-1}}{\upsilon_k})] e^{i\omega t} , \quad (2.249)$$

де $z_{k-1} \le z \le z_k$; $\upsilon_k = [(\lambda_k + 2\mu_k)/\rho_k]^{\frac{1}{2}}$; a_k, b_k – комплексні амплітуди.

Згідно із законом Гука маємо нормальні напруги в *k*-му шарі

$$\sigma_z(t,z) = (\lambda_k + 2\mu_k)\frac{\partial u_z}{\partial z} = i\omega\gamma_k[a_k \exp(i\omega\frac{z - z_{k-1}}{\upsilon_k}) -$$

$$-b_k \exp(-i\omega\frac{z - z_{k-1}}{\upsilon_k})]e^{i\omega t},\ z_{k-1} \le z \le z_k; \qquad (2.250)$$

де $\gamma_k = \rho_k \upsilon_k$.

У формулах (2.249) і (2.250) множники при $[\vec{k}\, e^{i\omega t}]$ позначимо $u(z)$ і $\sigma(z)$ відповідно. Ці множники є комплексними амплітудами, які можна визначити з межових умов на площинах $z = z_k$ *і* $z = 0$. З умови неперервності переміщень і нормальних напруг на кожній *k*-й межі маємо

$$\begin{aligned} u(z_k - 0) &= u(z_k + 0) = u_k; \\ \sigma(z_k - 0) &= \sigma(z_k + 0) = \sigma_k. \end{aligned} \qquad (2.251)$$

З умови на вільній межі

$$\sigma(t,0) = -P(t) = -e^{i\omega t} \qquad (2.252)$$

одержуємо $\sigma_0 = -1$.

Завдяки спеціальному вибору збурення комплексна амплітуда є шуканою спектральною характеристикою $L(\omega)$.

Схема розв'язання поставленої задачі така: спочатку знайдемо залежність між комплексними амплітудами $u(z)$ і $\sigma(z)$ на площинах $z = 0$ і $z = H$, а потім виразимо $\sigma(H)$ через $u(H)$. і тоді, розв'язавши одержану систему рівнянь, маємо $u_0 = L(\omega)$.

Підставимо в рівняння (2.249) і (2.250) значення $z = z_{k-1}$, тоді з урахуванням (2.251) одержимо систему

$$\begin{aligned} u_{k-1} &= a_k + b_k; \\ \sigma_{k-1} &= i\omega\gamma_k(a_k - b_k). \end{aligned} \qquad (2.253)$$

Далі в рівняння (2.249) і 2.250) підставимо $z = z_k$ і знайдемо значення u_k і σ_k:

$$\begin{aligned} u_k &= a_k e^{i\omega\Delta\tau} + b_k e^{-i\omega\Delta\tau} = (a_k + b_k)\cos(\omega\Delta\tau) + \\ &+ i(a_k - b_k)\sin(\omega\Delta\tau); \\ \sigma_k &= i\omega\gamma_k[i(a_k + b_k)\sin(\omega\Delta\tau) + (a_k - b_k)\cos(\omega\Delta\tau)]. \end{aligned} \qquad (2.254)$$

Із системи (2.253) дістанемо $(a_k + b_k)$ і $(a_k - b_k)$ і підставимо їх у (2.254), що дає можливість виразити u_k і σ_k через u_{k-1} і σ_{k-1}. Одержаний результат зручно записати в матричній формі:

$$\begin{pmatrix} u_k \\ \sigma_k \end{pmatrix} = P_k \begin{pmatrix} u_{k-1} \\ \sigma_{k-1} \end{pmatrix}, \tag{2.255}$$

де матриця

$$P_k = \begin{bmatrix} \cos(\omega \Delta \tau) & \dfrac{\sin(\omega \Delta \tau)}{\omega \gamma_k} \\ -\omega \gamma_k \sin(\omega \Delta \tau) & \cos(\omega \Delta \tau) \end{bmatrix}. \tag{2.256}$$

Співвідношення (2.255) справедливе для $k = 1, 2, \ldots, n$, тому

$$\begin{pmatrix} u_n \\ \sigma_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_0 \\ \sigma_0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} L(\omega) \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{2.257}$$

де $A = P_n, P_{n-1}, \ldots, P_1$.

Оскільки ми розглядаємо півпростір, то в останньому z-шарі висхідної хвилі немає, тоді

$$\begin{aligned} u(t,z) &= b_{n+1} \exp\left[-i\omega \frac{(z-H)}{\upsilon_{n+1}}\right] \vec{k}, \quad z \geq H; \\ \sigma_z(t,z) &= i\omega \gamma_{n+1} b_{n+1} \exp\left[-i\omega \frac{(z-H)}{\upsilon_{n+1}}\right] = i\omega \gamma_{n+1} u(t,z), \end{aligned} \tag{2.258}$$

де γ_{n+1} – акустична жорсткість при $z \geq H$.

Звідси маємо

$$\sigma_n = \sigma(t,H) = -i\omega \gamma_{n+1} u_n. \tag{2.259}$$

Підставимо (2.258) і (2.259) у (2.260) і розпишемо одержане рівняння в поелементній формі:

$$\begin{aligned} u_n &= A_{11} L(\omega) - A_{12}; \\ i\omega \gamma_{n+1} u_n &= A_{21} L(\omega) - A_{22}, \end{aligned} \tag{2.260}$$

де $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ – елементи матриці A.

Розв'язавши систему рівнянь (2.260), маємо

$$L(\omega) = \frac{A_{22}(\omega) + i\omega \gamma_{n+1} A_{12}(\omega)}{A_{21}(\omega) + i\omega \gamma_{n+1} A_{11}(\omega)}. \tag{2.261}$$

Таким чином, спектральна характеристика $L(\omega)$ визначається набором величин $\gamma_k = \gamma(k\Delta\tau)$, тому найбільше, чого можна досягти, спостерігаючи за переміщенням середовища, це знайти залежність акустичної жорсткості від часу поширення поздовжньої хвилі.

Запишемо матрицю P_k, (2.256) так:

$$P_k = \frac{1}{2}\exp(i\omega\Delta\tau)\begin{pmatrix} 1+s & \frac{1}{i\omega}\frac{(1-s)}{\gamma_k} \\ i\omega\gamma_k(1-s) & (1+s) \end{pmatrix}, \qquad (2.262)$$

де $s = \exp(-2i\omega\Delta\tau)$.

Із виразу (2.262) випливає структура матриці A:

$$A = \frac{1}{2^n}\exp(i\omega n\Delta\tau)\begin{pmatrix} B_{11}^{(n)}(s) & \frac{1}{i\omega}B_{12}^{(n)}(s) \\ i\omega B_{21}^{(n)}(s) & B_{22}^{(n)}(s) \end{pmatrix}, \qquad (2.263)$$

де $B_{11}^{(n)}(s), B_{12}^{(n)}(s), B_{21}^{(n)}(s), B_{22}^{(n)}(s)$ – поліноми степеня n по s.

Із формули (2.263) маємо важливий наслідок. Дійсно, якщо підставити (2.263) у (2.261), то спектральну характеристику $L(\omega)$ можна представити у вигляді

$$L(\omega) = (i\omega)^{-1}L_1(\omega), \qquad (2.264)$$

де $L_1(\omega) = \dfrac{B_{22}^{(n)}(s) + \gamma_{n+1}B_{12}^{(n)}(s)}{B_{21}^{(n)}(s) + \gamma_{n+1}B_{11}^{(n)}(s)}$ (тут $L_1(\omega)$ є періодичною функцією з періодом $\dfrac{\pi}{\Delta\tau}$, оскільки $s = \exp(-2i\omega\Delta\tau)$ і має цей період).

Хвилі напруг $\exp[i\omega(t - \dfrac{z}{\upsilon_1})]$, яка поширюється в першому шарі, відповідає хвиля переміщення

$$-\frac{1}{i\omega\gamma_1}\exp[i\omega(t - \frac{z}{\upsilon_1})]. \qquad (2.265)$$

Це означає, що $-\gamma_1 L(\omega)$ є спектральною характеристикою середовища відносно збурення заданого переміщення.

Оцінку коефіцієнтів $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n+1}$ зручніше будувати на імпульсній характеристиці $F_\Delta(t)$, яка відповідає спектру (2.264). Дійсно, $F_\Delta(t)$ є сумою δ-функцій, котрі слідують одна за одною з інтервалом $2\Delta\tau$, який утворює множина всіх однократних і багатократних хвиль при посиланні в $(t+1)$-шарове середовище δ-хвилі $\delta(t-\frac{z}{\upsilon_1})$ з одиничною амплітудою:

$$F_\Delta(t) = \sum_{P=1}^{\infty} l_p \delta(t - 2p\Delta\tau), \tag{2.266}$$

де A_j – амплітуда імпульсної характеристики в момент часу $j\Delta\tau$ (при непарному j амплітуда $A_j = 0$).

Якщо $w_k^{(j)}$ і $\upsilon_k^{(j)}$ є амплітудами відповідно висхідної й низхідної δ-хвиль, які поширюються в k-му шарі при $(j-1)\Delta t < t \le j\Delta t$, то з фізичних міркувань випливає таке:

$$\begin{aligned} w_k^{(j)} &= 0, \quad \text{якщо} \quad j \le k; \\ \upsilon_k^{(j)} &= 0, \quad \text{якщо} \quad j < k. \end{aligned} \tag{2.267}$$

Амплітуди $\upsilon_1^{(j+1)}$ і $-w_1^{(j)}$ зв'язані співвідношенням

$$\upsilon_1^{(j+1)} = -w_1^{(j)}; \; j = 2,3,... \tag{2.268}$$

Дійсно, коефіцієнт відбиття від вільної межі

$$(\rho_0\upsilon_0 - \rho_1\upsilon_1)/(\rho_0\upsilon_0 + \rho_1\upsilon_1) = -1, \quad \text{тому що } \rho_0 = 0. \tag{2.269}$$

Беручи до уваги, що додатному значенню $w_k^{(j)}$ відповідає переміщення вгору, а додатному значенню $\upsilon_k^{(j)}$ – переміщення вниз, маємо

$$A_j = w_1^j - \upsilon_1^{j+1} = 2w_1^j, \tag{2.270}$$

звідси $w_1 = \frac{1}{2}A_j; \; j = 2,3,...$ (2.271)

Крім того, $\upsilon_1^{(1)} = 1$, оскільки $\upsilon_1^{(1)}$ – амплітуда імпульсу, що посилається в середовище.

Амплітуда $w_1^{(2)}$ збігається з коефіцієнтом відбиття на першій межі

$$A_1 = \frac{(\gamma_2 - \gamma_1)}{(\gamma_2 + \gamma_1)}. \qquad (2.272)$$

Алгоритм розрахунків послідовності коефіцієнтів відбиття A_1, A_{k-1}, A_N є інверсією відомого алгоритму Баранова – Кюнетца, який застосовується для побудови синтетичних діаграм. Він випливає з того, що будь-яка *k*-амплітуда

$$w_k^{(j)} \quad (j = k+1,...) \text{ і } \upsilon_k^{(j)} \ (j = k, k+1,...), \qquad (2.273)$$

а також коефіцієнти відбиття на межі $z = z_k$ однозначно визначаються набором величин

$$A_1,\ldots, A_{k-1},\ w_{k-1}^{(j)} \ (j > k-1) \quad \text{і} \quad \upsilon_{k-1}^{(j)} \ (j \geq k-1). \qquad (2.274)$$

Дійсно, як видно з рис. 2.4, для будь-якого моменту часу з номером $(j+1)$ висхідна хвиля в $(k-1)$-му шарі утворюється при відбитті на межі $z = z_k$ вниз падаючої хвилі $\upsilon_{k-1}^{(j)}$ і заломленні на цій самій межі висхідної хвилі $w_k^{(j)}$ із *k*-го шару. На $(k+1)$-й межі (при поширенні її знизу) маємо коефіцієнт заломлення

$$2\gamma_k / (\gamma_{k-1} + \gamma_k) = 1 + A_{k-1}, \qquad (2.275)$$

отже,

$$w_{k-1}^{(j-1)} = A_{k-1}\upsilon_{k-1}^{(j)} + (1 + A_{k-1})w_k^{(j)} \qquad (2.276)$$

або при розв'язанні відносно $w_k^{(j)}$ дістаємо

$$w_k^{(j)} = \frac{w_{k-1}^{(j+1)} - A_{k-1}\upsilon_k^{(j)}}{1 + A_{k-1}}. \qquad (2.277)$$

Оскільки послідовність амплітуд $\upsilon_1^{(1)}, \upsilon_2^{(2)}, ..., \upsilon_k^{(k)}$ описує хвилю, яка поширюється вниз, то

$$\upsilon_1^{(k)} = (1 - A_{k-1})\upsilon_{k-1}^{(k-1)}, \qquad (2.278)$$

де $(1 - A_{k-1})$ – коефіцієнт заломлення на межі $z = z_{k-1}$ при розповсюдженні її зверху.

Визначимо тепер амплітуду $\upsilon_k^{(j)}$ хвиль, що поширюється вниз у k-му шарі при $(j-1)\Delta t < t \le j\Delta t$. Вони утворюються за рахунок відбиття і заломлення на межі $z = z_{k-1}$ хвилі $w_k^{(j)}$ і за рахунок заломлення на тій самій межі хвилі $\upsilon_{k-1}^{(j)}$:

$$\upsilon_k^{(j)} = A_{k-1}\omega_k^{(j-1)} + (1 - A_{k-1})\upsilon_{k-1}^{(j-1)}; \quad j = (k+1),(k+2),... \quad (2.279)$$

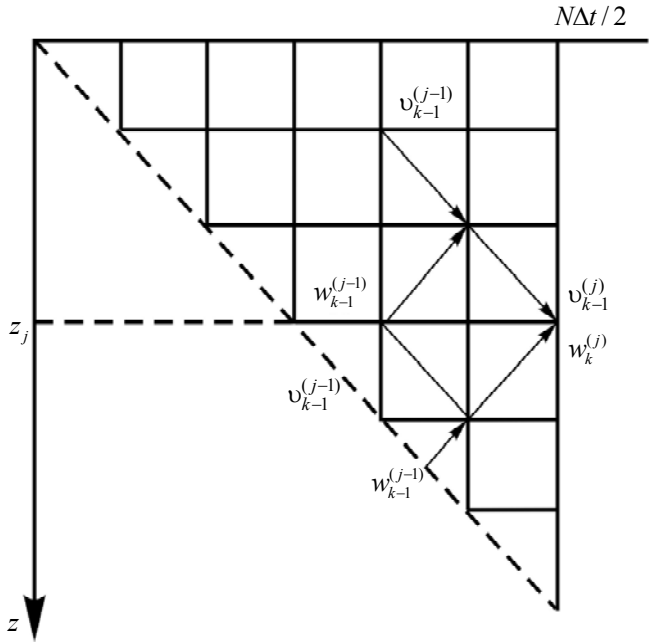


Рис. 2.4. Схема поширення хвиль у шаруватому геологічному середовищі

Одержана послідовність формул визначає всі амплітуди $w_k^{(j)}$ ($j>k$) і $\upsilon_k^{(j)}$ ($j \le k$). Оскільки хвиля $w_k^{(k+1)}$ утворюється при відбитті хвилі $\upsilon_k^{(k)}$ від межі $z = z_k$, то $w_k^{(k+1)} = A_k \upsilon_k^{(k)}$, звідки

$$A_k = w_k^{(k+1)} / \upsilon_k^{(k)}. \quad (2.280)$$

Для обчислення A_N необхідно знати амплітуду $w_N^{(N+1)}$, яка у свою чергу залежить від $w_{N-1}^{(N+2)}$ і т. д. до $w_1^{(2N)} = l_{2n}$.

Таким чином, величини A_1, A_{k-1}, A_N однозначно визначаються першими N-ненульовими відліками імпульсної характеристики. Зрозуміло, що будь-яка сукупність чисел (l_{2p} $(p=1,2,...,N)$) може служити першими відліками імпульсної характеристики $(N+1)$-шаруватого середовища. Наприклад, при $l_2 > 2$ одержуємо $A_1 > 1$, що неможливо.

Отримані результати приводять до деяких очевидних суперечностей. Дійсно, застосування спектральної характеристики дозволяє знайти величини $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{N+1}$, водночас застосування імпульсної характеристики дає лише коефіцієнти A_1, A_{k-1}, A_N, що рівнозначно знаходженню відношень γ_2/γ_1, $\gamma_3/\gamma_1, ..., \gamma_{N+1}/\gamma_1$. Але тут немає ніякої суперечності. Спектральна характеристика використовується відносно таких аспектів: "дія – напруги", а імпульсна характеристика відносно аспектів "дія – переміщення".

Зазначимо, що жодне реальне геологічне середовище не може мати імпульсну характеристику типу (2.266). Насамперед, унаслідок наявності сейсмічних меж сингулярні складові не можуть мати сталий інтервал $2\Delta\tau$, зумовлений лише детальністю апроксимації середовища. Крім того, неоднорідності геологічного шару мають різний масштаб (тонко- або товстошаруваті) і всередині шарів пружні властивості змінюються безперервно.

Тому постає питання, чи можна взагалі застосовувати таку апроксимацію до реальних сейсмограм? Розглянемо це питання детальніше. Дійсно, структуру імпульсної характеристики (2.266) зумовлено тим, що збурення типу δ-функції має нескінченно малу довжину хвилі, тому реагує на як завгодно малі за характерним масштабом неоднорідності. Будь-який реальний сигнал скінченної тривалості буде по-різному реагувати на неоднорідності різного масштабу. При достатньо малих $\Delta\tau$ такий сигнал практично не реагує на окремі межі, які з'явилися в процесі кусково-однорідної апроксимації (або точніше кусково-квазіоднорідної апроксимації). Тому апроксимація буде тим точніша, чим менше Δt. Із цього випливає твердження: якщо деяка функція $f(t)$, яка описує збурення, є достатньо гладкою функцією, то при $\Delta\tau \to 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} l_{\Delta}(t-\tau) f(\tau) d\tau \to x(t), \tag{2.281}$$

при цьому $l_{\Delta}(t)$ не прямує до $l(t)$.

Тому застосовувати таку апроксимацію в принципі можна, якщо підібрати такий сигнал $f_0(t)$, для якого

$$x_0^{(\Delta)}(2p\Delta\tau) = l_{2p}, \tag{2.282}$$

де $x_0^{(\Delta)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} l_{\Delta}(t-\tau) f_0(\tau) d\tau.$ (2.283)

Тобто, вимірюючи відгук

$$x_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} l(t-\tau) f_0(\tau) d\tau, \tag{2.284}$$

можна приблизно оцінити l_k, оскільки при достатньо малих $\Delta\tau$ $x_0^{(\Delta)}(t) \approx x_0(t)$.

Тому, щоб оцінити функцію $x_0(t)$ зі спостережуваної сейсмограми $x(t)$, спочатку необхідно знайти оператор G_0, який задовольняє умову

$$G_0[x(t)] = x_0(t), \tag{2.285}$$

або, взяти до уваги визначення функцій $x(t)$ і $x_0(t)$:

$$G_0 L[f(t)] = L[f_0(t)], \tag{2.286}$$

Розгорнувши це рівняння за допомогою оператора інтегральної згортки, знаходимо інтегральне рівняння, яке визначає характеристику фільтра G_0:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_0(t-\tau) f(\tau) d = f_0(t). \tag{2.287}$$

Спектральна характеристика $G_0(\omega)$ визначається з умови

$$G_0(\omega) L(\omega) S(\omega) = \begin{cases} L(\omega), & \text{якщо } |(\omega)| \le \pi / 2\Delta\tau; \\ 0, & \text{якщо } |(\omega)| > \pi / 2\Delta\tau. \end{cases} \tag{2.288}$$

Звідки

$$G_0(\omega)=\begin{cases}1/S(\omega), & \text{якщо} \quad |(\omega)|\le \pi/\Delta\tau;\\ 0, & \text{якщо} \quad |(\omega)|>\pi/\Delta\tau.\end{cases} \tag{2.289}$$

Тут $S(\omega)$ – спектр вхідного сигналу.

Розв'язування оберненої задачі зводиться до визначення за відліками $x_0(t)$, які апроксимують імпульсну характеристику $l(t)$, залежності коефіцієнта відбиття від часу поширення поздовжньої хвилі по вертикалі. Складний характер залежності між відліками $x_0(t)$ і коефіцієнтами відбиття хвилі зумовлений наявністю кратних хвиль. Якщо вплив кратних хвиль послаблений, то для гладкого вхідного імпульсу $f(t)$ можна одержати імпульсну характеристику вертикально-неоднорідного середовища.

Однократно відбита хвиля від межі $z=z_k$ (з урахуванням удвічі більшої амплітуди коливань на вільній межі) дорівнює

$$-2A_k\prod_{j=1}^{k-1}(1+A_j)(1-A_j)f(t-2k\Delta\tau), \tag{2.290}$$

де $(1+A_j)$, $(1-A_j)$ – коефіцієнти заломлення хвиль на проміжних межах.

Тоді

$$x_\Delta(t)-=-2\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\Delta\tau}A(k\Delta\tau)\prod_{j=1}^{k-1}(1-A_j{}^2)f(t-2k\Delta\tau). \tag{2.291}$$

Якщо записати коефіцієнт A_k у вигляді $A(k\Delta\tau)$, то одержану суму можна розглядати як інтегральну за змінною τ :

$$x_\Delta(t)-=2\sum_{k=1}^{N}A_k\prod_{j=1}^{k-1}(1-A_j{}^2)f(t-2k\Delta\tau), \tag{2.292}$$

де $A(k\Delta\tau)=\dfrac{\gamma[(k+1)\Delta\tau]-\gamma(k\Delta\tau)}{\gamma[(k+1)\Delta\tau]+\gamma(k\Delta\tau)}.$ (2.293)

Якщо $\Delta\tau\to 0$, то

$$A(k\Delta\tau)\cong\frac{\Delta\gamma(k\Delta\tau)}{2\gamma(k\Delta\tau)}\to 0, \tag{2.294}$$

тоді

$$\prod_{j=1}^{k-1}(1-A_j{}^2)\to 1;\quad \frac{A(k\Delta\tau)}{\Delta\tau}\to\frac{1}{2\gamma(\tau)}\frac{d\gamma(\tau)}{d\tau}. \qquad (2.295)$$

Таким чином,

$$x_\Delta(t)\to x(t)=-A\int_0^{\tau^*}\frac{d[\ln\gamma(\tau)]}{d\tau}f(t-2\tau)d\tau, \qquad (2.296)$$

де $\tau^*=\int_0^H\frac{dz}{\upsilon_p(z)}$. (2.297)

Унаслідок того, що при $\tau>\tau^*\gamma(\tau)=\text{const}$, верхню межу в інтегралі можна прийняти рівною ∞, тоді, здійснивши заміну змінних $u=2\tau$, одержимо

$$x(t)=-\int_0^{\infty}\frac{d[\ln\gamma_1(u)]}{du}f(t-u)du, \qquad (2.298)$$

де $\gamma_1(u)=\gamma(u/2)$.

Одержаний інтеграл є інтегралом типу згортки, тому до нього можна застосувати операцію комутативності, тоді маємо

$$x(t)=-\int_0^{\infty}\frac{d[\ln\gamma_1(t-u)]}{du}f(t-u)du, \qquad (2.299)$$

звідки імпульсна характеристика для однократних хвиль

$$l_1(t)=-\frac{d[\ln\gamma_1(t/2)]}{dt}. \qquad (2.300)$$

Таким чином, без урахування кратних відбиттів імпульсна характеристика вертикально-неоднорідного геологічного середовища збігається з логарифмічною похідною акустичної жорсткості. Функція $l_1(t)$ безпосередньо виражає зміну пружних властивостей вертикально-неоднорідного середовища.

Одержані залежності дуже ідеалізовані і при реалізації потребують коригування. Одним із суттєвих спрощень є припущення, що хвиля є плоскою. У дійсності хвилі, випромінювані сейсмічним джерелом, є сферичні, тому необхідно брати до уваги геометричне розходження фронту хвилі.

Імпульсна характеристика $l_1^{(s)}(t)$ для однократних хвиль з урахуванням геометричного розходження для межі розриву неперервності $z = z_k$ має такий вигляд:

$$l_1^{(s)}(t) = -\frac{\upsilon_p(0)}{2\int_0^{t/2} \upsilon_p^2(\tau)d\tau}\frac{d[\ln\gamma\ (t/2)]}{dt} + \sum_{(k)}\frac{A_k\upsilon_p(0)}{\int_0^{t_k/2} \upsilon_p^2(\tau)d\tau}\delta\ (t - t_k), \quad (2.301)$$

де

$$A_k = [\gamma\ (z_k + 0) - \gamma\ (z_k - 0)] / [\gamma\ (y_k + 0) + \gamma\ (y_k + 0)];$$

$$t_k = 2\int_0^{z_k} \frac{dz}{\upsilon_p(z)}; \qquad \upsilon = \upsilon_0(1 + \beta z); \quad (2.302)$$

$$\tau(z) = \int_0^z \frac{dz}{\upsilon_0(1+\beta z)} = \frac{1}{\upsilon_0\beta}\ln(1+\beta z), \quad 0 \le z \le H.$$

Якщо виразити z через $t = 2\tau$, то

$$1 + \beta z = \exp[\tfrac{1}{2}\beta\upsilon_0 t], \quad 0 \le t \le 2\tau^*, \quad (2.303)$$

де $\tau^* = \dfrac{1}{2\beta_0}\ln(1+\beta H)$.

Тоді, беручи до уваги, що

$$\upsilon_p^2(\tau) = \upsilon_p \exp[2\beta\upsilon_0\tau], \quad \upsilon_p(0) = \upsilon_0, \quad (2.304)$$

маємо

$$l_1^{(s)}(t) = -\frac{\beta^2\upsilon_0^2}{2[\exp(\beta\upsilon_0 t) - 1]}. \quad (2.305)$$

Таким чином, імпульсна характеристика для сферичної хвилі залежить не лише від акустичної жорсткості, а й від швидкості поздовжньої хвилі υ_p. Але це не означає, що з'явилася можливість визначення як $\upsilon_p(\tau)$, так і $\rho(\tau)$, тобто треба перейти до масштабу глибин $z = \tau\upsilon_p(\tau)$. Здійснивши кусково-однорідну апроксимацію, ми переконались, що $l_1^{(s)}(t)$ має лише N ненульових відліків. Зрозуміло, за їх допомогою не можна визначити $2N$ відліків $\rho(k\Delta\tau)$ і $\upsilon_p(k\Delta\tau)$.

2.5. Обернена динамічна задача для лінійно-непружного вертикально-неоднорідного геологічного середовища

Суттєвим фактором, який ускладнює вивчення реального геологічного середовища при динамічній інтерпретації сейсмограм є поглинання, що спричиняє не лише ослаблення амплітуди хвиль, але й зміни форми хвилі внаслідок сильнішого затухання високочастотних складових сейсмічного сигналу. У нелінійних моделях поняття імпульсних і спектральних характеристик втрачають свій зміст. Водночас для лінійно-непружної моделі (точніше, лінійної в'язкопружної моделі) можна узагальнити одержані результати, які стосуються спектральних характеристик.

Спочатку розглянемо задачу відбиття плоскої хвилі, яка падає на межу між двома однорідними лінійними в'язкопружними півпросторами з різними релаксаційними модулями. Тоді розв'язання у першому середовищі можна представити у вигляді суми падаючої і відбитої хвиль:

$$\{\exp[-i\omega\upsilon_1(\omega)z] - A\exp[i\omega\upsilon_1(\omega)z]\}\exp(i\omega t)\vec{k}, \qquad (2.306)$$

а в другому середовищі – у вигляді заломленої хвилі:

$$B\exp\{i\omega[t-\upsilon_2(\omega)z]\}\vec{k}. \qquad (2.307)$$

З умови неперервності переміщень на межі $z=0$ маємо

$$1-A=B, \qquad (2.308)$$

а з умови неперервності нормальних напруг одержимо

$$\gamma_1(\omega)(1+A)=\gamma_2(\omega), \qquad (2.309)$$

де $\gamma_k=\sqrt{\rho_k[\lambda_k(\omega)+\mu_k(\omega)]}$. (2.310)

Тоді з розв'язку цих рівнянь знаходимо

$$A=\frac{\gamma_2(\omega)-\gamma_1(\omega)}{\gamma_2(\omega)+\gamma_1(\omega)};\quad B=\frac{2\gamma_1(\omega)}{\gamma_1(\omega)+\gamma_2(\omega)}. \qquad (2.311)$$

Зауважимо, що $\lambda_k(\omega),\mu_k(\omega)$ – спектральні характеристики релаксаційних модулів, причому

$$\gamma_k(\omega)=\gamma_k'/k(\omega);\quad \upsilon_k(\omega)=k(\omega)/\upsilon_k', \qquad (2.312)$$

де $\gamma_k' = \rho_k \upsilon_k'$; $\upsilon_k' = \sqrt{(\lambda_k' + 2\mu_k')/\rho}$; $k(\omega) = \sqrt{(1 + i\omega\tau)/i\omega\tau}$;

υ_k' – швидкість поширення монохроматичної хвилі при $\omega \to \infty$.

Тоді вирази для відбитої і заломленої монохроматичних хвиль можна записати так:

$$A' \exp\left\{ i\omega \left[t + \frac{z}{\upsilon_1'} k(\omega) \right] \right\} \vec{k};$$
$$B' \exp\left\{ i\omega \left[t - \frac{z}{\upsilon_2'} k(\omega) \right] \right\} \vec{k}, \tag{2.313}$$

де A', B' – коефіцієнти відбиття, які залежать від $\rho_k, \lambda_k', \mu_k'$, а множник $\exp i\omega \left[\frac{z}{\upsilon_k'} k(\omega) \right]$, котрий визначає зміну форми хвилі, залежить лише від часу розповсюдження z / υ_k'.

Якщо в деякій довільній точці $z = -h$ падаюча хвиля має форму $f(t)$, то її монохроматична складова визначатиметься співвідношенням

$$s(\omega) \exp\left[-\frac{h}{\upsilon_1'} k(\omega) \right] \exp\left\{ i\omega \left[t - \frac{z}{\upsilon_1'} k(\omega) \right] \right\} \vec{k}. \tag{2.314}$$

Звідси випливає, що в цій самій точці $z = -h$ відбита хвиля визначається формулою

$$-A' f(t, \tau) \vec{k}, \tag{2.315}$$

$$f(t, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) \exp\left\{ i\omega \left[t - 2\tau k(\omega) \right] \right\} d\omega, \tag{2.316}$$

де

$$\tau = \frac{h}{\upsilon_1'}.$$

Зауважимо, що як і у випадку пружного середовища в $(n+1)$-шаруватому кусково-однорідному в'язкопружному середовищі зі сталою релаксацією τ форма хвиль, що зазнають скінченної кількості відбиттів і заломлень, залежить лише від часу

поширення, а амплітуда визначається коефіцієнтами відбиття і заломлення. Це свідчить про те, що сума всіх хвиль, які мають час прибуття $2p\,\Delta\tau$, дорівнює

$$l_{2p}{}'\,f(t,2p\Delta\tau), \tag{2.317}$$

де $l_{2p}{}'$ має той самий зміст, що й l_{2p} для пружного середовища, але тут замість μ_k і λ_k наявні $\mu_k{}'$ і $\lambda_k{}'$. Підсумовуючи за всіма p, знайдемо для сейсмічної траси, яка відповідає $(n+1)$-шаровій апроксимації,

$$x_\Delta(t) = \sum_{p=1}^{\infty} l_{2p}{}'\,f(t,2k\Delta\tau)\,. \tag{2.318}$$

Цю форму можна записати так:

$$x_\Delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} l_{2p}{}'\,\delta(\tau-2p\Delta\tau)\,f(t,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} l_\Delta{}'(\tau)\,f(t,\tau)\,d\tau, \tag{2.319}$$

де $l_\Delta{}'(t)$ – імпульсна характеристика середовищ.

Якщо $\tau\to 0$, то одержимо

$$x\ (t) = \int_{-\infty}^{\infty} l\ {}'(\tau)\,f(t,\tau)\,d\tau\,. \tag{2.320}$$

Таким чином, $x(t)$ є лінійне нестаціонарне перетворення функції $l_\Delta{}'(t)$, яка являє собою імпульсну характеристику лінійного в'язкопружного середовища. Якщо час релаксації τ відомий, то функція $f(t,\tau)$ може бути визначена для всіх τ і задача зводиться до розв'язування лінійного інтегрального рівняння (2.320). Але тепер оператор, який здійснює перетворення $x(t)$ і $l_\Delta{}'(t)$, є нестаціонарним. Тому метод оберненої фільтрації в цьому випадку не дає.

РОЗДІЛ 3
Теоретичні та методичні основи AVO-аналізу й інверсії

За результатами сейсмічних досліджень встановлено, що в геологічних розрізах із молодими теригенними відкладами спостерігаються різні закономірні зміни амплітуд відбитих хвиль. У випадку нормального падіння сейсмічної хвилі на відбиваючу межу "покрівля–колектор" це явище може зумовлюватись наявністю вуглеводнів, зокрема, газонасичених пісків. Метод, який ґрунтувався на припущенні існування прямої залежності відбиваючої здатності сейсмічних хвиль від наявності вуглеводнів, одержав назву методу "яскравої плями" ("bright spot"). Подальше практичне застосування цього методу засвідчило, що не завжди різні зміни амплітуд відбитих сейсмічних хвиль на сейсмічних розрізах однозначно свідчать про наявність насичених вуглеводнями колекторів в осадових розрізах. Зокрема, з'ясувалося, що амплітудні аномалії відбитих сейсмічних хвиль можуть зумовлюватися літологічними змінами та іншими причинами.

Для подолання неоднозначності методу "яскравої плями" із середини 80-х років минулого сторіччя за кордоном почав інтенсивно розвиватися новий підхід – AVO-аналіз, який ґрунтується на кількісному вивченні амплітуд відбитих сейсмічних хвиль не по сейсмічних розрізах, а по сейсмограмах. Основною моделлю AVO-аналізу є шарувата модель із горизонтальною межею, яка розділяє два суцільні середовища з різною густиною і швидкістю поширення сейсмічних хвиль.

Прямою задачею AVO-аналізу є визначення залежності коефіцієнта відбиття сейсмічних хвиль від кута падіння хвилі на відбиваючу межу, якщо відома густина і швидкість поширення пруж-

них хвиль у шарах та кут падіння падаючої хвилі. Розглянемо задачу відбиття і заломлення пружних хвиль на плоскій межі двох ідеально пружних, однорідних, ізотропних середовищ. Першу спробу постановки і розв'язання задачі відбиття і заломлення пружних хвиль на межі двох середовищ зроблено в 1839 році Гріном, який не завершив алгебраїчних перетворень, необхідних для випадку, коли два півпростори мають різні пружні модуль і густину. Узагальнив цю задачу (за допомогою потенціалів) англійський учений Кнотт у 1888 році. Він побудував систему рівнянь, яка описує амплітуду й енергію відбитих і заломлених хвиль, окремо – для випадку падіння поздовжньої хвилі і випадку падіння поперечної хвилі. Одержана система рівнянь дозволила встановити рівняння балансу енергії падаючих, відбитих і заломлених хвиль. Незалежно від нього в 1907 році Цьоппрітц також отримав вихідні рівняння для амплітуд та енергії відбитих і заломлених хвиль на межі двох середовищ. Саме ці рівняння були в подальшому покладені в основу AVO-аналізу.

3.1. Пряма задача AVO-аналізу

Для спрощення розв'язання прямої задачі AVO-аналізу обмежимося випадком падіння на відбиваючу межу плоскої монохроматичної пружної хвилі. Зрозуміло, що таке припущення дещо звужує область застосування AVO-аналізу, але дозволяє уникнути впливу сейсмічного джерела на характеристику амплітуд відбитих хвиль.

Якщо сейсмоприймачі розташовані на значних відстанях від джерела, то прийняте наближення можна розглядати як достатнє. У випадку, коли відбиття спостерігається в околі точкового джерела сферичної хвилі, для одержання необхідного розв'язку можна скористатися методом розвинення сферичних хвиль у ряд за плоскими хвилями, а потім підсумувати одержані результати для всіх плоских хвиль.

Розглянемо задачу про падіння на плоску межу R, яка розділяє два ізотропні півпростори плоскої поздовжньої хвилі P_1

(рис. 3.1). Нехай λ_1, μ_1, ρ_1 і λ_2, μ_2, ρ_2 – відповідно, пружні параметри Ламе і густина двох пружних ізотропних середовищ. Швидкості поздовжніх (V_P) і поперечних (V_S) хвиль цих середовищ визначаються із співвідношень:

$$V_{P1} = \sqrt{\frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho_1}}, \; V_{S1} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\rho_1}}, \tag{3.1}$$

$$V_{P2} = \sqrt{\frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\rho_2}}, \; V_{S2} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\rho_2}}. \tag{3.2}$$

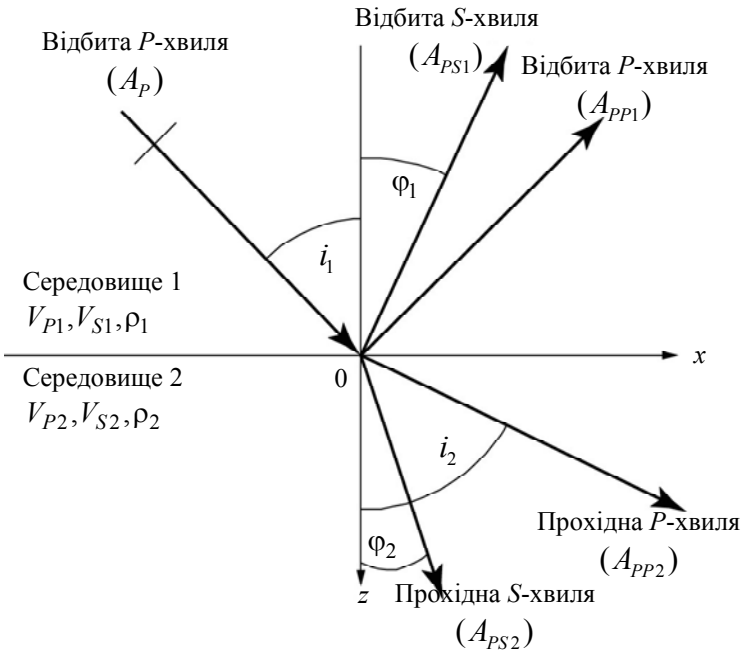


Рис. 3.1. Відбиті та прохідні хвилі для падаючої *P*-хвилі на поверхню між двома пружними ізотропними півпросторами

Виберемо ортогональну систему координат (x, y, z), площина (x,o,y) якої збігається з плоскою межею R, а вісь z направлена в бік другого півпростору.

Амплітуда плоскої монохроматичної гармонійної хвилі визначається співвідношенням

$$\vec{A}_P = \vec{A}_{P0} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{x})}, \tag{3.3}$$

де $\vec{\mathrm{A}}_{P0}$ – постійно діюча амплітуда хвилі; ω – колова частота; $\vec{k}$ – хвильовий вектор; $\vec{x}$ – декартові координати радіуса-вектора, який визначає відстань від джерела до будь-якої точки, розташованої на фронті хвилі; $\vec{n}$ – вектор хвильової нормалі.

Падаюча хвиля поширюється у площині (x, o, z) і хвильова нормаль колінеарна вектору пружних зміщень, тоді формулу для плоскої хвилі (3.3) можна записати в такому вигляді:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathrm{A}}_P &= \vec{\mathrm{A}}_{P0}\, e^{i\left(\omega t - \frac{z\cos i_1 - x\sin i_1}{\upsilon_{P1}}\right)};\\
A_{PP1} &= A_{P01} e^{i\omega\left(t - \frac{x\sin i_1 + z\cos i_1}{V_{P1}}\right)};\\
A_{PS1} &= A_{S01} e^{i\omega\left(t - \frac{x\sin \varphi_1 + z\cos \varphi_1}{V_{S1}}\right)};\\
A_{PP2} &= A_{P02} e^{i\omega\left(t - \frac{x\sin i_2 + z\cos i_2}{V_{P2}}\right)};\\
A_{PS2} &= A_{S02} e^{i\omega\left(t - \frac{x\sin \varphi_2 + z\cos \varphi_2}{V_{S2}}\right)},
\end{aligned} \tag{3.4}$$

де $\vec{\mathrm{A}}_{PP1}$, $\vec{\mathrm{A}}_{PS1}$ – амплітуди відбитих хвиль; $\vec{\mathrm{A}}_{PP2}$, $\vec{\mathrm{A}}_{PS2}$ – амплітуди прохідних хвиль.

Беручи до уваги, що розглядається ізотропне середовище, в якому вектор пружних зміщень колінеарний напрямку поширення пружної хвилі, а вектор поперечної хвилі нормальний цьому напрямку, то в подальшому при аналізі амплітуд будемо користуватися скалярними значеннями амплітуд різних типів хвилі. Але при цьому матимемо на увазі, що тут зберігається гармонійний закон зміни амплітуд із часом.

При падінні на межу *R* поздовжньої хвилі A_P виникають відбиті хвилі: поздовжня A_{PP1} і поперечна A_{PS1}, а також прохідні хвилі: поздовжня A_{PP2} і поперечна A_{PS2}. Відбиті A_{PS1} і A_{PS2}

поперечні хвилі називають *обмінними хвилями*. Заломлення на межі *R* взаємозв'язані, згідно із законом Снелліуса:

$$\frac{\sin i_1}{V_{P1}} = \frac{\sin i_2}{V_{P2}} = \frac{\sin \varphi_1}{V_{S1}} = \frac{\sin \varphi_2}{V_{S2}}, \qquad (3.5)$$

де i_1 – кут падіння поздовжньої хвилі A_P; i_2 – кут заломлення прохідної хвилі A_{PP2}; φ_1 – кут відбиття поперечної хвилі A_{PS1}; φ_2 – кут заломлення поперечної хвилі A_{PS2}.

Для визначення відносних амплітуд відбитих і прохідних хвиль, які утворилися при падінні поздовжньої хвилі, необхідно записати систему рівнянь, що задовольняє межові умови. Оскільки два півпростори жорстко зв'язані між собою вздовж відбиваючої поверхні *R*, то межові умови зводяться до неперервності таких чотирьох величин:

1) нормальних зміщень;
2) дотичних зміщень;
3) нормальних напруг;
4) дотичних напруг.

Тобто, для виконання межових умов необхідно, щоб у кожній точці відбиваючої поверхні в будь-який момент часу виконувалися співвідношення:

$$U_i^I + \sum_R U_i^R = \sum_T U_i^T, \qquad (3.6)$$

$$\sigma_i^I + \sum_R \sigma_i^R = \sum_T \sigma_i^T, \quad i = 1,2,3, \qquad (3.7)$$

де *I*, *R*, *T* – індекси, якими позначають, відповідно, падаючі, відбиті та прохідні хвилі; $\sigma_{ij} = \lambda \Delta \delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$ – тензор напруг для пружного ізотропного середовища; $\Delta = \varepsilon_{ii} = \dfrac{\partial U_i}{\partial x_i}$ – дилатація або згортка тензора деформацій ε_{ke}.

Напрямок зміщень хвиль збігається з напрямком поширення поздовжніх хвиль A_{PP1} і A_{PP2}, або перпендикулярний до нього для поперечних хвиль A_{PS1} і A_{PS2}. Обидві поперечні хвилі поляризовані лінійно у площині падіння, тобто у площині, яка перпендикулярна до відбиваючої межі *R* і до фронту хвилі A_P.

Для побудови системи рівнянь, яка задовольняє межові умови, треба знайти проекції амплітуд хвиль на координатні осі:

$$
\begin{aligned}
&u_P = A_P \cos i_1, \;\; w_P = -A_P \sin i_1, \\
&u_{PP1} = A_{PP1} \sin i_1, \;\; w_{PP1} = A_{PP1} \cos i_1, \\
&u_{PP2} = A_{PP2} \sin i_2, \;\; w_{PP2} = A_{PP2} \cos i_2, \\
&u_{PS1} = -A_{PS1} \cos \varphi_1, \;\; w_{PS1} = A_{PS1} \sin \varphi_1, \\
&u_{PS2} = A_{PS2} \cos \varphi_2, \;\; w_{PS2} = A_{PS2} \sin \varphi_2,
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

де u_P, u_{PP1}, u_{PP2}, u_{PS1}, u_{PS2} – проекції амплітуд, відповідно, падаючої, відбитої і прохідної поздовжніх хвиль та відбитої і прохідної поперечних хвиль на вісь *x*; w_P, w_{PP1}, w_{PP2}, w_{PS1}, w_{PS2} – проекції цих самих хвиль на вісь *z*.

Беручи до уваги межові умови (3.6) і (3.7), одержуємо систему рівнянь Цьоппрітца:

$$
\begin{aligned}
&A_{PP1} \sin i_1 - A_{PS1} \cos \varphi_1 + A_{PP2} \sin i_2 + A_{PS2} \cos \varphi_2 = A_P \cos i_1, \\
&A_{PP1} \cos i_1 + A_{PS1} \sin \varphi_1 - A_{PP2} \cos i_2 + A_{PS2} \sin \varphi_2 = -A_P \sin i_1, \\
&A_{PP1} Z_1 \cos 2i_1 - A_{PS1} F_1 \sin 2\varphi_1 - A_{PP2} Z_2 \cos 2i_2 - \\
&- A_{PS2} F_2 \sin 2\varphi_2 = -A_P \cos 2i_1, \\
&A_{PP1} \left(\frac{V_{S1}}{V_{P1}} \right) F_1 \sin 2i_1 + A_{PS1} F_1 \cos 2\varphi_1 + \\
&+ A_{PP2} \left(\frac{V_{S2}}{V_{P2}} \right) F_2 \sin 2i_2 - A_{PS2} F_2 \cos 2\varphi_2 = A_P \left(\frac{V_{S1}}{V_{P1}} \right) F_1 \sin 2i_1,
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

де $Z_K = \rho_K V_{PK}$, $F_K = \rho_K V_{SK}$, $K = 1,2$.

Добуток густини на швидкість поширення пружної хвилі називається *акустичною жорсткістю*. Для розв'язування прямої задачі AVO-аналізу необхідно знати густину і швидкість в кожному середовищі, які забезпечують розрахунки величин Z_1, Z_2, F_1, F_2. Якщо задано A_P й i_1, то з урахуванням закону Снелліуса (3.5) можна розрахувати $i_2, \varphi_1, \varphi_2$.

Таким чином, при заданих вище величинах лінійна система рівнянь стає замкненою. Її розв'язок дозволяє знайти невідомі амплітуди відбитих і прохідних хвиль – A_{PP1}, A_{PP2}, A_{PS1}, A_{PS2}.

У 1947 році В. Г. Гоголадзе параметричну систему рівнянь Цьоппрітца максимально спростив і одержав для дійсних коефіцієнтів відбиття і проходження такі співвідношення:

$$R_{PP1}=\frac{A_{PP1}}{A_P}=1-\frac{2}{R_{P1}}\begin{bmatrix} q\left(1-H-M_q\right)^2+\sqrt{(B-q)(D-q)}\left(1-M_q\right)^2 \\ +H\sqrt{(B-q)(C-q)} \end{bmatrix}; \qquad (3.10)$$

$$R_{PS1}=\frac{A_{PS1}}{A_P}=-\frac{2\sqrt{Cq(1-q)}}{R_{P1}}\begin{bmatrix} (1-H-M_q)(H+M_q) \\ +M\sqrt{(B-q)(D-q)}(1-M_q) \end{bmatrix}; \qquad (3.11)$$

$$R_{PP2}=\frac{A_{PP2}}{A_P}=\frac{2\sqrt{B(1-q)}}{R_{P1}}\left[\sqrt{C-q}\left(H+M_q\right)+\sqrt{D-q}\left(1-M_q\right)\right]; \qquad (3.12)$$

$$R_{PS2}=\frac{A_{PS2}}{A_P}=\frac{2\sqrt{Dq(1-q)}}{R_{P1}}\left[1-H-M\left(q+\sqrt{(B-q)(C-q)}\right)\right], \qquad (3.13)$$

де $R_{P1}=q\left(1-H-M_q\right)^2+\sqrt{(1-q)(C-q)}\left(H+M_q\right)^2+\sqrt{(B-q)(D-q)}\cdot$

$\cdot\left(1-M_q\right)^2+H\left(\sqrt{(1-q)(D-q)}\right)+M^2q\sqrt{(1-q)(B-q)(C-q)(D-q)};$

$M=2\left(\frac{1}{C}-\frac{H}{D}\right);\ q=\sin^2 i_1;\ B=\frac{V_{P1}^2}{V_{P2}^2};\ C=\frac{V_{P1}^2}{V_{S1}^2};\ D=\frac{V_{P1}^2}{V_{S2}^2};\ H=\frac{\rho_2}{\rho_1};$

V_{S1}, V_{S2} – поперечні хвилі першого і другого середовищ.

Як видно з наведених формул, у випадку $V_{P2}>V_{P1}$ член $\sqrt{B-q}$ при $q>B$ стає уявним. Це означає, що промінь PP_2 - хвилі не проникатиме у друге середовище при кутах падіння i_1, більших ніж $\arcsin\frac{V_{P1}}{V_{P2}}$. Аналогічно, якщо $V_{S2}>V_{P1}$ і $q>D$, то член $\sqrt{D-q}$ теж стає уявною величиною при $i_1>\arcsin\frac{V_{P1}}{V_{S2}}$.

3.2. Розподіл енергії при нормальному падінні хвилі

Розглянемо випадок, коли поздовжня хвиля падає на відбиваючу межу *R* під кутом $i_1 = 90^\circ$. Очевидно, у цьому разі тангенціальні зміщення й напруги відсутні, тобто, $A_{PS1} = A_{PS2} = 0$. Тоді система рівнянь Цьоппрітца суттєво спрощується і зводиться до системи двох рівнянь:

$$A_{PP1} + A_{PP2} = A_P,$$
$$Z_1 A_{PP1} - Z_2 A_{PP2} = -Z_1 A_P. \qquad (3.14)$$

Із розв'язання системи рівнянь можна знайти співвідношення:

$$\frac{A_{PP1}}{A_P} = \frac{\rho_2 V_{P2} - \rho_1 V_{P1}}{\rho_2 V_{P2} + \rho_1 V_{P1}} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = R, \qquad (3.15)$$

$$\frac{A_{PP2}}{A_P} = \frac{2\rho_1 V_{P1}}{\rho_2 V_{P2} + \rho_1 V_{P1}} = \frac{2Z_1}{Z_2 + Z_1} = T, \qquad (3.16)$$

де *R* – коефіцієнт відбиття хвилі, який називається відбиваючою здатністю сейсмічної межі; *T* – коефіцієнт проходження хвилі через відбиваючу межу.

Частки енергії відбитої E_R і прохідної E_T хвиль іноді називають коефіцієнтами відбиття і проходження хвилі. Їх величини визначаються формулами:

$$E_R = \frac{V_{P1}\rho_1\omega^2 A_{PP1}^2}{V_{P1}\rho_1\omega^2 A_P^2} = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}\right)^2 = R^2, \qquad (3.17)$$

$$E_T = \frac{V_{P2}\rho_2\omega^2 A_{PP2}^2}{V_{P1}\rho_1\omega^2 A_P^2} = \frac{4Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{Z_2}{Z_1} T^2. \qquad (3.18)$$

Неважко переконатися, що $E_R + E_T = 1$.

Якщо в рівняннях (3.17) і (3.18) Z_1 і Z_2 поміняти місцями, то кінцевий результат не зміниться. Таким чином, розподіл енергії не залежить від того, в якому середовищі знаходиться падаюча хвиля. Відбита енергія хвилі буде тим більшою, чим більше відношення акустичних жорсткостей відрізняється від одиниці.

Таблиця 3.1

Акустична жорсткість і коефіцієнти відбиття поздовжніх хвиль у типових сейсмічних розрізах осадових товщ

Типовий розріз осадової товщі	Перша товща		Друга товща		Відношення акустичної жорсткості Z_1/Z_2	Коефіцієнт відбиття R	Частка відбитої енергії E_R
	Швидкість поздовжньої хвилі, км/с	Густина, г/см^3	Швидкість поздовжньої хвилі, км/с	Густина, г/см^3			
Підошва зони малих швидкостей	0.5	1.5	2.0	2.0	0.19	0.68	0.47
Пісковик – вапняк	2.0	2.4	3.0	2.4	0.67	0.2	0.04
Вапняк – пісковик	3.0	2.4	2.0	2.4	1.5	–0.2	0
Глина – водонасичений пісок	2.0	2.3	2.5	2.3	0.96	0.02	10^{-4}
Глина – газонасичений пісок	2.4	2.3	2.2	1.8	1.39	–0.16	0.027
Газонасичений пісок – водонасичений пісок	2.2	1.8	2.5	2.3	0.69	0.18	0.034
Поверхня океану	1.5	1.0	0.36	0.0012	3800	–0.9894	0.9988

Зауважимо таке: незважаючи на те, що частки енергії E_R і E_T не залежать від того, з якого боку відносно межі падає хвиля, амплітуда відбитої хвилі A_{PP1} при перестановці Z_1 і Z_2 змінює знак відношення A_{PP1} / A_P. Від'ємне значення A_{PP1} означає, що відбита хвиля зсунута на 180° відносно падаючої хвилі. Інверсія фази відбувається у випадку, коли Z_1 перевищує Z_2.

У табл. 3.1. наведено дані про акустичну жорсткість та коефіцієнти відбиття поздовжніх хвиль для розрізів земної кори. Як видно з цих даних, водна поверхня океану і підошва зони малих швидкостей суттєво вирізняються відбиваючими властивостями. Від таких меж відбивається значно більше енергії поздовжньої хвилі і тому вони відіграють особливо важливу роль у формуванні багатократних

хвиль. На більшості меж осадових товщ різниці густини і швидкості різних літологічних типів порід відносно невеликі, тому на таких межах відбивається відносно невелика частка енергії. Як правило, відбита енергія складає менше 1 % загальної енергії.

3.3. Розподіл енергії між хвилями при похилому куті падіння *P*-хвилі на відбиваючу межу

Розглянемо загальний випадок, коли кут падіння поздовжньої хвилі змінюється від 0° до 90°. Беручи до уваги очевидний факт, який випливає з рівнянь (3.10) – (3.13), на розподіл енергії між хвилями може впливати велика кількість параметрів, серед яких виділимо такі: 1) відношення швидкостей поздовжніх хвиль у шарах V_{P2}/V_{P1}; 2) відношення густини в шарах ρ_2/ρ_1; 3) відношення швидкостей поперечних хвиль у шарах V_{S2}/V_{S1} або їх еквівалента – коефіцієнтів Пуассона в шарах (ν_1, ν_2).

На рис. 3.2 зображено залежність розподілу енергії між хвилями від кута падіння поздовжньої хвилі на відбиваючу межу для моделей із різними співвідношеннями петрофізичних параметрів у шарах.

Розглянемо випадок $V_{P1} > V_{P2}$, коли падаючий промінь хвилі міститься в шарі зі швидкістю, більшою ніж у шарі, який залягає нижче відбиваючої межі. Як видно з рис. 3.2, *а*, для моделі з параметрами: $V_{P2}/V_{P1} = 0{,}5$, $\rho_2/\rho_1 = 0{,}8$, $\nu_1 = 0{,}3$, $\nu_2 = 0{,}25$ при малих кутах падіння вся енергія розподіляється між відбитими і прохідними *P*-хвилями (відповідно E_{RP1} *і* E_{TP2}), а *S*-хвилі практично відсутні. При збільшенні кута падіння хвилі частина енергії переходить також і до відбитих і прохідних *S*-хвиль (відповідно E_{RS1} *і* E_{TS2}), в основному за рахунок відбитої *P*-хвилі. Зауважимо, що при проміжних кутах падіння хвилі відбита *S*-хвиля переносить більше енергії, ніж відбита *P*-хвиля.

При наближенні до критичних кутів, тобто до ковзного падіння, енергія відбитих *P*-хвиль зростає доти, поки при ковзному падінні вся енергія не буде зосереджена у відбитих *P*-хвилях.

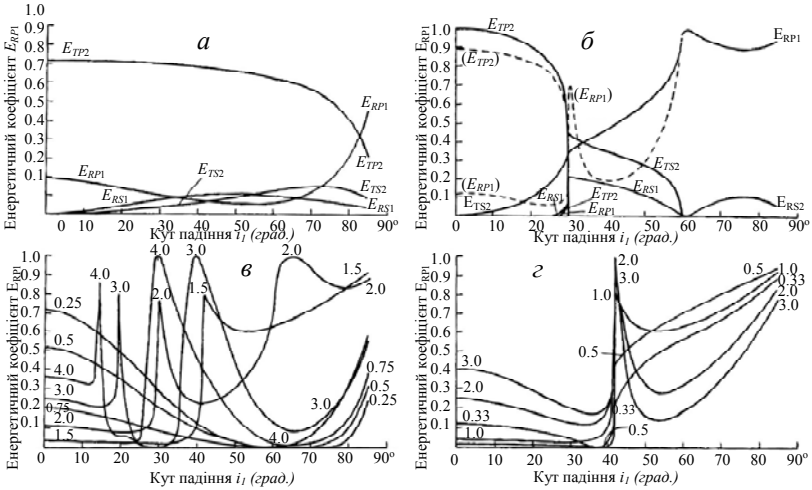


Рис. 3.2. Залежність розподілу енергії між відбитими і прохідними хвилями від кута падіння поздовжньої хвилі на відбиваючу межу:

E_{TP2} – частка енергії у прохідній хвилі A_{PP2}, E_{RP1} – частка енергії у відбитій хвилі A_{PP1}, E_{TS2} – частка енергії у прохідній хвилі A_{PS2}, E_{RS1} – частка енергії у відбитій хвилі A_{PS1}; *а* – випадок $V_{P1} > V_{P2}$: параметри моделі з такими відношеннями поздовжніх швидкостей і густини: $V_{P2}/V_{P1} = 0.5$, $\rho_2/\rho_1 = 0.8$, $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 0.25$; *б* – випадок $V_{P1} < V_{P2}$: $V_{P2}/V_{P1} = 2.0$, $\rho_2/\rho_1 = 0.5$, $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 0.25$; пунктиром позначено криві, для яких $\rho_2/\rho_1 = 1.0$; *в* – випадок із різними значеннями відношень V_{P2}/V_{P1} в шарах та $\rho_2/\rho_1 = 1$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.25$; *г* – випадок із різними значеннями відношень густини ρ_2/ρ_1 в шарах та $V_{P2}/V_{P1} = 1.5$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.25$

У випадку $V_{P1} < V_{P2}$ падаючий промінь (рис. 3.2, *б)* міститься в шарі зі швидкістю, меншою ніж у шарі, який залягає нижче відбиваючої межі. Прийняті петрофізичні параметри цієї моделі такі: $V_{P2}/V_{P1} = 2.0$, $\rho_2/\rho_1 = 0.5$, $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 0.25$. Як видно з наведених даних, при малих кутах падіння хвилі, унаслідок рів-

ності $Z_1 = Z_2$, коефіцієнт відбиття *P*-хвилі практично близький до нуля. При збільшенні кута падіння *P*-хвилі зростає енергія *S*-хвиль. При наближенні до критичного кута падіння енергія прохідної *P*-хвилі падає до нуля і при значних кутах падіння прохідної хвилі не існує. Водночас при досягненні критичного кута падіння для *P*-хвилі інтенсивність відбитих *P*- і *S*-хвиль значно зростає. Різке зростання інтенсивності відбитих хвиль розглядається як свідчення появи закритичних відбиттів. При досягненні критичного кута падіння для *S*-хвиль зникають прохідні *S*-хвилі.

Для моделі, в якій густина обох шарів не відрізняється одна від одної, а всі інші параметри, які наведені на рис. 3.2, *б* мають ті самі значення, повинна існувати відбита *P*-хвиля при малих кутах падіння (як показано на рис. 3.2, *б* пунктирною кривою), відносна енергія якої повільно зменшуватиметься зі збільшенням кута падіння.

На рис. 3.2, *в* показано графіки зміни коефіцієнтів відбиття *P*-хвилі при різних значеннях відношення V_{P2}/V_{P1}, але однакових параметрах густини $(\rho_1 = \rho_2)$ і коефіцієнтів Пуассона $(\nu_1 = \nu_2)$ шарів. Відбита енергія дорівнює нулю, якщо $V_{P2}/V_{P1} = 0$ (акустичні жорсткості шарів одинакові), але вона зростає при значеннях V_{P2}/V_{P1} як більших, так і менших одиниці. Причому, якщо $V_{P2} > V_{P1}$, то спостерігається два максимуми при критичних кутах для *P*- і *S*-хвиль відповідно.

В області незначних кутів падіння (до 30°) поведінка коефіцієнтів відбиття *P*-хвиль істотно залежить від співвідношення швидкостей V_P/V_S (або коефіцієнтів Пуассона) покриваючої та підстеляючої товщ. За умови, що значення V_P/V_S для обох середовищ близькі, то коефіцієнти відбиття в цьому діапазоні кутів близькі до коефіцієнтів відбиття для нормального падіння. Однак, якщо V_P/V_S для двох контактуючих середовищ різні, то поведінка коефіцієнта відбиття може відрізнятися від випадку для нормального падіння. На рис. 3.3 наведено графіки для моделей, в яких змінюються лише відношення V_{P2}/V_{S2} (або коефіцієнти Пуассона) підстеляючого середовища. Для підстеляючого середовища ефект зміни коефіцієн-

та Пуассона ν_1 може спричинити різке зростання або зменшення коефіцієнта відбиття при незначних кутах падіння. Він стає більш виразним у міру того, як контраст швидкостей стає меншим. Подібні ефекти спостерігаються, якщо відношення V_{P2}/V_{S2} для нижнього середовища сталі, але змінюються для верхнього.

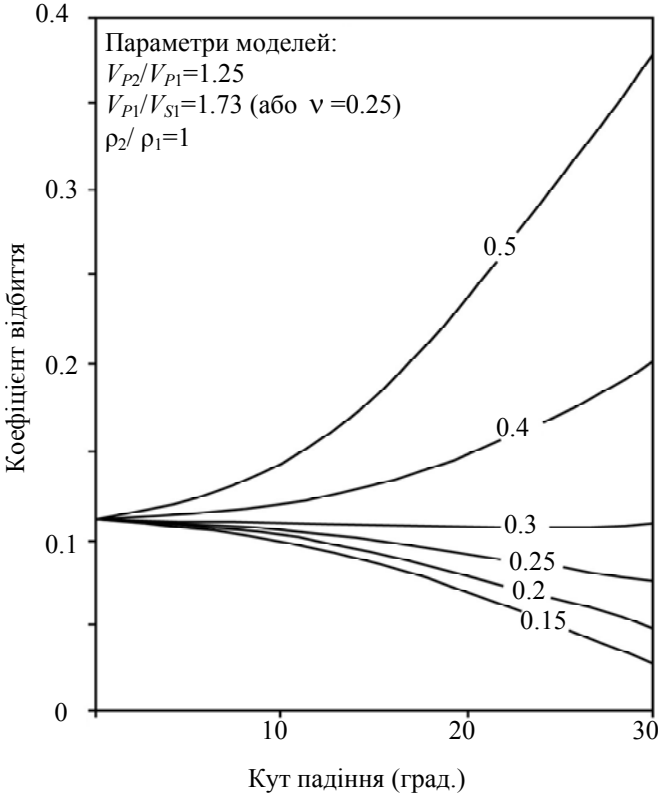


Рис. 3.3. Залежність коефіцієнта відбиття (R_P) ***P*-хвилі від кута падіння на межу для моделей, які відрізняються лише відношенням** V_{P2}/V_{S2} **(або коефіцієнтом Пуассона** ν_2**) підстеляючогошару** (на кривих зображено величини ν_2)

Детальний аналіз закономірностей поведінки функції коефіцієнта відбиття $R_P(\theta)$ для поздовжніх хвиль свідчить, що ця функ-

ція залежить не лише від контрасту густини і швидкості шарів на відбиваючій межі, але й від співвідношення швидкості поздовжніх хвиль та швидкості поперечних хвиль (V_P / V_S), тому що при збільшенні кута падіння θ все більша частка енергії падаючої поздовжньої хвилі (пропорційна відношенню V_P / V_S) витрачається на формування обмінних поперечних хвиль типу *PS*.

Співвідношення V_P / V_S можна розглядати як найбільш інформативну характеристику літологічного складу та характеру насичення гірських порід. Достатньо очевидно, що його визначати краще сучасними методами багатохвильової сейсморозвідки. Водночас більше 95 % усіх польових робіт на нафту і газ здійснюється лише шляхом застосування поздовжніх хвиль, тому використання для розв'язання цієї задачі обмінних хвиль вважається найбільш перспективним.

3.4. Апроксимації рівняння Цьоппрітца для коефіцієнта відбиття поздовжніх хвиль

Беручи до уваги, що система рівнянь Цьоппрітца в параметричній формі виявилася не повною мірою придатною для AVO-аналізу, були спроби звести її до спрощеного вигляду, в якому співвідношення V_P / V_S (або коефіцієнт Пуассона ν) були записані у вигляді компоненти, яку можна було б легко визначити й аналізувати.

Один із шляхів розв'язання цієї задачі полягає в розвиненні рівняння Цьоппрітца для *P*-хвилі в степеневий тригонометричний ряд із подальшим нехтуванням членами ряду, які дають несуттєвий внесок у функцію $R_P(\theta)$ та відокремленням цільових параметрів за степенями косинусів падіння θ.

Характерною особливістю всіх наближень, які широко практично застосовуються, є їх лінійність відносно так званих параметрів контрастів ($\Delta V_P / V_P$, $\Delta V_S / V_S$, $\Delta\rho / \rho$) швидкостей і густини на відбиваючій межі. Членами цих контрастів із більш висо-

кими степенями нехтують. Це означає, що така апроксимація справедлива лише у випадку слабоконтрастних середовищ, якщо $\Delta V_P / V_P << 1$, $\Delta V_S / V_S << 1$ і $\Delta\rho / \rho << 1$. Крім цього, у таких лінійних апроксимаціях кратні хвилі до уваги не беруть.

Для апроксимацій, в основі яких лежить розвинення за тригонометричною функцією $\sin\theta$, розрізняють два варіанти. Перший: при розвиненні в ряд рівняння Цьоппрітца обмежуються лише трьома членами при $\sin\theta$ із парними степенями 0,2 і 4. Така апроксимація справедлива лише для кутів падіння $\theta \le 60^\circ$.

У другому випадку обмежуються лише двома членами розвинення при $\sin\theta$ зі степенями 0 і 2. Цей випадок апроксимації справедливий лише для кутів $\theta \le 40^\circ$.

Для тричленних апроксимацій рівняння Цьоппрітца найбільш відомі змішані апроксимації Акі – Річардса і Шуе. Вираз для апроксимації Акі – Річардса має вигляд

$$R(\Theta) = R_0 + G\sin^2\theta + C\frac{\sin^4\theta}{\cos^2\theta}, \qquad (3.19)$$

де $R_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta V_P}{V_P} + \frac{\Delta\rho}{\rho}\right)$ – коефіцієнт відбиття при нормальному падінні хвилі $(\theta = 0^\circ)$; $G = \frac{1}{2}\frac{\Delta V_P}{V_P} - 4\frac{V_S^2}{V_P^2}\left(\frac{\Delta V_S}{V_S} + \frac{1}{2}\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)$ – градієнт залежності $R(\theta)$ при $\theta = 0^\circ$, який називають AVO-градієнтом; $C = \frac{1}{2}\frac{\Delta V_P}{V_P}$ – так звана AVO-кривина; $\Delta V_P = V_P^{(2)} - V_P^{(1)}$; $\Delta V_S = V_S^{(2)} - V_S^{(1)}$; $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$; $V_P^{(1)}, V_S^{(1)}, \rho_1$ – швидкості поздовжніх і поперечних хвиль та густина в першому шарі (вище межі); $V_P^{(2)}$, $V_S^{(2)}$, ρ_2 – швидкість поздовжніх і поперечних хвиль та густина у другому шарі (нижче межі).

Апроксимація Шуе одержана перегрупуванням деяких членів та введенням коефіцієнта Пуассона:

$$R(\Theta) = R_0 + \left[DR_0 + \frac{\Delta\nu}{(1-\nu)^2} \right] \sin^2\theta + \frac{1}{2}\frac{\Delta V}{V_P}\left(\mathrm{tg}^2\theta - \sin^2\theta\right), \qquad (3.20)$$

де $D = D_1 - 2(1+D_1)(1-2\nu)/(1-\nu)$, тут $D_1 = \dfrac{\Delta V_P / V_P}{\Delta V_P / V_P + \Delta\rho/\rho}$.

Двочленні апроксимації рівняння Акі – Річардса одержують завдяки нехтуванню атрибутом кривини C. Вони справедливі лише при незначних кутах падіння хвилі, тому що величина третього члена з параметром кривини C швидко зростає з ростом кута θ і при $\theta >> 35^\circ$ стає домінуючою, у тому числі й над першим членом розвинення рівняння.

Відома двочленна апроксимація рівняння Цьоппрітца, яка запропонована Шуе:

$$R(\Theta) = R_0 + \left[\frac{1}{2}\frac{\Delta V}{V_P} - 4\frac{V_S^2}{V_P^2}\left(\frac{\Delta V_S}{V_S} + \frac{\Delta\rho}{\rho} \right) \right] \sin^2\theta. \qquad (3.21)$$

Це рівняння ілюструє принципові можливості AVO-аналізу в наглядній графічній формі. Дійсно, якщо графічно побудувати цю двочленну апроксимацію Шуе у вигляді залежності $R(\Theta) = f(\sin^2\theta)$, то вона являтиме собою пряму лінію з кутовим коефіцієнтом G ("AVO-градієнт"), яка відсікає на осі $\sin^2\theta$ відрізок R_0 ("AVO-інтерсепт"). Зазначимо, що параметри лінійної двочленної апроксимації R_0 і G фактично залежать від чотирьох параметрів геологічного середовища, які включають три диференціальні параметри $\dfrac{\Delta V}{V_P}, \dfrac{\Delta V_S}{V_S}, \dfrac{\Delta\rho}{\rho}$ і співвідношення V_S / V_P. Це означає, що при відомих двох параметрах R_0 і G можна визначити лише два параметри геологічного середовища. AVO-аналіз в рамках двочленної апроксимації називають двопараметричним AVO-аналізом. При цьому нехтують диференціальними параметрами, які характеризують стрибки швидкості поздовжніх і поперечних хвиль та густини на відбиваючій межі.

Наведені вище апроксимаційні рівняння Акі – Річардса з точністю до сталого множника в AVO-аналізі розглядаються як мо-

делі амплітуд відбиттів на сейсмограмах загальної точки відбиття (ЗТВ), але при виконанні таких умов: по-перше, сейсмограми як функції віддалення "джерело–приймач" перераховані у функції кута падіння θ шляхом трасування променів (рис. 3.4); по-друге, амплітуди трас відкориговані згідно з геометричним розходженням фронту хвилі, а також виконані процедури сейсмічного зносу (тобто, виконується міграція до підсумовування). Останнє забезпечує відсутність зміни часу кожного відбиття на сейсмограмі загальної точки відбиття із заданими просторовими координатами при зміні кута θ. Вважається також, що сейсмічний імпульс не змінюється при зміні кута θ та відсутні регулярні завади.

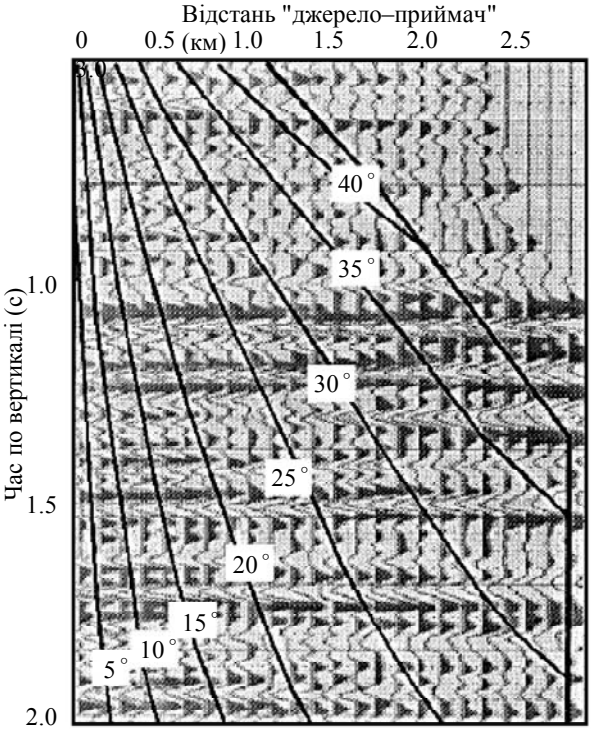


Рис. 3.4. Перехід від сейсмограми, яка представлена як функція відстані сейсмічне "джерело–приймач" до функції кута падіння (на кривих кути позначено в градусах як їх параметри) шляхом трасування променів

Таким чином, двопараметричний AVO-аналіз по суті зводиться до перетворення вхідних сейсмограм $U(x,y,\theta,t)$ у траси атрибутів AVO-аналізу $a(x,y,\theta,t)$.

Наступним кроком є інверсія атрибутів AVO-аналізу в параметри літології, пористості, насичення шарів. Цей етап розв'язування оберненої задачі AVO-аналізу називають "AVO-інверсією".

3.5. Основні атрибути AVO-аналізу

Відповідно до умовних позначень, які прийняті в рівняннях апроксимації коефіцієнтів відбиття хвиль у шаруватому геологічному середовищі, параметри AVO-аналізу називають атрибутами AVO-аналізу. Виділимо серед них ті, які найчастіше застосовуються у процесі AVO-аналізу сейсмічних даних:

1) A – атрибут, який називають AVO-інтерцептом, котрий є (з точністю до сталого множника R_0 / A) коефіцієнтом відбиття R_0;

2) B – атрибут, який називають AVO-градієнтом, котрий з точністю до сталого множника являє собою величину G, тобто, тангенс кута нахилу прямої, яка осереднює залежність $R(\sin^2\theta)$ у заданому діапазоні кутів θ;

3) $A_{Vp} = \dfrac{\Delta V_P}{V_P}$ – атрибут, який характеризує відбиваючі властивості шаруватого геологічного середовища при поширенні поздовжніх хвиль;

4) $A_{Vs} = \dfrac{\Delta V_S}{V_S}$ – атрибут, який характеризує відбиваючі властивості шаруватого геологічного середовища при поширенні поперечних хвиль;

5) $PKP = \dfrac{\Delta V_P}{V_P} - \dfrac{\Delta V_S}{V_S}$ – атрибут, який називається псевдокоефіцієнтом Пуассона;

6) $\Delta F = \frac{\Delta V_P}{V_P} - 1{,}16\frac{V_S}{V_P}\frac{\Delta V_S}{V_S}$ – атрибут, який називається флюїд-фактор.

Варті уваги такі відомості: при визначенні атрибутів використовуються диференціальні параметри $\frac{\Delta V}{V_P}, \frac{\Delta V_S}{V_S}, \frac{\Delta\rho}{\rho}$, які засвідчують очевидний факт про те, що в AVO-аналізі розглядаються амплітуди відбитих хвиль, які являють собою диференціальний елемент сейсмічного запису, котрий визначається не абсолютними значеннями швидкостей і густини, а відносним контрастом (стрибком) цих параметрів на відбиваючій межі.

Визначимо фізичний зміст атрибута, який одержав назву псевдокоефіцієнта Пуассона. Відомо, що відношення V_S / V_P залежить функціонально від коефіцієнта Пуассона ν середовища:

$$\frac{V_S^2}{V_P^2} = \frac{(1-2\nu)}{\lambda(1-\nu)}. \tag{3.22}$$

Якщо розглядати диференціал відношення $\Delta\frac{V_S}{V_P}$, то можна одержати тотожність

$$\frac{\Delta(V_P / V_S)}{(V_P / V_S)} = \frac{\Delta V_P}{V_P} - \frac{\Delta V_S}{V_S}. \tag{3.23}$$

Отже, можна стверджувати, що відношення V_P / V_S за своєю інформативністю еквівалентне коефіцієнту Пуассона, що дає підстави різницю $\frac{\Delta V_P}{V_P} - \frac{\Delta V_S}{V_S}$ назвати псевдокоефіцієнтом Пуассона.

Атрибут флюїд-фактора ΔF, який одержаний шляхом перетворення лінійної залежності між поздовжньою і поперечною хвилями для аргіліто-глинистих порід ("mudrock line"):

$$V_P = 1{,}16V_S + 1{,}36 \tag{3.24}$$

підставимо у формулу з $\Delta V_P / V_P$ і $\Delta V_S / V_S$, а саме,

$$\Delta F = \frac{\Delta V_P}{V_P} - 1{,}16\frac{V_S}{V_P}\frac{\Delta V_S}{V_S}. \tag{3.25}$$

Перший член цього співвідношення $\Delta V_P / V_P$ можна розглядати як результат лінійної апроксимації величини $\Delta V_P / V_P$ по величині $\Delta V_S / V_S$ за даними лінійної залежності для аргіліто-глинистих порід (mudrock line). Для всіх водонасичених піщано-глинистих порід рівняння (3.21) відображає яскраво виражений глобальний тренд, а лінія для "сухих" порід в системі координат (V_S, V_P) зміщується відносно mudrock line (рис. 3.5). Отже, величина ΔF на інтервалі піщано-глинистих порід при їх водонасиченні повинна прямувати до нуля, а при газонасиченні – має бути суттєво менше нуля при відбитті хвилі від покрівлі газонасиченого шару. На розрізі сейсмічного атрибута флюїд-фактора ΔF на ділянках шару, де поровим флюїдом є вода, значення цього флюїд-фактора має бути близьким до нуля, але покрівля й підошва відображатимуться відмінними від нуля значеннями. Термін "флюїд-фактор" показує можливість визначення за величиною ΔF характеру насичення і дає підстави розглядати його як засіб для прямих пошуків нафти й газу. Цілком зрозуміло, що при практичному застосуванні слід опиратися на залежність між V_P і V_S, яка встановлена за експериментальними даними для регіону досліджень. Це означає, що сталі величини, які входять у лінійні рівняння, необхідно відповідним чином замінити на основі реальних залежностей.

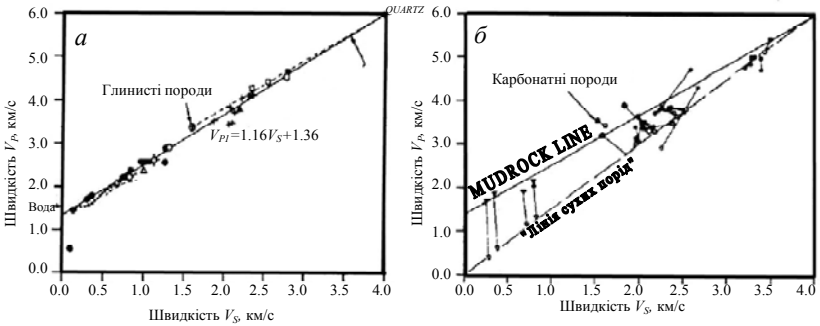


Рис. 3.5. Залежність між V_P і V_S для піщано-глинистих порід:

а – водонасичені породи ("mudrock line" $V_P = 1{,}16V_S + 1{,}36$);

б – водонасичені (залиті чорним точки) і сухі породи (світлі точки)
Різні форми точок означають результати досліджень різних авторів

Порівнюючи атрибути *PKP* і ΔF , можна переконатися, що атрибут флюїд-фактор є по суті атрибутом ΔF із масштабованими складовими $\Delta V_S / V_S$.

Зображення середовища в атрибутах AVO-аналізу будують підсумовуванням сейсмограм із ваговими коефіцієнтами, які відповідають умовам двопараметричної параметризації. Дійсно, якщо замінити

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{1}{4}\frac{\Delta V_P}{V_P} \tag{3.26}$$

відповідно глобальним трендом для густини і швидкості, то залежність $A(\theta)$ можна представити в такому вигляді:

$$A(\theta) = C_i \frac{\Delta V_P}{V_P} - D_i \frac{\Delta V_S}{V_S}, \tag{3.27}$$

де $C_i = \frac{5}{8} - \frac{1}{2}\frac{V_S^2}{V_P^2}\sin^2\theta$, $D_i = -4\frac{V_S^2}{V_P^2}\sin^2\theta$, $i = 1,2,\ldots,n$. Тут n – кількість трас сейсмограми загальної точки відбиття для діапазону кутів відбиття хвилі $0^\circ < \theta < 40^\circ$, у межах якого справедлива двопараметрична апроксимація.

В одержаному співвідношенні для $A(\theta)$ (3.27) компоненти $\Delta V_P / V_P$ і $\Delta V_S / V_S$ відповідають відлікам зображення, яке необхідно знайти, у формі, що відповідає цьому атрибуту, а коефіцієнти C_i і D_i не залежать ні від цих відліків, ні від вихідних сейсмограм, тому що вони є параметрами прийнятої моделі.

Систему рівнянь (3.27), при $n = 30 - 40$, можна розглядати як перевизначену систему рівнянь, розв'язок якої можна шукати методом найменших квадратів. Найкращі в мінімально-квадратичному сенсі оцінки компонент $\Delta V_P / V_P$ і $\Delta V_S / V_S$ для кожного відліку часу одержують стандартним чином як вагові суми відліків A_i усіх *n*-трас вхідної сейсмограми ЗТВ на цьому інтервалі часу *t*:

$$\frac{\Delta V_P}{V_P} = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{C_i \sum_{j=1}^{n}(D_j^2) - D_i \sum_{j=1}^{n}(C_i D_j)}{\sum_{j=1}^{n}(C_j^2)\sum_{j=1}^{n}(D_j^2) - \left[\sum_{j=1}^{n}(C_i D_j)\right]^2}, \qquad (3.28)$$

$$\frac{\Delta V_S}{V_S} = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{D_i \sum_{j=1}^{n}(C_j^2) - C_i \sum_{j=1}^{n}(C_i D_j)}{\sum_{j=1}^{n}(C_j^2)\sum_{j=1}^{n}(D_j^2) - \left[\sum_{j=1}^{n}(C_i D_j)\right]^2}. \qquad (3.29)$$

Інші атрибути AVO-аналізу, включаючи інтерцепт A і градієнт G, визначають аналогічним чином, або ж обчислюють як лінійні комбінації інших атрибутів – наприклад, тих самих A і B.

Відповідальним етапом при розв'язуванні системи рівнянь (3.27) є вибір значень коефіцієнтів C_i і D_j. В існуючих технологіях їх визначають за даними глобальних трендів для водонасичених піщано-глинистих порід. Це означає, що апріорні дані заздалегідь визначають і наявність властивостей таких трендів і в одержаних внаслідок аналізу AVO-атрибутів.

Наприклад, якщо очікування значення атрибута флюїд-фактора для водонасичених піщано-глинистих порід дорівнює нулю. Тоді відповідно, якщо той чи інший геологічний об'єкт проявляє в зображенні цього атрибута властивості, які не збігаються з оцінками прогнозів за даними трендових залежностей $V_P = tV_S$ для цього атрибута, то в кінцевому результаті це означає:

1) або маємо справу не з водонасиченою породою;

2) або ця порода не є піщано-глинистою;

3) або в реальних водонасичених піщано-глинистих породах ділянки досліджень глобальні тренди мають суттєво інші коефіцієнти.

Методична гнучкість щодо реалізації можливостей AVO-аналізу проявляється у можливості вибрати таку форму зображення атрибута, в якій власний тренд даного атрибута не лише відповідає знайденим трендовим залежностям, але й надає можливість кількісних оцінок. Далі переконаємося, що такою формою зображення є кросплот між певними парами атрибутів.

За допомогою двопараметричної апроксимації можна визначити сейсмічні атрибути AVO-аналізу, які в подальшому використовуються для оцінювання літології, колекторних властивостей і характеру насичення.

Зрозуміло, що за таких зазначених вище обмежень одержати задовільні результати можна не завжди. Основні труднощі полягають у тому, що прийняті спрощені моделі можуть суттєво відрізнятися від реального геологічного розрізу району досліджень. Крім того, цільові ефекти від зміни літології, пористості й насичення можуть бути значно меншими ніж вплив завад і факторів, які ускладнюють прямі залежності, – тонкошаруватість, похибки врахування розходження фронту хвилі в умовах структурної й літологічної неоднорідності розрізу, анізотропія та ін. Для подолання цих недоліків розробляються нові теоретичні підходи і технології AVO-аналізу.

3.6. Альтернативні атрибути AVO-аналізу

Основним параметром сейсмічних атрибутів AVO-аналізу безумовно є відношення V_P / V_S. Це відношення розглядається як інформативний індикатор варіацій літологічного складу й типу флюїдонасичення. Швидкість сейсмічних хвиль є важливим кінематичним параметром, який безпосередньо вимірюється в сейсморозвідці. Рівняння Цьоппрітца, апроксимації якого застосовуються в AVO-аналізі, одержано з урахуванням неперервності напруг і переміщень на межі двох ізотропних шарів. У рівняння, які описують межі умови, безпосередньо входять параметри Ламе λ і μ та густина ρ. Причому, параметр Ламе λ не має прозорого фізичного змісту, але входить до залежності між модулем стискання K пружного ізотропного середовища і параметрами Ламе:

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \qquad (3.30)$$

Для ідеально пружної рідини $\mu = 0$ і $K = \lambda$, тобто параметр Ламе λ збігається з модулем об'ємного стискання рідини.

Припускають, що інформативність параметрів Ламе щодо змін літології порід достатньо висока, тобто, така сама як для відношення V_P / V_S. Це дає підстави для апроксимації рівняння Цьоппрітца скористатися комплексними параметрами $\lambda\rho$ і $\mu\rho$. Крім того, ці комплексні параметри можна розрахувати з акустичних імпедансів: для поздовжніх хвиль $I = \rho V_P$, для поперечних хвиль $J = \rho V_S$. Для розрахунку користуються очевидними співвідношеннями

$$J^2 = \rho\mu, \ \lambda\rho = I^2 - 2J^2,$$

які випливають із відомих співвідношень теорії пружності: $\rho V_P^2 = \lambda + 2\mu$ і $\rho V_S^2 = \mu$.

Акустичні імпеданси знаходять стандартним способом при обробці сейсмограм ЗТВ методом найменших квадратів.

Рівняння для апроксимації коефіцієнта відбиття в цьому випадку можна представити у вигляді

$$R(\Theta) = \frac{\Delta I}{2I}\left(I + \mathrm{tg}^2\Theta\right) - 8\frac{J^2}{I^2}\frac{\Delta I}{2I}\sin^2\Theta - \frac{\Delta\rho}{\rho}\left(\mathrm{tg}^2\Theta - 4\frac{J^2}{I^2}\sin^2\Theta\right). \quad (3.31)$$

Одержане наближення для коефіцієнта відбиття називають модель лямбда-мю-ро.

У рамках стандартних обмежень знаходимо формули для основних атрибутів AVO-аналізу:

$$\frac{\Delta(\lambda\rho)}{2\lambda\rho} = 4\frac{\Delta I_P}{2I_P} - 2\frac{\Delta I_S}{2I_S} = 3R_0 + G, \quad (3.32)$$

$$\frac{\Delta(\mu\rho)}{2\mu\rho} = 2\frac{\Delta I_S}{2I_S} = 2(R_0 - G). \quad (3.33)$$

Неважко переконатися, що при переході від стрибків швидкостей V_P і V_S на межі до стрибків добутків параметрів Ламе на густину на межі, в апроксимації рівняння для коефіцієнтів відбиття з'явилися члени, в які добутки параметрів Ламе на густину входять у другому степені. Це означає, що така формула забезпечує більш контрастне розрізнення колекторів за типом насичення, а при однаковому насиченні – і за величиною пористості.

Можна побудувати апроксимаційне рівняння для коефіцієнтів відбиття, в якому враховуються безпосередньо стрибки модулів

пружності, а саме, $\Delta K / 2K$ – модуля об'ємного стискання, модуля зсуву $\Delta\mu / 2\mu$ та модуля густини $\Delta\rho / 2\rho$:

$$R(\Theta) = \frac{\Delta K}{2K}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\frac{V_S^2}{V_P^2}\right)\frac{1}{\cos^2\Theta} + \frac{\Delta\mu V_S^2}{2\mu V_P^2}\left(\frac{2}{3}\frac{1}{\cos^2\Theta} - 4\sin^2\Theta\right) + \\ + \frac{\Delta\rho}{2\rho}\left(1 - \frac{2}{3}\frac{1}{2\cos^2\Theta}\right). \tag{3.34}$$

Використання цієї трійки атрибутів має певні переваги, зокрема, відношення сигнал/завада при оцінюванні μ вдвічі вище, ніж при оцінці $\mu\rho$, а при оцінці K – майже в чотири рази вище, ніж при оцінці $\lambda\rho$. Модулі μ і K дозволяють уникнути неоднозначності, яка є в парних добутках $\mu\rho$ і $\lambda\rho$, через наявність у них густини, котра визначається в трипараметричних моделях з найменшою стійкістю.

3.7. AVO-кросплот

Кожну пару сейсмічних атрибутів AVO-аналізу можна представити у формі кросплота. Найпростішою моделлю базового кросплота $[A_0, G]$ є лінійна залежність

$$G = a + bR_0, \tag{3.35}$$

яка справедлива в діапазоні кутів падіння приблизно $5^\circ \le \theta \le 40^\circ$.

Для базової моделі AVO-аналізу, з урахуванням обмежень глобальних "mudrock line" трендів, які зв'язують V_P, V_S і ρ однозначною залежністю, коефіцієнти a і b у випадку водонасичених піщано-глинистих порід мають такі значення:

$$a = 0,\ b = \frac{4}{5}\left(1 - \frac{V_S^2}{V_P^2} - 6{,}9\frac{V_S}{V_P}\right). \tag{3.36}$$

Беручи до уваги знайдені значення коефіцієнтів a і b (3.36), маємо для водонасичених теригенних порід $b = 0$, якщо $R_0 = 0$.

Оскільки для більшості випадків $0{,}3 < (V_S / V_P) < 0{,}7$, то кутовий коефіцієнт b глобального фонового тренда кросплота $[A, B]$, як правило, від'ємний і зростає за абсолютною величиною при збільшенні відношення V_S / V_P. Лише при дуже малих значеннях відношення V_S / V_P (неконсолідовані відклади) кутовий коефіцієнт може стати додатним (рис. 3.6).

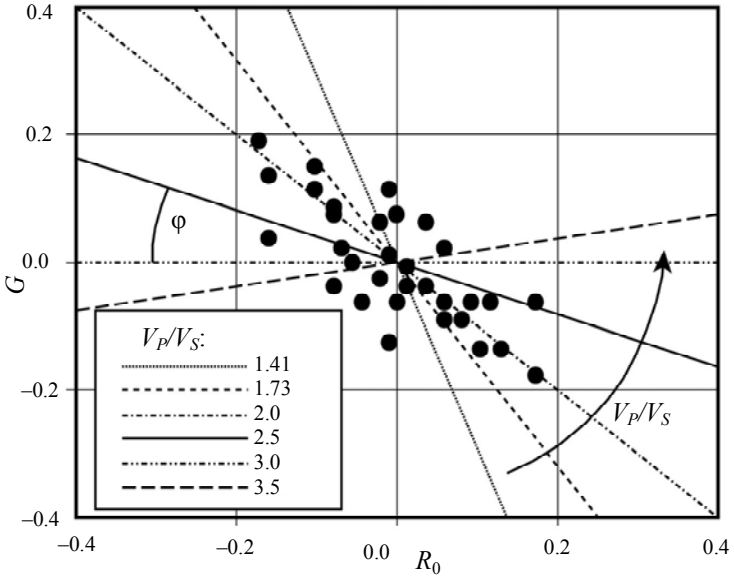


Рис. 3.6. Лінія фонового тренда для випадку $V_P / V_S = \text{const}$ **і виконанні умови (3.36) при** $0.3 < (V_S / V_P) < 0.7$

Для точок лінії фонового тренда атрибут флюїд-фактор ΔF можна визначити, користуючись залежністю

$$\Delta F = A \sin \varphi + B \cos \varphi, \qquad (3.37)$$

де φ – кут нахилу лінії фонового тренда (рис. 3.6).

Глобальний петрофізичний тренд для A і B зазвичай від'ємний, але в загальному випадку може бути й додатний.

Проте зовсім інший характер зміщення точок кросплота викликає зміна пружності породи у випадку заміщення пластової води газом. Для відбиттів від покрівлі шару, в якій вода змінила-

ся на газ, точки кросплота зміщуються в бік зменшення B і A (рис. 3.7). Ці зміщення визначають так звані флюїдні вектори, – стрілки на рис. 3.7. Довжина векторів пропорційна ступеню зменшення об'ємного модуля стиснення K породи-колектора. Точки кросплота, що зміщуються, утворюють сукупність із трендом, який майже паралельний фоновому тренда. Але цей тренд уже не проходить через початок координат кросплота. Відбиття від підошви колектора у випадку зростання модуля пружності K зміщуються в бік збільшення G і A_0 на величину, яка пропорційна збільшенню модуля пружності при водонасиченні заміщення води нафтою і викликає значно менше спадання модуля пружності, ніж заміщення газом (рис. 3.8).

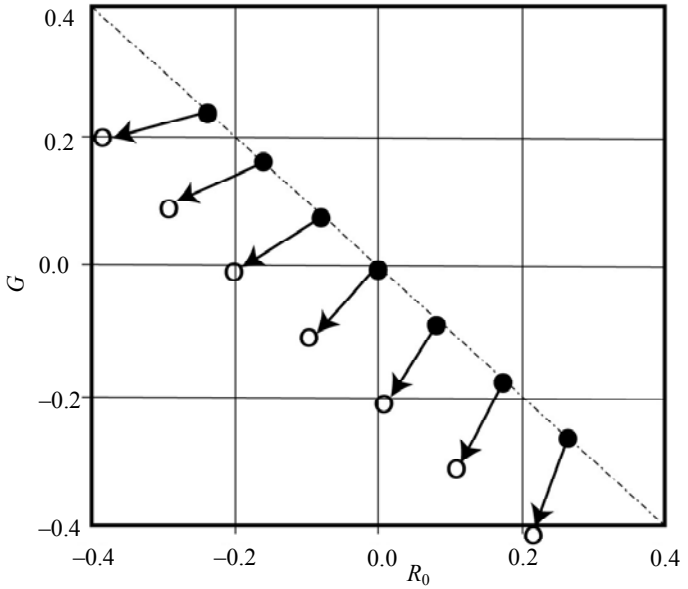


Рис. 3.7. Відхилення точок кросплота від лінії фонового тренда при зменшенні акустичної жорсткості породи-колектора внаслідок заміщення пластової води нафтою (газом) або через зміну літології для випадку відбиття від "покрівлі–колектора"

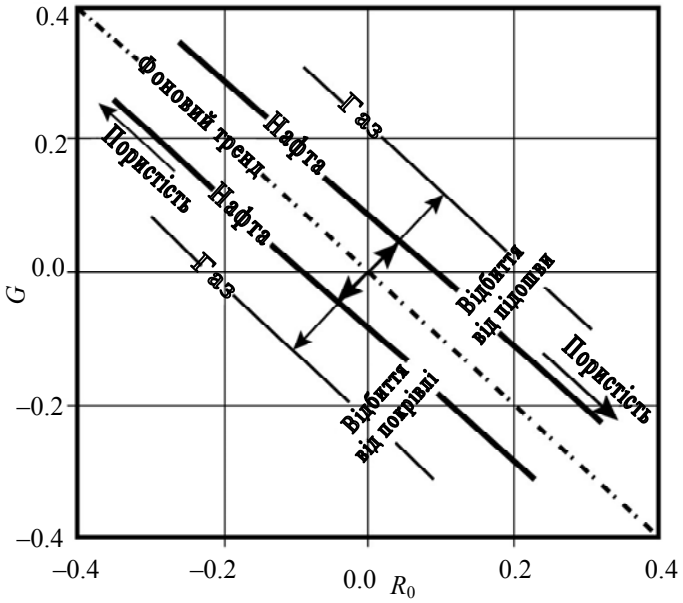


Рис. 3.8. Вплив ефекту зменшення акустичної жорсткості породи-колектора на атрибути R_0 і G
(стрілками показано флюїдні вектори)

Але статистичний тренд лінійної залежності для параметрів B і A завжди від'ємний. Це означає, що кожна реалізація випадкового розподілу амплітуд уздовж лінії синфазності відбиттів на сейсмограмі ЗТВ спричиняє похибки як при оцінках B, так і A, але ці похибки різного знака. Водночас виявляється, що внаслідок цих похибок точка на кросплоті зміщується вздовж лінії, яка має кутовий коефіцієнт b. Таким чином, випадковий розподіл амплітуд на сейсмограмі загальної точки відбиття спричиняє відповідний випадковий розподіл точок на кросплоті. Цей розподіл ближчий до глобального фонового тренда, який визначається відношенням V_S / V_P для району досліджень.

3.8. Класифікація AVO-аномалій

Зважаючи на наявність зв'язку між розташуванням точок на кросплоті $[G, R_0]$ і петрофізичними характеристиками шаруватої моделі "колектор–покрівля–підстеляючі породи", можна розробити на цій основі класифікацію AVO-аномалій. Зміщення точок, викликане зміною пружності породи-колектора, залежить від співвідношення акустичних імпедансів насиченого колектора і вміщуючих порід, яке визначає форму кривих $R(\theta)$, відповідно, величини B і A (рис. 3.9). Можливі варіанти, обумовлені цим співвідношенням, можна розділити на чотири класи, які тяжіють до різних ділянок на кросплоті (рис. 3.10). Виділені класи наведено в табл. 3.2.

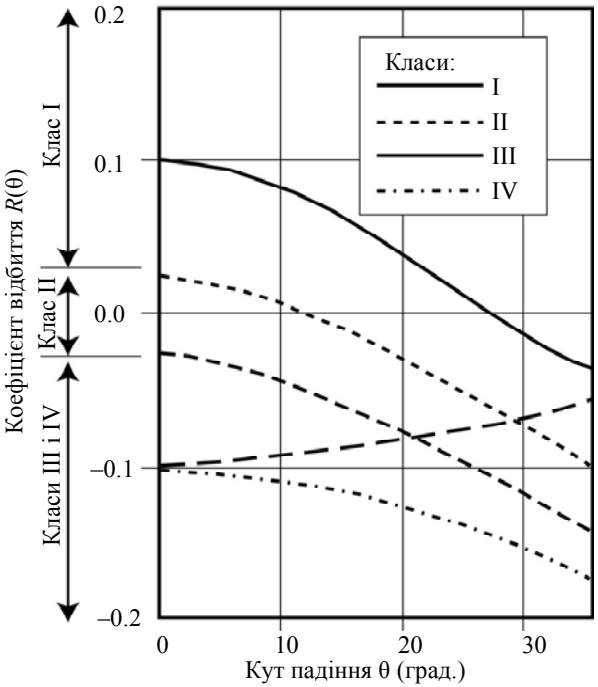


Рис. 3.9. Коефіцієнти відбиття плоских хвиль від покрівлі газонасиченого піщаного колектора залежно від співвідношення акустичних імпедансів колектора і глинистої покрівлі та класифікація AVO-аномалій

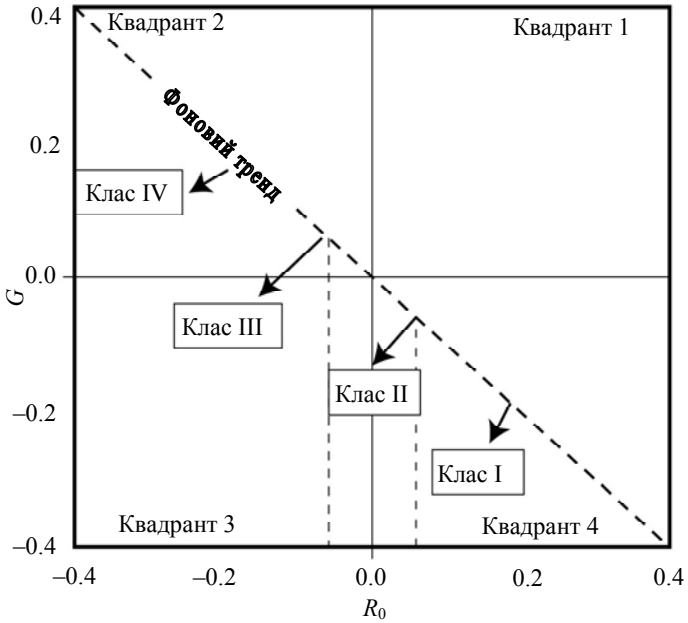


Рис. 3.10. Класифікація аномалій, обумовлених зменшенням акустичної жорсткості породи-колектора при відбитті хвилі від його покрівлі (стрілками показано флюїдні вектори)

Таблиця 3.2

Зміна ключових параметрів при 4-ступеневій AVO-класифікації

Клас	**Акустичний імпеданс**	**Квадрант кросплота**	A_0	G	**Характер зміни амплітуди відбиття при зміні кута** θ
I	Вищий, ніж у покрівлі пласта	4	+	–	Зменшується
II	Приблизно такий самий, як і у покрівлі	2, 3 і 4	+/–	–	Зменшується/зростає, може змінювати знак
II	Нижчий, ніж у покрівлі	3	–	–	Зростає
IV	Нижчий, ніж у покрівлі	2	–	+	Зменшується

Для випадку відбиття від покрівлі пласта-колектора класифікацію AVO-аномалій наведено в табл. 3.2.

Зауважимо, що в табл. 3.2 береться до уваги абсолютне значення коефіцієнта відбиття, тобто, якщо у правій графі таблиці йдеться про зменшення амплітуди зі збільшенням кута θ, то це може бути зменшення від'ємного коефіцієнта відбиття. Клас IV є аномальним у тому сенсі, що має місце додатний градієнт *B*, але амплітуда (абсолютна величина) зменшується при збільшенні кута θ (рис. 3.10).

Для відбиттів від підошви піщаного колектора розташування класів відображається дзеркально-симетрично щодо лінії фонового тренда у верхній частині поля кросплота.

Із рисунків 3.8–3.10 легко переконатись у тому, що вуглеводневе насичення може спричинити зміщення точки (B, A) відносно фонового тренда практично в будь-яке поле, особливо у випадках, якщо колектор має потужність меншу за довжину хвилі або має глинисті прошарки. Цим пояснюються численні невдачі прямих пошуків за "яскравими плямами" і помилкові результати AVO-аналізу. Для уникнення помилок і оцінювання принципової можливості розв'язування задачі прямих пошуків вуглеводнів необхідно провести математичне моделювання AVO-атрибутів при водо- і вуглеводневому насиченні за конкретними значеннями V_P, V_S, ρ, які визначені методами геофізичного дослідження свердловин (ГДС) із використанням формалізму заміщення флюїду.

Для з'ясування причин неоднозначності розглянемо вплив обмежень петрофізичних параметрів на кути нахилу фонового тренда. У випадку $V_P / V_S = \text{const}$ мінімальний кутовий коефіцієнт $b = 1 - 8(V_P / V_S)^2 = 1$, що в кінцевому рахунку приводить до $G = -R_0$. Якщо вважати, що $K = \text{const}$, то маємо максимальний кутовий коефіцієнт $b = -5$. Положення кривої глобального тренда виявляється проміжним. На кросплоті $[V_P / V_S, V_P]$ крива глобального тренда є бісектрисою трендів $V_P / V_S = \text{const}$ і $K = \text{const}$, а кутовий коефіцієнт кривої глобального тренда для консолідованих порід коливається в межах $-5 < b < -1$. Тренд, який відповідає умові $V_P / V_S = \text{const}$, більш імовірний у випадку сильноущільнених високошвидкісних порід, а тренд, що відпові-

дає умові $K = \text{const}$, характерний для слабкоконсолідованих низькошвидкісних порід.

Коливання кутового коефіцієнта кривого фонового тренда – це не єдина причина зміщень точок на кросплоті $[G, R_0]$. Якщо не змінюються властивості покрівлі шару і скелета колектора, заміна пластової води вуглеводнями в колекторі практично завжди спричиняє зміщення точок кросплота поперед лінії фонового тренда.

Проте можливі випадки, наприклад, у розрізах із $K = \text{const}$, коли водонасиченому колектору відповідають "хмари" точок, які систематизовано зміщуються в напрямку, поперечному до фонового тренда. Такий випадок може трапитися тому, що збільшення пористості й (або) порового тиску у водонасиченому колекторі веде до зміщення точок кросплота такого самого знака, що і зміна водо- на газонасичення. Дійсно, збільшення пористості зазвичай залишає незмінним відношення V_P / V_S, а в цьому випадку за умови $K = \text{const}$ точка кросплота зміщується відносно лінії фонового тренда, адже лінії $V_P / V_S = \text{const}$ і $K = \text{const}$ не паралельні для слабкоущільнених порід (невисокі швидкості V_P). Відповідно, зменшення пористості та (або) порового тиску зумовлюють ефект того самого знака, що і зміна газоподібного флюїду на рідинний. До змін пружних властивостей скелета може привести також зміна літологічного складу і характер цементу породи. Коливання властивостей покрівлі шару ведуть, як правило, до зміщення точок кросплота вздовж напрямку фонового тренда, але значне зменшення пружності покрівлі спричиняє ефект, який якісно протилежний ефекту, обумовленому зміною водонасичення колектора на нафто- або газонасичення.

Підсумовуючи наведене вище, доходимо висновку, що глобальні тренди відображають лише найбільш загальні, осереднені закономірності, які притаманні моделі кросплота.

Локальні особливості осадконакопичення гірських порід і наступні процеси діагенезу можуть спричиняти суттєві, з точністю до знака, відмінності від ефектів, прогнозованих на основі глобальних трендів. Тому слід зважати на те, що інтерпретація ізольованого кросплота, який побудований за даними спостережень, узагалі може бути неоднозначною. Для підвищення надійності

необхідно до дослідження даних AVO-аналізу залучати результати вивчення варіацій літології, флюїдонасичення, порового тиску, ступеня глинистості й типу цементу та здійснювати моделювання кросплотів конкретних об'єктів розвідки.

Для цієї мети можна скористатися даними ГДС і сучасними методами математичного моделювання пружних і акустичних властивостей флюїдонасичених порід-колекторів.

3.9. Годограми кросплота

Традиційний метод моделювання кросплота $[G, R_0]$ полягає в числових розрахунках V_P, V_S, ρ за допомогою теоретичних моделей або в їхньому оцінюванні шляхом інтерпретації кривих акустичного каротажу (АК) для конкретних пластових умов порід-колекторів.

Вплив зміни літології оцінюють перебором точок кривих АК у межах пласта, а оцінювання впливу типу порового флюїду – числовими розрахунками пружних властивостей із використанням моделі Гассмана.

Цілком очевидно, що знайдені таким чином величини G і R_0 імітують параметри імпульсної, а не реальної сейсмограми. Для моделювання атрибутів кросплота, які відповідають реальній сейсмограмі, необхідно величини G і R_0 визначити за допомогою синтетичних трас $U(t,\theta) = R(t,\theta) * w(t)$, які одержані шляхом згортки модельних трас $R(t,\theta)$ із сейсмічним імпульсом $w(t)$. Унаслідок цього для заданої загальної точки відбиття замість однієї точки (G, R_0) для кожної заданої відбиваючої межі на кросплоті з'явиться послідовність точок $1,2,\ldots,l,m,\ldots,n$, які відповідають відлікам $1,2,\ldots,l,m,\ldots,n$ імпульсу $w(t)$, відбитого від заданої межі (рис. 3.11). Ці точки послідовно виносять на кросплот.

Крива, яка з'єднує послідовність точок – значень атрибутів – на кросплоті $(1,2,\ldots,l,m,\ldots,n)$, називається *годограмою*.

У випадку ідеальної сейсмограми $U(t,\theta)$ годограма є прямою лінією, яка має кут нахилу φ у площині кросплота. Кут φ називається поляризаційним кутом годограми (рис. 3.12).

Якщо відбиваюча межа не аномальна, тобто, при її перетині тип насичення не змінюється, тоді кут нахилу годограми збігається з кутом нахилу фонового тренда. У випадку, якщо на сейсмограмі загальної точки відбиття з'являються зсуви і розтяги імпульсу тощо, то лінійна годограма перетворюється у замкнену фігуру, орієнтовану під таким самим кутом φ.

Аномальній межі, яка характеризується тим, що на ній відбувається зміна типу насичення, відповідає вже кут нахилу φ, який відрізняється від кута нахилу лінії фонового тренда.

Зокрема, при зміні типу флюїду годограма орієнтована вздовж флюїдного вектора (рис. 3.11).

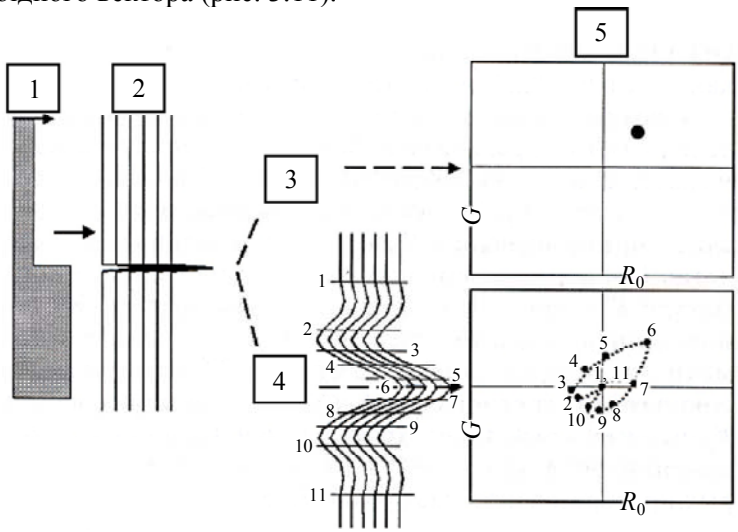


Рис. 3.11. Побудова кросплота за даними лсинтетичних сейсмічних трас:
1 – акустична жорсткість пластів; 2 – імпуьсна сейсмограма $R(\theta)$;
3 – імпульсна сейсмограма без згортки із сейсмічним імпульсом;
4 – згортка імпульсної сейсмограми із сейсмічним імпульсом;
5 – моделі кросплота. 1…11 – точки значень амплітуд на годограмі

Залежність поляризаційного кута від наявності або при відсутності зміни порового флюїду на відбиваючій межі підвищує

ефективність AVO-аналізу як інструмента прямих пошуків вуглеводнів, навіть у випадках, коли аномальна межа сама по собі дає точку на кросплоті, яка лежить поблизу лінії фонового тренда. У цьому випадку її можна розпізнати, насамперед, завдяки тому, що кут φ її годограми відрізняється від кута нахилу фонового тренда.

Через це вводять додаткові атрибути AVO-аналізу, які визначаються шляхом побудови годограм:

- поляризаційний кут годограми φ;
- різниця $\Delta\varphi$ між поляризаційним кутом і кутом нахилу лінії фонового тренда;
- магнітуда L годограми;
- поляризаційний добуток $L\Delta\varphi$;
- лінійний коефіцієнт кореляції годограми.

Розглянемо детальніше методику визначення додаткових атрибутів AVO-аналізу.

3.9.1. Визначення поляризаційного кута

Значення поляризаційного кута годограми φ визначають всередині ковзного вікна сейсмограми $[-N, N]$, яке відповідає часовому інтервалу від 0,5 до 1 видимого періоду сейсмічного запису. Для будь-якої точки M (рис. 3.12) визначають одиничний вектор поляризації $\vec{P}(P_x, P_y)$, напрямок якого збігається з напрямком кута φ, а компонента P_y колінеарна осі R_0, а P_x – осі G. Тобто, для часового відліку $t = m\Delta t$ в центрі часового вікна кут φ визначається із співвідношення

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{P_y}{P_x}\right). \qquad (3.38)$$

Числові розрахунки компонент вектора P_x і P_y здійснюють розв'язуванням такого характеристичного рівняння детермінанта матриці $R_{lq}^{(m)}$:

$$\left|R_{lq}^{(m)} - \lambda\delta_{bq}\right| = 0, \text{ тут } b, q = 1,2,3; \qquad (3.39)$$

де λ – дійсна додатна величина; δ_{bq} – дельта Кронекера.

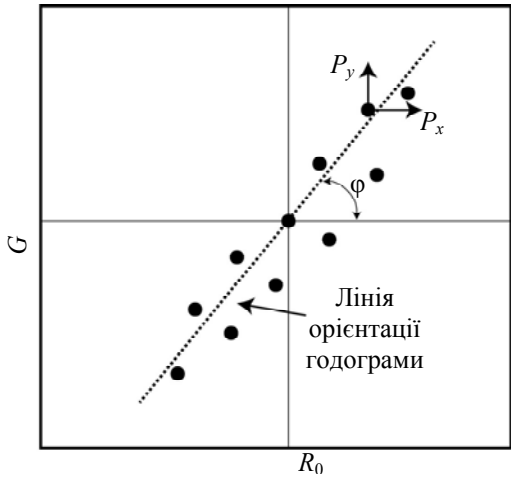


Рис. 3.12. Визначення кута поляризації годограми φ для вікна AVO-аналізу $[-N, N]$

(кут φ вимірюється в напрямку за часовою стрілкою від лінії орієнтації годограми до горизонтальної осі. Для будь-якої точки *M* на годограмі можна визначити одиничний вектор поляризації $\vec{P}(P_x, P_y)$)

Симетрична матриця $R_{lq}^{(m)}$ розмірністю (2×2) має вигляд

$$R_{lq}^{(m)} = \frac{1}{2N+1}\begin{pmatrix} \sum_{i=-N}^{N} R_{0,m+i}^2 & \sum_{i=-N}^{N} R_{0,m+i}^2 G_{m+i} \\ \sum_{i=-N}^{N} R_{0,m+i}^2 G_{m+i} & \sum_{i=-N}^{N} G_{m+i}^2 \end{pmatrix}. \qquad (3.40)$$

Із розв'язку детермінанта характеристичного рівняння $R_{lq}^{(m)}$ знаходимо його власні значення:

$$P_x = \frac{\sqrt{2}}{\left[1+D\right]^{1/2}} \frac{\sum_{(i)} R_{0,m+i} G_{m+i}}{\left[4\left(\sum_{(i)} R_{0,m+i} G_{m+i}\right)^2 + \left(\sum_{(i)} R_{0,m+i}^2 - \sum_{(i)} G_{m+i}^8 -\right)^2\right]^{1/2}},$$

$$P_y = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1+D\right]^{1/2},$$

$$D = \frac{\left(\sum_{(i)} R^2{}_{0,m+i} G^2{}_{m+i}\right)}{\left[4\left(\sum_{(i)} R_{0,m+i} G_{m+i}\right)^2 + \left(\sum_{(i)} R^2_{0,m+i} - \sum_{(i)} G^8_{m+i} -\right)^2\right]^{1/2}}. \quad (3.41)$$

Компоненти вектора $\vec{P}$ нормуються таким чином, щоб для даного вікна його модуль дорівнював одиниці: $\left|\vec{P}\right| = 1$.

3.9.2. Магнітуда годограми

Числові розрахунки магнітуди для кожного часового вікна здійснюють за формулою

$$L = L_{\min} + L_{\max},$$

де $L_{\min} = \sqrt{R^2_{0,\min} + G^2_{\min}}$; $L_{\max} = \sqrt{R^2_{0,\max} + G^2_{\max}}$. (3.42)

Тут $R_{0,\min}$ – мінімальне значення параметра R_0 для заданого вікна $[-N, N]$, $G_{\min}$ – величина градієнта в точці кросплота зі значенням $R_{0,\min}$. Значення параметрів $R_{0,\max}$ і $G_{\max}$ визначаються аналогічно (рис. 3.13).

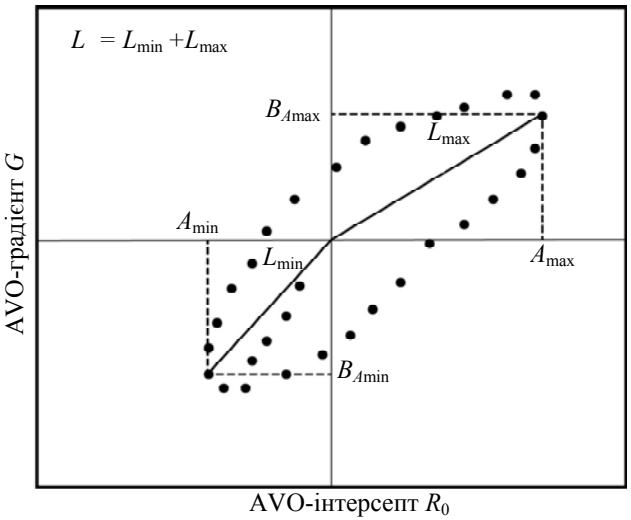


Рис. 3.13. Визначення магнітуди годограми $[G, R_0]$

3.9.3. Коефіцієнт лінійної кореляції

Коефіцієнт лінійної кореляції r є мірою надійності одержаних оцінок поляризаційного кута і магнітуди годограми. У випадку ідеальної сейсмограми ЗТВ, коли годограма вироджується у пряму лінію, коефіцієнт кореляції $r = 1$. Якщо ж сейсмограма обтяжена спотвореннями – залишковий кінематичний зсув, розтяг імпульсу тощо, а годограма є майже ізометричною фігурою, то поляризаційний тренд стає невизначеним, а значення коефіцієнта лінійної кореляції стає дуже малим і наближається до нуля.

Числові розрахунки атрибутів годограм $\Delta\varphi$ і ΔL є достатньо простими і не вимагають додаткових пояснень. Величина $\Delta\varphi$ вважається прямим індикатором зміни типу насичення на відбиваючій межі. У випадку $\Delta\varphi = 0$ це означає відсутність зміни насичення на відбиваючій межі. Якщо $\Delta\varphi \to 90^\circ$, то це свідчить про високу ймовірність зміни типу флюїду.

Атрибут годограм $L\Delta\varphi$ розглядається як кількісна величина, яка показує розмір перевищення рівня шумів при оцінюванні значущості одержаної величини $\Delta\varphi$.

Важливим методичним елементом при визначенні атрибутів годограм є вибір часового вікна. При числових розрахунках цих атрибутів розмір вікна AVO-аналізу має складати 0,5…1 видимого періоду запису. За необхідності звуження часового вікна рекомендується вибирати звужене вікно, яке тяжіє до екстремуму цільового відбиття.

У більшості випадків розріз у цільовому інтервалі є тонкошаруватим, тому окремим пластам-колекторам відповідає інтерференційна ділянка запису, яка може мати мало подібного із формою одиничного сейсмічного імпульсу. У зв'язку з цим моделі годограм для конкретних тонких пластів-колекторів повинні будуватися не для одиничного імпульсу, а для згортки із сейсмічним імпульсом відповідної ділянки імпульсної сейсмограми, яка вибрана так, щоб урахувати всі межі вище і нижче пласта-колектора, які вкладають внесок у вікно AVO-аналізу певного пласта-колектора (рис. 3.14).

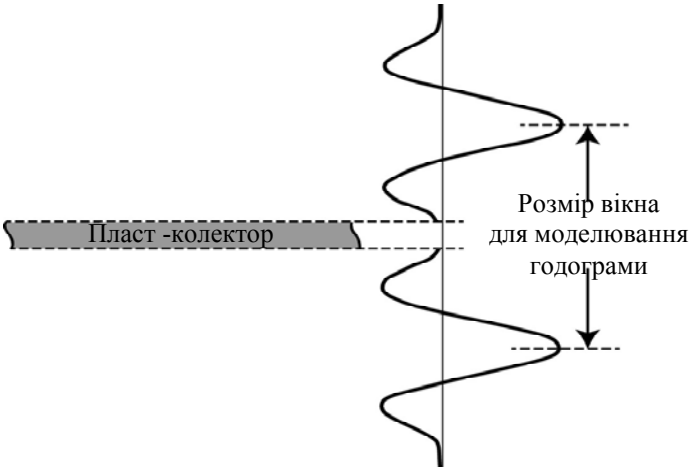


Рис. 3.14. Визначення вікна імпульсної сейсмограми для згортки із сейсмічним імпульсом (жирна лінія) при моделюванні годограми

3.10. AVO-інверсія

Під терміном інверсія в літературі розуміють процес вилучення інформації про фізичні властивості середовища за даними вимірювань геофізичних полів. Тому з формального погляду будь-який AVO-аналіз сейсмічних даних можна називати *інверсією*.

Як зазначалося вище, розв'язання прямої задачі AVO-аналізу здійснюється у два етапи: 1) для заданого інтервалу досліджень геологічного розрізу і заданого стану середовища визначають V_P, V_S, ρ для кожного шару; 2) за формулою Цьоппрітца або за лінеаризованими формулами визначають коефіцієнт відбиття $R_0(t,\theta)$, тут t – вертикальний час у межах досліджуваного інтервалу розрізу. За необхідності траси $R_0(t,\theta)$ перетворюють в область $R_0(t,h)$ і згортають її із сейсмічним імпульсом $w(t)$ для побудови синтетичних сейсмограм $U(t,h) = R_0(t,h) * w(t)$, де h – половина віддалі між джерелом і сейсмоприймачем , яку називають офсетною.

Метою прямої задачі є визначення заданого стану середовища – наприклад, наявність ефекту від покладів вуглеводнів. У дійсності

шукають два варіанти значень V_P, V_S, ρ: один – для випадку наявності покладів вуглеводнів, а інший – для випадку їх відсутності.

Фактично метою прямої задачі AVO-аналізу є визначення зміни V_P, V_S, ρ, що змінюються під впливом порозаповнювача (вода, нафта, газ), унаслідок підвищення або зниження ефективного тиску, при зміні літологічного складу.

Суть оберненої задачі AVO-аналізу полягає у визначенні акустичних параметрів V_P, V_S і густини шляхом мінімізації деякого функціонала $\Phi(t,h,x)$:

$$\Phi(\vec{x},t,h) = \sum_{q=1}^{Q} \left[U(t,h) - U_S(t,h)\right]^2, \qquad (3.43)$$

де $U(t,h)$ – результати сейсмічних спостережень на досліджуваному інтервалі розрізу; $U_S(t,h)$ – результати математичного моделювання синтетичних сейсмограм на цьому самому інтервалі розрізу; $\vec{x}$ – вектор невідомих параметрів V_P, V_S, ρ.

Такий підхід виявився достатньо трудомістким і не має широкого застосування.

Під терміном *акустична інверсія* (іноді – "амплітудна інверсія") розуміють процедуру, яка з 60-х років минулого сторіччя відома як "псевдоакустичний каротаж" (ПАК). Метою акустичної інверсії є визначення залежності акустичного імпедансу $I = \rho V$ від часу *t* за результатами реєстрації відбитих хвиль U_Σ при нормальному куті падіння хвилі на відбиваючу сейсмічну межу. Як вихідна інформація використовується сейсмічна траса часового розрізу – результат підсумування "спрямленої" немігрованої або мігрованої сейсмограми, для якої параметром трас є офсет *h* або кут падіння хвилі θ. Результати такого підсумування розглядаються як оцінка траси при $\theta = 0$ (нормальне падіння). У класичній постановці акустичну інверсію можна розглядати як обернену динамічну задачу сейсміки відбитих хвиль. Пряма динамічна задача сейсміки відбитих хвиль полягає у визначенні сейсмічної траси $U_\Sigma(t)$, якщо відомий потік коефіцієнтів відбиття $r(t)$ і форма сейсмічного імпульсу $w(t)$ та адитивна хвиля-завада $n(t)$:

$$U_{\Sigma}(t) = r(t) * w(t) + n(t). \qquad (3.44)$$

Обернена динамічна задача сейсміки відбитих хвиль, тобто акустична інверсія, зводиться до визначення акустичного імпедансу $I(t)$ по сейсмічній трасі $U_{\Sigma}(t)$:

$$r(t) = \frac{I(t+dt) - I(t)}{I(t+dt) + I(t)} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\ln(I(t))\right],$$

$$r(t) = r_{\theta=0}(t). \qquad (3.45)$$

Формально процедуру визначення акустичного імпедансу можна розглядати як зворотну фільтрацію. Якщо застосувати перетворення зворотної фільтрації до рівняння (3.44), то одержимо

$$\hat{r}(t) = r(t) * \hat{w}(t) + \hat{n}(t), \qquad (3.46)$$

де – перетворення зворотної фільтрації сейсмічного імпульсу $w(t)$ і хвилі-завади $n(t)$.

Перехід від $\hat{r}(t)$ до оцінок перетворення імпедансу $\hat{I}(t)$ при дискретному часі $t = \Delta t, 2\Delta t, \ldots, N\Delta t$ здійснюється за рекурентною формулою

$$\hat{I}(t+\Delta t) = I(t)\frac{1+\hat{r}(t)}{1-\hat{r}(t)} \qquad (3.47)$$

за умови, що відоме початкове значення $\hat{I}(t)$ в одній точці.

Перетворення (3.47) має важливий фізичний зміст, оскільки дозволяє перейти від оцінок коефіцієнтів відбиття $\hat{r}(t)$, які характеризують відбиваючі межі, до оцінок властивостей геологічного середовища – імпедансів $I_P = \rho V_P$ і $I_S = \rho V_S$. Таким чином, у межах лінійних ізотропних моделей одержано оптимальну інформацію про властивості вертикального розрізу за результатами сейсмічного методу відбитих у межах робочого сейсмічного діапазону частот.

Розглянемо детальніше розв'язання оберненої динамічної задачі для вертикально-неоднорідного горизонтально-шаруватого середовища з довільним розподілом швидкості $V(z)$ і густини $\rho(z)$.

Нехай у момент $t = 0$ на вільній поверхні плоским джерелом збурюється імпульсний сигнал довільної форми $w(t)$, який у свою чергу в цьому середовищі збурює сейсмічне поле $U(t, z)$.

Згідно з умовами оберненої динамічної задачі, необхідно за допомогою зареєстрованого на поверхні сейсмічного поля $U(t,z_0)$ визначити акустичний імпеданс $I=\rho V$. Припустимо, що функція джерела є функцією Дірака $\delta(t)$, тому для переходу до сигналу довільної форми $w(t)$, достатньо здійснити операцію згортки:

$$U(t)=\int_0^t w(\vec{t})+U_\delta(t-\vec{t})d\vec{t}. \tag{3.48}$$

За відсутності джерел сейсмічне поле $U_\delta(t,z)$ повинно задовольняти хвильове рівняння

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\rho(z)V^2(z)\frac{\partial U_\delta(t,z)}{\partial z}\right]=\rho(z)\frac{\partial^2 U_\delta(t,z)}{\partial t^2}. \tag{3.49}$$

Оскільки зареєстровані сейсмічні поля є функціями часу поширення хвилі, то доцільно виконати заміну змінних, тобто перейти від просторової координати *z* до часової координати $\vec{t}$:

$$\vec{t}=\int_0^Z\frac{dz}{V(z)}\;U(t)=\int_0^t w(\vec{t})+U_\delta(t-\vec{t})d\vec{t}\;. \tag{3.50}$$

У цьому випадку рівняння (3.49) матиме такий вигляд:

$$\frac{1}{I(\vec{t})}\frac{\partial I(\vec{t})}{\partial\vec{t}}\frac{\partial U_\delta(t,\vec{t})}{\partial\vec{t}}+\frac{\partial^2 U_\delta(t,\vec{t})}{\partial\vec{t}^{\,2}}=\frac{\partial^2 U_\delta(t,\vec{t})}{\partial\vec{t}^{\,2}}. \tag{3.51}$$

Коефіцієнт при першому доданку в рівнянні (3.51) можна представити як

$$\frac{1}{I(\vec{t})}\frac{\partial I(\vec{t})}{\partial\vec{t}}=\frac{1}{dt}d\left[\ln(I(\vec{t}))\right]=2R(\vec{t})\frac{1}{dt}, \tag{3.52}$$

де $R(t)$ – розподіл коефіцієнтів відбиття в розрізі.

Розв'язок рівняння (3.51) на вільній поверхні для випадку $\vec{t}=0$ можна одержати у вигляді суми

$$U_\delta(t,0)=R(t)\varphi(R)+\sum_{i=2}^{\infty}F_i(R(t))\,, \tag{3.53}$$

де $R(t)$ – послідовність однократних відбитих хвиль, амплітуда яких при збуренні δ-сигналом дорівнює коефіцієнтам відбиття;

$F_i\big(R(t)\big)$– функція, яка описує інтенсивність вторинних хвиль *i*-ї кратності;

$$\varphi(R(t)) = \exp\left[\int_0^t \ln\left[1 - R^2(t)\right]dt\right], \tag{3.54}$$

де (3.54) – плавна функція, яка враховує зміну інтенсивності однократних хвиль при поширенні їх у покривній товщі.

Якщо при обробці багатократні хвилі усунуто, а функція $\varphi\big(R(t)\big)$ буде компенсована відповідним підбором підсилення, то

$$U_\delta(t) = R(t). \tag{3.55}$$

Таким чином, сейсмічну трасу можна представити інтегралом згортки:

$$S(t) = \int_0^t w(\vec{t}) + R(t - \vec{t}) = w(t) * R(t), \tag{3.56}$$

де $w(t)$ – вихідний сейсмічний імпульс.

Функція $R(t)$ має необмежений спектр частот, але вихідний сейсмічний сигнал обмежений деякою смугою частот від $f_{\text{н}}$ до $f_{\text{в}}$.

Представимо імпульсну сейсмограму $R(t)$ як Фур'є-перетворення від її спектра:

$$R(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty R(j\omega)e^{j\omega t}d\omega. \tag{3.57}$$

Інтеграл (3.57) подамо у вигляді складових, які відповідають різним частотним діапазонам імпульсної сейсмограми:

$$R(t) = R_H(t) + R_C(t) + R_B(t), \tag{3.58}$$

де $R_H(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\omega_H} K(j\omega)e^{j\omega t}d\omega,$ (3.59)

$$R_C(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_H}^{\omega_B} K(j\omega)e^{j\omega t}d\omega, \tag{3.60}$$

$$R_B(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_B}^{\infty} K(j\omega)e^{j\omega t}d\omega. \tag{3.61}$$

Сейсмічна траса $s(t)$ несе інформацію лише про $R_C(t)$. Інформація про високочастотні зміни в розрізі, яку несе $R_B(t)$, повністю відсутня в сейсмічному записі.

Тому вихідним розв'язком вважатимемо таку функцію $\hat{w}(t)$ імпульсної сейсмограми, яка є сумою $R_H + R_C$.

Розглянемо шлях відновлення $R_C(t)$, а потім і $R_H(t)$.

Здійснимо операцію коригуючої деконволюції до сейсмічного запису (3.44) із такими параметрами, які б забезпечували на виході отримання сейсмограми

$$\hat{S}(t) = \hat{w}(t) * R(t) \tag{3.62}$$

із частотною характеристикою

$$\hat{S}(j\omega) = \hat{U}(j\omega) \times R(j\omega), \tag{3.63}$$

де

$$\left|\hat{U}(j\omega)\right| = U(\omega)H(\omega) = \begin{cases} A, & \text{якщо } \omega_H < \omega < \omega_B; \\ 0, & \text{якщо } \omega_R < \omega < \omega_H. \end{cases}$$

$$\varphi_{\hat{U}}(\omega) = 0 \tag{3.64}$$

$H(\omega)$ – амплітудна частотна характеристика оператора деконволюції; $\left|\hat{U}(\omega)\right|$ – модуль спектра сигналу після деконволюції; A – деяка константа; $\varphi_{\hat{U}}(\omega)$ – фазовий спектр сигналу після деконволюції.

Беручи до уваги (3.53) і (3.64), одержуємо

$$\left|\hat{S}(j\omega)\right| = \hat{U}(j\omega)R(j\omega) = \begin{cases} AR(j\omega), & \text{якщо } \omega_H \le \omega \le \omega_B; \\ 0, & \text{якщо } \omega_H > \omega > \omega_B, \end{cases} \tag{3.65}$$

$$\hat{S}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \hat{S}(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty AR(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{A}{2\pi}R_C(t). \tag{3.66}$$

Таким чином, виконання коригуючої деконволюції дозволяє одержати середньочастотну частину імпульсної сейсмограми з точністю до сталого множника $A/2\pi$. Виключення сталого множника досягають шляхом зіставлення із еквівалентно профільтрованою імпульсною сейсмограмою, яка одержана за реальними акустичними даними.

Масштабний коефіцієнт знаходять з умови рівності дисперсій: реальної й одержаної за сейсмічними даними середньочастотних імпульсних сейсмограм.

Розглянемо питання про відновлення $R_H(t)$. Якщо деяку функцію a_i замінити деякою ступінчастою $\widehat{a}_i$, кожне значення якої є середнім значенням вихідної функції

$$\widehat{a}_i + \widehat{a}_{i+1} + ... + \widehat{a}_{i+j} = \frac{1}{j}\sum_{i=}^{i+j} a_i \qquad (3.67)$$

на інтервалі *j*, тоді спектр ступінчастої функції $\widehat{a}_i$ буде близьким до спектра функції a_i, але нижчим за деяку межову частоту.

Якщо кількість ступенів більше одиниці, то ступінчаста функція дозволяє визначити деякий діапазон спектра вихідної функції з боку низьких частот.

Спільне використання динамічних і кінематичних характеристик сейсмічних трас дозволяє оцінювати спектральні компоненти в усьому діапазоні частот від нульової до верхньої межової частоти у спектрі збурюючого сигналу.

Якщо відоме $R_з(t) = R_H(t) + R_C(t)$, (3.68)

то розподіл акустичного імпедансу в розрізі можна одержати шляхом інверсії формули

$$I(t) = I_0 \exp\left[2\int_0^t R_з(t)dt\right]. \qquad (3.69)$$

У правій частині формули (3.69) невідомою величиною є імпеданс початкового шару I_0. Для його визначення скористаємося умовою рівності середніх імпедансів відновленої кривої і пластової моделі, яка одержана прямими вимірюваннями швидкості з урахуванням кореляційної залежності між швидкістю і густиною. Формулу (3.69), з урахуванням дискретного представлення функції R_i:

$$R_{i+1} = \frac{I_{i+1} - I_i}{I_{i+1} + I_i}, \qquad (3.70)$$

запишемо у вигляді

$$I_i = I_0 \prod_1^i \frac{1+R_i}{1-R_i}. \tag{3.71}$$

Рівність середніх значень акустичного імпедансу відновленої кривої і вихідної пластової моделі свідчить про те, що

$$\frac{I_0}{M} = \sum_{i=1}^{M} \sum_{i=1}^{i} \frac{1+R_i}{1-R_i} = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{N} V_n \, \rho_n \, \Delta T_n, \tag{3.72}$$

де M – кількість елементарних шарів у відновленій кривій (кількість дискретів); $V_n \rho_n$ – швидкість і густина в n-му шарі; ΔT_n – час поширення хвилі в n-му шарі; N – кількість шарів у пластовій моделі; T – загальна тривалість часового інтервалу.

У результаті за допомогою рівняння (3.72) знаходимо

$$I_0 = \frac{\sum_{n=1}^{N} V_n \rho_n \Delta T_n}{\Delta t \sum_{i=1}^{M} \prod_1^i \frac{1+R_i}{1-R_i}}, \tag{3.73}$$

де Δt – крок дискретизації сейсмічної траси.

Таким чином, формула для акустичної інверсії сейсмічних даних матиме такий вигляд:

$$I_i = \frac{\left(\sum_{n=1}^{N} V_n \rho_n \Delta T_n \right) \prod_1^i \frac{1+R_i}{1-R_i}}{\Delta t \sum_{i=1}^{M} \prod_1^i \frac{1+R_i}{1-R_i}}. \tag{3.74}$$

3.11. Пружна інверсія

Акустична модель у методах AVO-аналізу має жорсткі обмеження і не допускає наявності обмінних хвиль, тому що обмежена нульовими кутами падіння хвиль. Водночас її формально можна застосовувати і для поперечних хвиль. У методах акустичної інверсії використовують акустичні імпеданси в розширеному діапазоні частот.

Природно виникає питання – чи можна застосовувати акустичну інверсію до трас із ненульовими кутами падіння, і відповідно, до обмінних хвиль, які виникають на межах, адже це більш притаманне пружним, а не акустичним моделям. Виявляється, що цілком можливо розширити діапазон кутів падіння сейсмічної хвилі, але при цьому слід уточнити поняття імпедансу для пружної моделі, тобто, поняття пружного імпедансу. *Пружний імпеданс* фактично є узагальненням поняття акустичного імпедансу, але для випадку похилого падіння хвилі на сейсмічну межу.

Задачу визначення пружного імпедансу можна сформулювати таким чином: знайти деяку функцію $EI(t)$, яка при підстановці у рівняння акустичного імпедансу (3.45) замість $I(t)$ визначає коефіцієнт відбиття r_θ заданого кута падіння θ сейсмічної хвилі на межу, при цьому $\theta = 0^\circ$.

Для розв'язання поставленої задачі необхідно в рівняння (3.45) замість $I(t)$ підставити $EI(t)$. Одержане таким чином рівняння

$$r(\theta) = \frac{EI(t+dt) - EI(t)}{EI(t+dt) + EI(t)} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\ln(EI(t))\right], \tag{3.75}$$

$$r(t) = r_{\theta \neq 0}(t), \tag{3.76}$$

слід розв'язати відносно $EI(t)$. Намагання формально зберегти вигляд рівняння (3.45) продиктовано збереженням усієї технології інверсії, тому що обернення рівняння і є суттю акустичної інверсії.

Для розв'язування поставленої задачі спочатку зінтегруємо формулу (3.74), тоді одержимо вираз

$$2\int r(t)dt = \ln\left[EI(t)\right]. \tag{3.77}$$

Якщо тепер у ліву частину рівняння (3.77) підставимо трипараметричне розвинення Акі – Річардса (3.19), то одержимо рівняння

$$2\int \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}(\ln V_P) + \frac{d}{dt}(\ln \rho) + \left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\ln V_P) - 4g\frac{d}{dt}(\ln V_S) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -2g\frac{d}{dt}(\ln \rho)\sin^2\theta + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\ln V_P)\sin^2\theta\tan^2\theta\right)dt = \ln\left[EI(t)\right], \tag{3.78}$$

де $g = V_S^2 / V_P^2$.

Після інтегрування (3.78) і потенціювання маємо

$$EI(t) = \rho V_P \left[V_P^{\tan^2\theta} V_S^{t-8g\sin^2\theta} \rho^{t-4g\sin^2\theta} \right]. \qquad (3.79)$$

Отримане таким чином співвідношення (3.79) і є узагальненням поняття імпедансу на випадок довільного кута падіння, а функція

$$EI(t) = EI_\theta(t) \qquad (3.80)$$

одержала назву пружного імпедансу аналогічно до акустичного імпедансу.

Легко переконатися, що співвідношення (3.79) при $\theta = 0^\circ$, зводиться до рівності $EI(t) = I_\theta(t)$. Бачимо таке: якщо прийняти глобальну середню величину для піщано-глинистих порід $g = 0,25$, то при $\theta = 90^\circ$ пружний імпеданс дорівнює відношенню $(V_P / V_S)^2$. Беручи до уваги очевидний факт, згідно з яким відношення V_P / V_S однозначно зв'язано з коефіцієнтом Пуассона, то стає зрозумілим, що за допомогою $EI(t)$ можна легко визначити коефіцієнт Пуассона.

При цьому не слід забувати, що виконані перетворення носять чисто формальний характер, адже відомо, що при $\theta > 40 - 45^\circ$ апроксимація Акі – Річардса не працює. Крім того, пружний імпеданс $EI(t)$ є формальною величиною і не задовольняє умови розмірності та характеризує деяку уявну величину, яка залежить від кута падіння хвилі на сейсмічну межу і від деякого коефіцієнта

$$K = V_P^{\mathrm{tg}^2\theta} V_S^{t-8g\sin^2\theta} \rho^{t-4g\sin^2\theta}, \qquad (3.81)$$

тобто

$$EI(t) = KI(t). \qquad (3.82)$$

Використання тричленної апроксимації Акі – Річардса при обчисленні $EI_\theta(t)$ означає, що, якщо знайти $EI_\theta(t)$ для трьох різних кутів θ, то з рівняння (3.82) можна визначити три невідомі параметри V_P, V_S і ρ.

Пружний імпеданс є основою інверсії й калібрування сейсмічних даних для ненульових віддалень, аналогічно тому, як акустичний імпеданс – для нульових віддалень. Синтетичні криві пруж-

ного імпедансу можна одержати для будь-якого кута падіння за даними акустичного і гама-гама-щільнісного каротажу. Ці дані розглядаються як значення, що обмежують результати інверсії кутових розрізів розумними величинами вихідних параметрів, так і для прив'язки сейсмічних результатів інверсії до свердловинних даних. Важливою перевагою оцінок пружного імпедансу з кутових розрізів порівняно з даними акустичної інверсії, є можливість урахування в процесі інверсії зміни форми імпульсу при віддаленні, що характерно для всіх реальних сейсмічних даних.

3.12. Багатохвильовий AVO-аналіз

Під багатохвильовим AVO-аналізом розуміють сумісне застосування поздовжніх і поперечних хвиль для вирішення прикладних задач. Аномалії, обумовлені наявністю вуглеводнів, проявляються на результатах застосування поздовжніх і поперечних хвиль неоднаково. Незалежне застосування *P*- і *S*-хвиль для вирішення задач AVO-аналізу може суттєво підвищити стійкість пружної інверсії й одержати більш інформативні результати навіть при використанні невеликих відстаней.

Найпростішим випадком багатохвильового AVO-аналізу можна вважати такий, при якому крім *P*-хвиль використовують обмінні *PS*-хвилі. Ці хвилі реєструють при проведенні сейсмічних досліджень на суші, але особливо якісні результати одержують в акваторії моря, якщо використовують дані коси. Апроксимація Акі – Річардса для коефіцієнта відбиття *PS*-хвилі має вигляд

$$R_{PS}(i,\varphi_1)=\frac{\sin i}{2\cos\varphi i}\left[4\left(\sin^2\varphi_1-\frac{1}{2}\cos i\cos\varphi i\right)\frac{\Delta V_S}{V_S}\right]-$$
$$-\left(\cos 2\varphi_1+\frac{2}{r}\cos i\cos\varphi\right)\frac{\Delta\rho}{\rho},$$
$$r=\frac{V_P}{V_S}, \qquad (3.83)$$

де i та φ_1 – відповідно кути падіння *P*-хвилі і відбиття *PS*-хвилі; $\frac{\Delta V_S}{V_S}$, $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ – відповідно відносні зміни швидкості поперечних хвиль і густини верхньої й нижньої товщ сейсмічної межі.

Якщо обмежитися невеликими кутами, тобто прийняти $\cos\varphi_1 \approx 1$ і $\cos i = 1 - 0{,}5\sin^2 i$, то з урахуванням закону Снелліуса, можна одержати двочленне рівняння

$$R_{PS} = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{r+2}{r}\right)\frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{4}{r}\frac{\Delta V_S}{V_S}\right]\sin i + \\ + \frac{1}{r}\left[\left(\frac{r+2}{2r}\right)\left(\frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{2\Delta V_S}{V_S}\right) - \frac{1}{4r}\frac{\Delta\rho}{\rho}\right]\sin^2 i, \qquad (3.84)$$

де коефіцієнт відбиття є лише функцією кута падіння поздовжньої хвилі на сейсмічну межу.

Неважко переконатися, що перший член цього рівняння (3.84) описує близьку до лінійної частину коефіцієнта відбиття *PS*-хвилі, яка характерна для малих кутів падіння хвилі.

Для реалізації інверсії *PS*-даних, можна ввести поняття пружного імпедансу поперечних хвиль (*SEI*). Його можна одержати аналогічно до пружного імпедансу для *P*-хвиль із формули відбиваючої можливості *PS*-хвилі для довільного кута падіння хвилі:

$$R_{PS}(-i) = -R_{PS}(i) = \frac{SEI_2(i) - SEI_1(i)}{SEI_2(i) + SEI_1(i)}. \qquad (3.85)$$

Оскільки при оцінюванні *SEI* (для зіставлення з даними акустичного і пружного імпедансу) ми користуємося від'ємними відстанями відносно загальної точки обміну, тому у формулі (3.85) з'являється знак мінус.

Беручи до уваги (3.84) і (3.85), знаходимо безпосередньо величину $SEI(i)$:

$$SEI(i) = V_S^{\,m(r,i)}\rho^{n(r,i)}, \qquad (3.86)$$

де $m(r,i) = \frac{4\sin i}{r}\left[1 - \left(\frac{1}{r} + 0{,}5\right)\sin^2 i\right]$; $n(r,i) = \left(1 + \frac{2}{r}\right)\sin i\left[1 - \frac{2r+3}{r(r+2)}\sin^2 i\right]$.

При одержанні виразу (3.86) припущено, що осереднене відношення $V_P / V_S = 2$ сусідніх шарів є сталим.

Для випадку $i = 0$ величина SEI $(i = 0)$ дорівнює нулю (немає контрасту імпедансів) через відсутність обміну *P*-хвилі на *S*-хвилю.

Для пружної інверсії можна скористатися інверсією комплексу поздовжніх і поперечних хвиль. Якщо скористатися системою рівнянь

$$r_0^{PP} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta V_P}{V_P} + \frac{\Delta\rho}{\rho}\right), \tag{3.87}$$

$$r_0^{PS} = \frac{1}{2}\frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{2V_S}{V_P}\left(\frac{1}{2}\frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{\Delta V_S}{V_S}\right), \tag{3.88}$$

$$r_1^{PS} = -\left[\frac{V_S}{V_P}\left(1+\frac{2V_S}{V_P}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{\Delta V_S}{V_S}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{V_S}{V_P}\right)^2\frac{\Delta\rho}{\rho}\right], \tag{3.89}$$

то можна знайти розв'язок оберненої задачі у вигляді

$$\frac{\Delta V_P}{V_P} = 2\left[r_0^{PP} - \frac{\left(1+\frac{2V_S}{V_P}\right)}{\left(1+\frac{V_S}{V_P}\right)} r_0^{PS} - \frac{2}{\left(1+\frac{V_S}{V_P}\right)^2} r_1^{PS}\right], \tag{3.90}$$

$$\frac{\Delta V_S}{V_S} = -\frac{1+\frac{2V_S}{V_P}}{\frac{V_S}{V_P}\left(1+\frac{V_S}{V_P}\right)} r_1^{PS} - \frac{1+\frac{3V_S}{V_P}}{2\left(1+\frac{V_S}{V_P}\right)^2} r_0^{PS}, \tag{3.91}$$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{2}{\left(1+\frac{V_S}{V_P}\right)^2}\left[\left(1+\frac{2V_S}{V_P}\right) r_0^{PS} + 2r_1^{PS}\right]. \tag{3.92}$$

Для розв'язування оберненої задачі щодо комплексу поздовжніх і поперечних *SV*-хвиль можна скористатися коефіцієнтами r_0^{PP}, r_1^{PP}, r_0^{SV}, r_1^{SV}. Застосування комплексу поздовжніх і поперечних хвиль забезпечує вищу точність і стійкість розв'язку задачі пружної інверсії сейсмічних даних.

3.13. AVO-аналіз упорядкованого геологічного середовища

3.13.1. Особливості поширення пружних хвиль в упорядкованому геологічному середовищі

Сейсмічні дослідження геоформацій осадових басейнів свідчать про наявність анізотропії швидкостей і поляризації пружних хвиль. Сейсмічна анізотропія відображає суттєву особливість будови геологічного середовища, насамперед, наявність у ньому упорядкованості, яка або існує в геологічному середовищі, або індукована зовнішніми причинами: напруженим станом, термопружними напругами, тектонічними силами, техногенними факторами тощо. Наявність упорядкованості в геологічному середовищі проявляється тим, що швидкості пружних хвиль залежать від напрямку їх поширення, крім того, суттєво змінюється характер поляризації *S*-хвиль.

Так звана азимутальна поперечна ізотропія характерна для геологічного середовища поперечно-ізотропної симетрії (симетрія геометричної фігури-циліндра із головною віссю нескінченного порядку), в якому головна вісь вертикальна, а площина симетрії горизонтальна і є площиною ізотропії.

Азимутальна анізотропія проявляється у випадку, коли головна вісь симетрії горизонтальна, а площина симетрії – вертикальна, або упорядкованість геологічна має триклинну або ромбічну симетрію.

Коефіцієнт анізотропії сейсмічних хвиль поздовжньої поляризації може сягати 10 %, а хвиль поперечної поляризації – 10…30 %.

Даними регіональних сейсмічних спостережень установлено явище розщеплення хвиль поперечної поляризації та майже однакова орієнтація векторів поляризації *S*-хвиль перпендикулярно до напрямку мінімальних діючих напруг стискання.

Пояснення цим явищам слід шукати серед факторів, які зумовлюють сейсмічну анізотропію в земній корі, найважливішими з яких є такі:

1) кристалографічна орієнтація зерен мінералів гірських порід в умовах дії напруг і температури (орієнтацію обумовлено пластичністю, плинністю та перекристалізацією);

2) літологічні фактори (літологічна анізотропія), яка обумовлена текстурно-структурними особливостями гірських порід: просторовою орієнтацією (розташуванням) зерен мінералів певної форми, уламків та кристалізаційною смугастістю;

3) анізотропія, викликана орієнтацією мікротріщин гірських порід, сланцюватістю, кліважем;

4) анізотропія, викликана літологічною шаруватістю осадових формацій, їх упорядкованою тектонічною тріщинуватістю;

5) анізотропія, індукована діючим напружено-деформованим станом та діючим геодинамічним флюїдним режимом. Ця напруга називається екстенсивною анізотропією дилатансії.

Для анізотропії осадових геоформацій уведено поняття "квазіанізотропії", яка проявляється при сейсмічних спостереженнях, коли довжина сейсмічних хвиль значно більша за потужність шарів і відстань між сусідніми тріщинами.

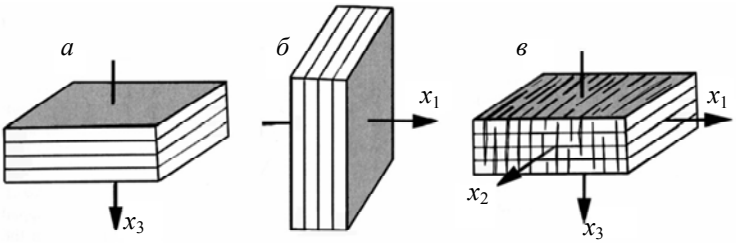


Рис. 3.15. Моделі типів анізотропних середовищ, які застосовують у сейсморозвідці:
а – вертикальна поперечно-ізотропна модель (ВПІ); *б* – горизонтальна поперечно-ізотропна модель (ГПІ); *в* – ортотропна модель (стрілками позначено напрямки координаційних осей, уздовж яких орієнтовані осі симетрії моделей)

Квазіанізотропія осадових геоформацій належить до класу поперечно-ізотропної симетрії (або трансверсально-ізотропної). Площина ізотропії в них розташована паралельно площопаралельній шаруватості або тріщинуватості.

Різні моделі поперечно-ізотропного упорядкованого геологічного середовища зображено на рис. 3.15, *а*. Якщо головна вісь

симетрії направлена вертикально , то таке середовище називається вертикальним поперечно-ізотропним середовищем (ВПІ). У випадку горизонтальної орієнтації головної осі симетрії середовище називають горизонтальним поперечно-ізотропним середовищем (ГПІ), яке показано на рис. 3.15, *б*. Геологічне упорядковане середовище, яке представляє собою вертикальне поперечно-ізотропне середовище (горизонтально-шарувату товщу), котре пронизане системою вертикальних тріщин (горизонтальне поперечно-ізотропне середовище), відповідно до принципу суперпозиції елементів груп симетрії матиме ромбічну симетрію. Таке середовище називають ортотропним середовищем.

Поширення плоских монохроматичних гармонійних пружних хвиль в однорідному анізотропному (або квазіанізотропному) середовищі описують рівнянням Гріна – Крістоффеля:

$$\left(\Gamma_{il} - \rho\ \upsilon^2 \delta_{il}\right) U_l = 0, \tag{3.93}$$

де $\Gamma_{il} = C_{ijkl} n_j n_k$ – тензор Крістоффеля; C_{ijkl} – тензор пружних сталих анізотропного середовища; n_j – компонента вектора хвильової нормалі; U_l – компонента вектора пружних зміщень; ρ, υ – густина і фазова швидкість хвилі; δ_{il} – символ Кронекера.

Рівняння (3.93) має єдиний розв'язок, якщо детермінат, складений із коефіцієнтів при U_l, дорівнює нулю:

$$\left(\Gamma_{il} - \rho\ \upsilon^2 \delta_{il}\right) = 0\,. \tag{3.94}$$

Рівняння (3.94) є кубічним рівнянням, яке має три дійсні корені. Ці корені для заданого напрямку хвильової нормалі є власними значеннями тензора Крістоффеля: $(\rho\upsilon^2)'$, $(\rho\upsilon^2)''$, $(\rho\upsilon^2)'''$. Після послідовної підстановки власних значень у рівняння (3.93) знаходимо їх власні вектори $\vec{U}'$, $\vec{U}''$, $\vec{U}'''$.

Власні вектори взаємно ортогональні і свідчать про те, що у анізотропному пружному середовищі існує лише три дозволені (власні) напрямки пружних зміщень хвиль. Таким чином, із розв'язку рівняння Гріна – Крістоффеля випливає, що в будь-якому напрямку хвильової нормалі анізотропного середовища розповсюджуються три фазові швидкості, які мають взаємно ортогональні

вектори пружних зміщень: 1) квазіпоздовжня V_1, вектор пружних зміщень якої утворює найменший кут із вектором хвильової нормалі, а її фазова швидкість є найбільшою; 2) повільна квазіпоперечна V_3, фазова швидкість якої найменша, а її вектор зміщень перпендикулярний вектору пружних зміщень квазіпоздовжньої хвилі; 3) швидка квазіпоперечна V_2, фазова швидкість якої має проміжне значення, а її вектор пружних зміщень ортогональний площині, в якій містяться квазіпоздовжня і повільна квазіпоперечна хвилі.

Вектор пружних зміщень жодної з означених вище хвиль не колінеарний вектору хвильової нормалі, тому їх називають *квазіхвилями*. Це і є фундаментальною ознакою хвиль, які поширюються в анізотропному середовищі.

Вектор променевої швидкості пружних хвиль $\vec{V}^{(e)}$ можна визначити за формулою

$$V_j^{(e)} = C_{ijkl} \frac{u_i n_k u_l}{\rho \upsilon}. \tag{3.95}$$

Тоді легко переконатися в такому: якщо вектор променевої швидкості скалярно помножити на вектор хвильової нормалі

$$V_j^{(e)} n_j = \upsilon, \tag{3.96}$$

то проекція вектора променевої швидкості на хвильову нормаль і є фазовою швидкістю. Таким чином, в анізотропному середовищі фазова і променева швидкості неоднакові.

При поширенні пружних хвиль в ізотропному середовищі для будь-якого напрямку хвильової нормалі характерні такі закономірності:

1) одна з трьох ізонормальних хвиль завжди є чистою поздовжньою хвилею, вектор пружних зміщень якої колінеарний вектору хвильової нормалі;

2) уздовж будь-якого напрямку хвильової нормалі поширюються чисті поперечні хвилі з однаковими фазовими швидкостями;

3) із трійки взаємно ортогональних векторів пружних зміщень обов'язково два вектори пружних зміщень поперечних хвиль ортогональні й до вектора хвильової нормалі;

4) вектор променевої швидкості поздовжньої хвилі колінеарний вектору хвильової нормалі, а вектори променевої швидкості поперечної хвилі ортогональні до вектора хвильової нормалі;

5) уздовж кожної хвильової нормалі променеві, групові й фазові швидкості поширюються з однаковими швидкостями.

У загальному випадку всі означені закономірності в анізотропному середовищі можуть не виконуватися.

Симетрія геологічного середовища накладає жорсткі обмеження на кількість незалежних пружних сталих C_{mn}, зокрема, у випадку поперечно-ізотропного середовища їх виявляється лише п'ять:

$$C_{mn} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix}, \qquad (3.97)$$

де $C_{66} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})$.

У цьому випадку розв'язок рівняння Гріна – Крістоффеля можна одержати у аналітичній формі:

$$2\rho V_i^2 = C_{44} + C_{11}\sin^2\theta + C_{33}\cos^2\theta \pm$$

$$\pm\left\{\left[\left(C_{11} - C_{44}\right)\sin^2\theta + \left(C_{44} - C_{33}\right)\cos^2\theta\right]^2 + \left(C_{13} - C_{44}\right)^2\sin^2 2\theta\right\}^{1/2}, \qquad (3.98)$$

$$\rho V_3^2 = C_{66}\sin^2\theta + C_{44}\cos^2\theta, \qquad (3.99)$$

де V_3 – поперечна хвиля, вектор поляризації якої перпендикулярний до площини, яка проходить паралельно головній осі симетрії (цю хвилю в сейсморозвідці позначають $V_{SH} = V_3$); V_1, V_2 – квазіпоздовжня і квазіпоперечна хвилі, вектори поляризації яких перебувають у площині, яка паралельна головній осі симетрії (хвилю V_2 у сейсморозвідці позначають V_{SV}).

У випадку слабкої сейсмічної анізотропії (менше 5 %) для фазових швидкостей використовують наближення Томпсона:

$$V_{qP}(\theta) \approx \alpha_0 \left[1 + \delta \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right], \tag{3.100}$$

$$V_{SV}(\theta) \approx \beta_0 \left[1 + \frac{\alpha(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\beta^2} \right], \tag{3.101}$$

$$V_{SV}(\theta) \approx \beta_0 \left(1 + \gamma \sin^2 \theta \right). \tag{3.102}$$

Променеву швидкість $\vec{V}^{(l)}$ у поперечно-ізотропному середовищі можна представити в параметричній формі через фазові швидкості:

$$\vec{V}^{(l)}(\theta) = \left[V_j^2(\theta) + \left(\frac{dV_j}{d\theta} \right)^2 \right]^{1/2}, \tag{3.103}$$

$$\Psi_j(\theta) = \theta + \arctan \left(\frac{d \ln V_j}{d\theta} \right), \tag{3.104}$$

де θ – кут між хвильовою нормаллю і головною віссю симетрії; $\Psi(\theta)$ – кут між променем і головною віссю симетрії.

В явній формі для апроксимації Томпсона співвідношення (3.94) можна представити в явній формі:

$$\tan \Psi_P = \tan \theta_P \left[1 + 2\delta + 4(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta_P \right], \tag{3.105}$$

$$\tan \Psi_{SV} = \tan \theta_{SV} \left[1 + 2 \left(\frac{\alpha_0}{\beta_0} \right)^2 (\varepsilon - \delta)(1 - 2 \sin^2 \theta_{SV}) \right], \tag{3.106}$$

$$\tan \Psi_{SH} = \tan \theta_{SH} \left(1 + 2\gamma \right), \tag{3.107}$$

де $\theta_P, \theta_{SV}, \theta_{SH}$ – фазові кути квазіпоздовжніх, квазіпоперечних *SV* і поперечних *SH* хвиль; $\Psi_P, \Psi_{SV}, \Psi_{SH}$ – променеві кути для цих самих хвиль.

Для апроксимації Томпсона вираз для променевої швидкості (3.103), можна представити, скориставшись його розвиненням у зрізаний ряд Фур'є:

$$\left[V^2(\Psi) \right]^{-2} = a_0 + a_1 \sin^2 \Psi + a_2 \sin^4 \Psi, \tag{3.108}$$

де коефіцієнти розвинення Фур'є для різних типів хвиль мають вигляд

для V_{qp}:

$$a_0 = a_0^{-2};\ a_1 = -28a_0^{-2};\ a_2 = 2(\delta - \varepsilon)a_0^{-2}; \tag{3.109}$$

для SV:

$$a_0 = \beta_0^{-2};\ a_1 = -2\alpha_0^{-2}\left(\frac{\alpha_0}{\beta_0}\right)^2(\delta - \varepsilon);\ a_2 = -2\beta_0^{-2}\left(\frac{\alpha_0}{\beta_0}\right)^2(\delta - \varepsilon); \tag{3.110}$$

для SH:

$$a_0 = \beta_0^{-2};\ a_1 = -2\gamma\beta_0^{-2};\ a_2 = 0. \tag{3.111}$$

Якщо головна вісь симетрії поперечно-ізотропного геологічного середовища горизонтальна, то коефіцієнти розвинення Фур'є $a_0,\ a_1,\ a_2$ променевої швидкості визначаються із співвідношень для квазіпоздовжньої хвилі:

$$a_0 = \alpha_0^{-2}(1 - 2\varepsilon);\ a_1 = -2\alpha_0^{-2}(2\varepsilon - \delta)\cos^2(\varphi_1 - \varphi_2);\ a_2 = \\ = -2\alpha_0^{-2}(\delta - \varepsilon)\cos^4(\varphi_1 - \varphi_2); \tag{3.112}$$

для квазіпоперечної хвилі *SV*:

$$a_0 = \beta_0^{-2}; a_1 = -2\beta_0^{-2}\left(\frac{\alpha_0}{\beta_0}\right)^2(\delta - \varepsilon)\cos^2(\varphi_1 - \varphi_2); a_2 = \\ = -2\beta_0^{-2}\left(\frac{\alpha_0}{\beta_0}\right)^2(\delta - \varepsilon)\cos^4(\varphi_1 - \varphi_2); \tag{3.113}$$

для поперечної хвилі *SH*:

$$a_0 = \beta_0^{-2}(1 - 2\gamma); a_1 = -2\beta_0^{-2}\gamma\cos^2(\varphi_1 - \varphi_2); a_2 = 0, \tag{3.114}$$

де φ_1 – кут між горизонтальною віссю X і напрямком сейсмічного профілю; φ_2 – кут між головною віссю симетрії і віссю X.

3.13.2. Задача відбиття-заломлення хвиль на межі двох анізотропних середовищ

У задачах на відбиття і заломлення плоских хвиль на межі, яка розділяє два анізотропні півпростори, основні труднощі логічного

характеру виникають при постановці задачі. При цьому вважатимемо, що при відбитті-заломленні плоскої хвилі на плоскій межі збурюються плоскі відбиті й заломлені хвилі, а також виконується умова випромінювання. Згідно з цією умовою під падаючою хвилею розуміють плоску хвилю, вектор променевої швидкості якої направлений на межу двох анізотропних півпросторів. Під відбитою і заломленою хвилями розуміють плоскі хвилі, які поширюються від межі, тобто хвилі, променеві вектори яких направлені від відбиваючої межі.

При поширенні монохроматичної плоскої пружної хвилі з певною поляризацією через межу поділу двох анізотропних середовищ в загальному випадку виникають три хвилі на кожному боці цієї межі. Наприклад, падаюча квазіпоздовжня хвиля може породжувати як у першому анізотропному середовищі квазіпоздовжню і квазіпоперечну ("швидку" і "повільну") відбиті хвилі, так і в другому середовищі – також квазіпоздовжню і квазіпоперечну ("швидку" і "повільну") заломлені хвилі.

Якщо два анізотропні середовища жорстко зв'язані між собою межовою плоскою поверхнею, то межові умови зводяться:

1) до неперервності векторів переміщень u_i на межі;

2) до неперервності механічних напруг F_i в кожній точці межової поверхні.

Рівняння плоскої межової поверхні з нормаллю $\vec{q}\,[q_1, q_2, q_3]$ і з початком системи координат на межі поділу має вигляд

$$q_i r_i = 0, \tag{3.115}$$

де r_i – компоненти радіуса-вектора будь-якої точки межової поверхні.

Згідно з межовими умовами, у кожній точці межової поверхні в будь-який момент часу виконуються співвідношення:

$$u_i^p + \sum_R u_i^R = \sum_T u_i^T, \tag{3.116}$$

$$\sigma_{ji}^{\,p} + \sum_R \sigma_{ij}^{\,R} = \sum_T \sigma_{ij}^{\,T}, \tag{3.117}$$

де індекси *P, R, T* позначають відповідно падаючі, відбиті і заломлені хвилі.

Для плоских монохроматичних гармонійних хвиль:

$$u_i = u_i^0 e^{i\varphi} = u_i^0 e^{i\omega(\vec{m}\vec{r}-t)},$$
$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} m_k U_l^0 e^{i\omega(\vec{m}\vec{r}-t)}, \qquad (3.118), (3.119)$$

де $\vec{m} = \frac{\vec{n}}{\upsilon}$; $\varphi = i\omega(\vec{m}\vec{r} - t)$.

Вираз (3.118) можна записати компактно

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 e^{i\varphi}, \qquad (3.120)$$

де $\sigma_{ij}^0 = i\omega\, C_{ijkl} m_k U_l^0$. (3.121)

У результаті межові умови (3.116) і (3.117) з урахуванням (3.118)–(3.121) набувають вигляду

$$u_i^{(p)} e^{i\varphi^{(P)}} + \sum_R u_i^{(R)} e^{i\varphi^{(R)}} = \sum_T u_i^T e^{i\varphi^{(T)}}, \qquad (3.122)$$

$$\sigma_{ji}^{(p)} e^{i\varphi^P} + \sum_R \sigma_{ji}^{(R)} e^{i\varphi^R} = \sum_T \sigma_{ji}^{(T)} e^{i\varphi^T}. \qquad (3.123)$$

Оскільки вирази при фазових множниках $e^{i\varphi^P}, e^{i\varphi^R}, e^{i\varphi^T}$ не залежать від координат і часу, то рівняння (3.122) і (3.118) представляють собою лінійні співвідношення між експоненціальними функціями, які повинні тотожно задовольнятися в будь-який момент часу і в усіх точках межової поверхні. Відомо, що експоненціальні функції з різними показниками є лінійно незалежними, тому рівняння (3.122) і (3.123) можуть задовольнятися лише за умови

$$\varphi^P = \varphi^R = \varphi^T \quad \text{або}$$
$$\omega^P(\vec{m}^P\vec{r} - t) = \omega^R(\vec{m}^R\vec{r} - t) = \omega^T(\vec{m}^T\vec{r} - t). \qquad (3.124)$$

Вираз (3.124) справедливий при будь-якому t, це означає, що

$$\omega^P = \omega^R = \omega^T. \qquad (3.125)$$

Таким чином, при відбитті і заломленні частота хвилі не змінюється.

Тоді з рівняння (3.124) випливає

$$\vec{m}^P\vec{r} = \vec{m}^R\vec{r} = \vec{m}^T\vec{r}. \qquad (3.126)$$

Беручи до уваги, що

$$\vec{q}\vec{r} = 0,$$

співвідношення (3.126) можна переписати так:

$$(\vec{m}^{\,R}-\vec{m}^{\,P})\vec{r}=0;\quad (\vec{m}^{\,T}-\vec{m}^{\,P})\vec{r}=0, \tag{3.127}$$

із яких випливає, що будь-який радіус-вектор, перпендикулярний до вектора $\vec{q}$, має бути перпендикулярний і до різниці будь-яких векторів рефракції, які входять у співвідношення (3.118)–(3.121).

Зауважимо, що різниці векторів рефракції паралельні вектору $\vec{q}$:

$$\begin{aligned}&(\vec{m}^{\,R}-\vec{m}^{\,P})\parallel \quad (\vec{m}^{\,T}-\vec{m}^{\,P})\parallel\\ &\parallel\ (\vec{m}^{\,R}-\vec{m}^{\,T})\parallel\vec{q},\end{aligned} \tag{3.128}$$

$$\begin{aligned}&[(\vec{m}^{\,R}-\vec{m}^{\,P})\times\vec{q}]=[(\vec{m}^{\,T}-\vec{m}^{\,P})\times\vec{q}]=\\ &=[(\vec{m}^{\,R}-\vec{m}^{\,T})\times\vec{q}]=0.\end{aligned} \tag{3.129}$$

Це приводить до рівності

$$[\vec{m}^{\,R}\times\vec{q}]=[\vec{m}^{\,P}\times\vec{q}]=[\vec{m}^{\,T}\times\vec{q}]. \tag{3.130}$$

Рівняння (3.130) виражає загальний закон відбиття і заломлення плоских пружних хвиль на межі будь-яких двох середовищ у коваріантній векторній формі.

Із формули (3.130) випливає, що за наявності на межі двох середовищ декількох плоских хвиль векторні добутки векторів рефракції всіх цих хвиль на вектор нормалі до поверхні межі мають дорівнювати один одному.

Позначимо $\vec{a}$ вектор, який дорівнює будь-якому векторному добутку

$$\vec{a}=[\vec{m}^{\,R}\times\vec{q}]=[\vec{m}^{\,P}\times\vec{q}]=[\vec{m}^{\,T}\times\vec{q}], \tag{3.131}$$

тоді всі вектори $\vec{q}$, $\vec{m}^{R}$, $\vec{m}^{P}$, $\vec{m}^{T}$ будуть перпендикулярні вектору $\vec{a}$. А це можливо в тому випадку, коли вони лежать в одній площині, яка називається *площиною падіння* і рівняння якої має вигляд

$$\vec{a}\ \vec{r}=0. \tag{3.132}$$

Порівнюючи між собою абсолютні значення векторних добутків (3.130) $|m||q|\sin\psi$, $(|\vec{m}|=\frac{1}{\upsilon})$, $|\vec{q}|=1$, маємо

$$\left|\vec{m}^{\,P}\right||q|\sin\psi^{\,P}=\left|\vec{m}^{\,R}\right||q|\sin\psi^{\,R}=\left|\vec{m}^{\,T}\right||q|\sin\psi^{\,T} \tag{3.133}$$

або

$$\frac{\sin\psi^{P}}{\upsilon_1}=\frac{\sin\psi^{R}}{\upsilon_1}=\frac{\sin\psi^{T}}{\upsilon_1}, \tag{3.134}$$

де ψ^P,ψ^R,ψ^T – кути, які утворюють вектори рефракції відповідно до хвилі з нормаллю ($\cos\psi=\vec{n}\cdot\vec{q}$). Як видно, синуси цих кутів пропорційні відповідним фазовим швидкостям.

Домножимо співвідношення (3.131) векторно на $\vec{q}$:

$$[\vec{q}\times\vec{a}]=\vec{b}, \tag{3.135}$$

тобто $\vec{b}$ – це проекція вектора рефракції на межу поділу. Уведемо величину

$$\xi=\vec{m}\cdot\vec{q}, \tag{3.136}$$

яка є проекцією вектора рефракції на нормаль до поверхні поділу.

Таким чином, для всіх хвиль, які існують на межі двох середовищ, проекції їх векторів рефракції на межову поверхню ($\vec{b}$) повинні дорівнювати одна одній. Вектори рефракції відрізняються один від одного лише проекціями на нормаль до поверхні поділу (рис. 3.16).

Отже, якщо через кінець вектора $\vec{b}$ провести пряму, паралельну вектору $\vec{q}$, то кінці векторів $\vec{m}$, якщо їх відкладати від однієї точки, лежатимуть на цій прямій. Це є спосіб побудови площини падіння, яка визначається векторами $\vec{q}$ і $\vec{b}$.

Таким чином, коли відомі поверхні рефракції двох анізотропних середовищ, то після побудови векторів $\vec{q}$ і $\vec{b}$ необхідно через кінець вектора $\vec{b}$ провести пряму *AB*, паралельну $\vec{q}$ і знайти кінці векторів $\vec{m}$ як точку її перетину з усіма порожнинами поверхні рефракції у першому і другому середовищі.

Аналітичне розв'язання задачі відбувається за допомогою рівняння поверхні рефракції анізотропного середовища

$$\begin{vmatrix} \Lambda^m-1 \end{vmatrix}=0,$$
$$\text{де } \Lambda^m=\frac{1}{\upsilon^2}\Lambda^n \quad (\text{тут } \Lambda^n=C_{ijkl}n_jn_k/\rho), \tag{3.137}$$

підстановкою загального виразу для вектора рефракції

$$\vec{m} = \vec{b} + \xi\,\vec{q}, \tag{3.138}$$

де ξ — не визначений параметр; $\vec{q}$ і $\vec{b}$ — задані рівняння поверхні рефракції, які можна представити в розгорнутому вигляді:

$$\left|\Lambda^m\right| - \overline{\Lambda}_c^m + \Lambda_c^m - 1 = 0, \tag{3.139}$$

де $\left|\Lambda^m\right| = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}\Lambda_{il}^m\Lambda_{jm}^m\Lambda_{kn}^m$; $\overline{\Lambda}_c = \frac{1}{2}(\Lambda_{ii}^m\Lambda_{jj}^m - \Lambda_{ij}\Lambda_{ji})$; $\Lambda_c^m = \Lambda_{ii}$.

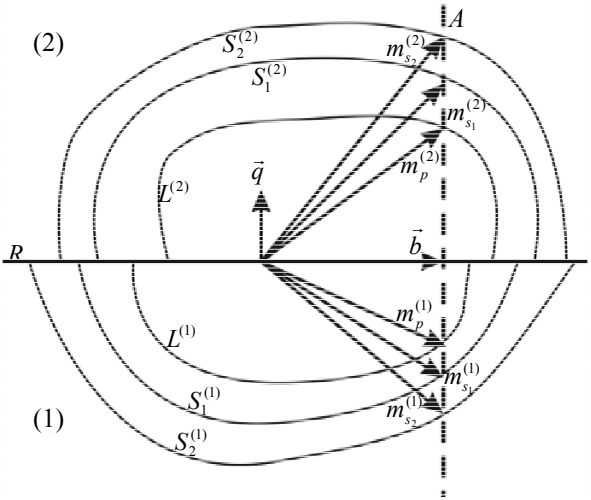


Рис. 3.16. Поверхні рефракції основних типів хвиль 1-го і 2-го анізотропних середовищ:

$L^{(1)}, L^{(2)}$ – поверхні рефракції поздовжньої поляризації;

$S_1^{(1)}, S_1^{(2)}$ – поверхні рефракції "повільної" хвилі поперечної поляризації;

$S_2^{(1)}, S_2^{(2)}$ – поверхня рефракції "швидкої" хвилі поперечної поляризації

Рівняння (3.139) є рівнянням шостого степеня відносно компонент вектора рефракції $\vec{m}$.

Якщо всі 6 коренів є дійсними, то це означає що пряма AB перетинає всі порожнини поверхні рефракції над (під) площиною межі. Для точок, які лежать над межею, $\xi < 0$; для точок під межею – $\xi > 0$ (рис. 3.16).

Вочевидь, тоді для векторів, що поширюються в першому середовищі, треба взяти три від'ємні корені, а для другого – три додатні корені.

Якщо виконуються ці умови, то при заданому векторі $\vec{b}$ в загальному випадку із межових умов випливає можливість наявності поблизу межі шести різних плоских хвиль – трьох у першому середовищі і трьох у другому. Звертаємо увагу на умову, якщо задано вектор $\vec{b}$. Наявність межі спричиняє виникнення, крім падаючої, ще й відбитих і заломлених хвиль.

Суть задачі відбиття-заломлення зводиться до знаходження напрямків поширення, швидкостей (векторів рефракції) та векторних амплітуд відбитих і заломлених хвиль.

Падаюча хвиля біля межі, як і всі хвилі взагалі, повинна задовольняти загальні межові умови. Тому її вектор рефракції $\vec{m}_0$ має бути представлений у формі (3.138).

Якщо відомий вектор рефракції падаючої хвилі $\vec{m}_0$, то маємо

$$\vec{a} = [\vec{m}_0 \times \vec{q}], \tag{3.140}$$

$$\vec{b} = [\vec{q} \times [\vec{m}_0 \times \vec{q}]]. \tag{3.141}$$

Таким чином, визначаємо орієнтацію площини падіння ($\vec{a}$) і вектор $\vec{b}$. Тоді з розв'язку системи рівнянь

$$\left|\Lambda^m - 1\right| = 0, \tag{3.142}$$

$$\vec{m} = \vec{b} + \xi\vec{q} \tag{3.143}$$

знаходимо вектори рефракції шести хвиль: трьох відбитих і трьох заломлених. Далі можемо одержати швидкості й напрямки поширення відбитих і заломлених хвиль.

Для визначення амплітуд усіх типів хвиль використаємо рівняння Крістоффеля в такій формі:

$$(\Lambda_{il}{}^m - \delta_{il})U_l = 0. \tag{3.144}$$

Оскільки вектор рефракції задовольняє рівняння (3.142), то розв'язок рівняння (3.121) можна представити у такому вигляді:

$$(\vec{U} \times \vec{U})_{sk} = \frac{1}{2} A\varepsilon_{ijs}\varepsilon_{emn}(\Lambda^m{}_{is} - 1)(\Lambda_{jn} - 1), \tag{3.145}$$

де ε_{ijs} – тензор Леві – Чівіта; A – довільна стала.

Якщо домножити вираз (3.145) на довільний вектор $\vec{p}(\vec{U}\vec{p} \neq 0)$, то одержимо

$$\vec{U}_i = A\varepsilon_{ijs}\varepsilon_{emn}(\Lambda^m{}_{is} - 1)(\Lambda_{jn} - 1)p_n. \qquad (3.146)$$

Таким чином, якщо відомі вектори рефракції, то можна знайти вектори пружних зміщень усіх шести відбитих і заломлених хвиль із точністю до невизначених скалярних множників A. Для одержання A слід підставити вираз (3.146) у межові умови:

$$\vec{U}_0 + \vec{U}_1 + \vec{U}_2 + \vec{U}'_0 + \vec{U}'_1 + \vec{U}'_2 - (\vec{U}''_0 + \vec{U}''_1 + \vec{U}''_2) = 0, \qquad (3.147)$$

$$\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma'_0 + \sigma'_1 + \sigma'_2 - (\sigma''_0 + \sigma''_1 + \sigma''_2) = 0, \qquad (3.148)$$

де $(\vec{U}_0 + \vec{U}_1 + \vec{U}_2)$, $(\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2)$ – векторні амплітуди зміщень і тензорні амплітуди напруг для падаючих хвиль: квазіпоздовжньої і квазіпоперечних відповідно. Тут одним і двома штрихами позначено відбиті та заломлені хвилі. У результаті одержимо шість лінійних рівнянь, в які, поряд із знайденими величинами векторів пружних зміщень, входитимуть і шість невідомих коефіцієнтів $(A'_0, A'_1, A'_2, A''_0, A''_1, A''_2)$ Розв'язавши ці рівняння відносно довільної сталої A, знайдемо всі параметри відбитих і заломлених хвиль.

3.13.3. Коефіцієнти відбиття і заломлення хвиль на межі двох поперечно-ізотропних середовищ із вертикальною віссю симетрії

Загальну картину відбиття і заломлення плоскої квазіпоздовжньої хвилі, яка падає на межу двох поперечно-ізотропних середовищ із вертикальною віссю симетрії розглянуто в підрозд. 3.1.

У задачу визначення коефіцієнтів відбиття і заломлення хвиль на межі двох поперечно-ізотропних середовищ із вертикальною віссю симетрії введено певні спрощення, оскільки при будь-якому напрямку хвильової нормалі рівняння Гріна – Крістоффеля розпадається на лінійне і квадратне рівняння.

Це суттєво полегшує визначення напрямків поширення хвиль і їх швидкостей, тобто компонент векторів рефракції, якщо ці величини задано для падаючої хвилі. Для компонент вектора рефракції можна одержати рівняння:

$$\begin{vmatrix} (A_{11}m^2{}_1 + A_{55}m^2{}_3 - 1) & 0 & (A_{13} - A_{44})m_1m_3 \\ 0 & (A_{66}m^2{}_1 + A_{44}m^2{}_3 - 1) & 0 \\ (A_{13} - A_{44})m_1m_3 & 0 & (A_{44}m^2{}_1 + A_{33}m^2{}_3 - 1) \end{vmatrix}, \quad (3.149)$$

де $A_{mn} = \dfrac{C_{mn}}{\rho}$ (тут C_{mn} – пружні сталі; ρ – густина поперечно-ізотропного середовища).

Для визначення $\xi = m_3$ з рівняння (3.149) знаходимо компоненти векторів рефракції для квазіпоздовжньої (V_{qP}) і квазіпоперечної хвиль (V_{SV}).

Для поздовжньої хвилі

$$m'_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(k_1 - \sqrt{k^2{}_1 - 4k_2k_3})^{\frac{1}{2}}, \quad (3.150)$$

для поперечної хвилі

$$m''_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(k_1 + \sqrt{k^2{}_1 - 4k_2k_3})^{\frac{1}{2}}, \quad (3.151)$$

де $k_1 = \dfrac{1}{A_{33}} + \dfrac{1}{A_{44}} - 2\{\dfrac{A_{11}}{A_{44}} + \dfrac{A_{44}}{A_{33}} - \dfrac{(A_{13} + A_{44})^2}{A_{33}A_{44}}\}m^2{}_1$, $k_2 = \dfrac{A_{11}}{A_{33}}m^2{}_1 - \dfrac{1}{A_{44}}$.

Числові розрахунки фазових швидкостей квазіпоздовжніх і квазіпоперечних хвиль виконаємо за формулою

$$2\rho V^2{}_{qP,SV} = \Gamma_{11} + \Gamma_{33} \pm \sqrt{(\Gamma_{11} + \Gamma_{33})^2 + \Gamma^2{}_{13}}, \quad (3.152)$$

де $\Gamma_{11} = C_{11}n^2{}_1 + C_{44}n^2{}_3$, $\Gamma_{33} = C_{44}n^2{}_1 + C_{33}n^2{}_3$, $\Gamma_{13} = (C_{13} + C_{44})n_1n_3$.

Якщо прийняти для падаючої квазіпоздовжньої хвилі $\theta_0 = \theta_1$ і $x = \sin\theta_1$, то за законом Снелліуса

$$\frac{\sin\theta_0}{V_0} = \frac{\sin\theta_\upsilon}{V_\upsilon}, \quad \upsilon = 1,2,3,4, \quad (3.153)$$

де V_0 – падаюча квазіпоздовжня хвиля; V_1 – відбита квазіпоздовжня хвиля; V_2 – заломлена квазіпоздовжня хвиля; V_3 – відбита квазіпоперечна хвиля; V_4 – заломлена квазіпоперечна хвиля,

можна одержати такі співвідношення:

$$\frac{V_1}{V_2} = n, \quad \frac{V_4}{V_2} = k_2, \quad \frac{V_3}{V_1} = k_1, \tag{3.154}$$

$$\cos\theta_1 = P = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.155}$$

$$\cos\theta_2 = Q = (1 - k^2{}_1 x^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.156}$$

$$\cos\theta_3 = S = (1 - \frac{x^2}{n^2})^{\frac{1}{2}}, \tag{3.157}$$

$$\cos\theta_4 = R = (1 - \frac{k^2{}_2 x^2}{n^2})^{\frac{1}{2}}, \tag{3.158}$$

$$C^{(\upsilon)}{}_{55} = \begin{cases} \beta_1, \\ \beta_2, \end{cases} \quad \upsilon = 1,2,3,4, \tag{3.159}$$

$$e_3 C^{(3)}{}_{33} - m_3 C^{(3)}{}_{13} = \delta_1, \tag{3.160}$$

$$e_4 C^{(4)}{}_{33} - m_4 C^{(4)}{}_{13} = \delta_2, \tag{3.161}$$

$$\frac{V_1}{V_3}\frac{1}{(e_1 + m_1)}\{m_3 + \cos^2\theta_3 - e_3 \sin^2\theta_3\} = \omega_1, \tag{3.162}$$

$$\frac{V_1}{V_4}\frac{1}{(e_1 + m_1)}\{m_4 + \cos^2\theta_4 - e_4 \sin^2\theta_4\} = \omega_2, \tag{3.163}$$

$$e_1 C^{(1)}{}_{13} + (m_1 C^{(1)}{}_{33} - e_1 C^{(1)}{}_{13})\cos^2\theta_1 = \varphi_1, \tag{3.164}$$

$$\frac{V_1}{V_2}\{e_2 C^{(2)}{}_{13} + (m_2 C^{(2)}{}_{33} - e_2 C^{(2)}{}_{13}\}\cos^2\theta_4 = \varphi_2, \tag{3.165}$$

$$\frac{e_2 + m_1}{e_1 + m_1} = l, \tag{3.166}$$

$$l_\upsilon = \left\{ \frac{\left[(Q^{(\upsilon)} - A^{(\upsilon)}{}_{33} + A^{(\upsilon)}{}_{44}) / \sin^2\theta_\upsilon \right] + \left[A^{(\upsilon)}{}_{11} + A^{(\upsilon)}{}_{33} - 2A^{(\upsilon)}{}_{44} \right]}{2Q^{(\upsilon)}} \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{3.167}$$

$$m_\upsilon = \left\{ \frac{\left[(Q^{(\upsilon)} - A^{(\upsilon)}{}_{11} + A^{(\upsilon)}{}_{44}) / \cos^2 \theta_\upsilon \right] + \left[A^{(\upsilon)}{}_{11} + A^{(\upsilon)}{}_{33} - 2A^{(\upsilon)}{}_{44} \right]}{2Q^{(\upsilon)}} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (3.168)$$

$$Q^{(\upsilon)} = \left\{ (A^{(\upsilon)}{}_{33} - A^{(\upsilon)}{}_{44})^2 + 2A^{(\upsilon)}{}_1 \sin \theta_\upsilon + A^{(\upsilon)}{}_2 \sin^2 \theta_\upsilon \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (3.169)$$

$$A_1{}^{(\upsilon)} = 2(A^{(\upsilon)}{}_{13} + A^{(\upsilon)}{}_{44})^2 - \\ -(A_{33}{}^{(\upsilon)} - A_{55}{}^{(\upsilon)})(A_{11}{}^{(\upsilon)} + A_{33}{}^{(\upsilon)} - 2A_{44}{}^{(\upsilon)}) \quad (3.170)$$

$$A_2{}^{(\upsilon)} = (A^{(\upsilon)}{}_{11} + A^{(\upsilon)}{}_{33} - 2A^{(\upsilon)}{}_{44})^2 - 4(A_{13}{}^{(\upsilon)} + A_{44}{}^{(\upsilon)})^2, \quad (3.171)$$

Формули для *коефіцієнтів відбиття і заломлення квазіпоздовжньої хвилі,* які одержали П. Дейлі, Ф. Хрон 1977 року, мають такий вигляд:

$$R_{11} = (-E_1 + E_2 + E_3 + E_4 - E_5 - E_6)/D, \quad (3.172)$$

$$R_{12} = (E_7 + E_8)/D, \quad (3.173)$$

$$R_{13} = (E_9 + E_{10})/D, \quad (3.174)$$

$$R_{14} = (E_{11} + E_{12})/D, \quad (3.175)$$

$$D = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 + E_6, \quad (3.176)$$

де $E_1 = T_1 T_2 x^2$, $E_2 = T_3 T_4 PQ$, $E_3 = T_5 T_6 PR$, $E_4 = T_7 T_8 x^2 PQRS$, $E_5 = T_9 T_{10} QS$, $E_6 = T_{11} T_{12} RS$, $E_7 = 2T_5 T_{11} PR$, $E_8 = 2T_2 T_{16} PQ$, $E_9 = -2xT_7 T_{11} PRS$, $E_{10} = -2xT_1 T_3 P$, $E_{11} = -2xT_7 T_{10} PQS$, $E_{12} = 2xT_1 T_5 P$, $T_1 = \varphi_2 - \frac{\varphi_1 e_2}{n e_1}$, $T_2 = \beta_2 \omega_2 k_2 \frac{e_3}{m_1} - \beta_1 \frac{\omega_1 k_2 e_4}{n m_1}$,

$T_3 = \beta_2 \omega_2 + \beta_1 \frac{k_2 x^2 e_4}{n m_1}$, $T_4 = \varphi_2 \frac{m_3}{e_1} + \frac{\delta_1 x^2 e^2}{n e_1}$, $T_5 = \beta_1 (\omega_1 + k_1 x^2 \frac{e_4}{m_1}$,

$T_6 = \varphi_2 \frac{m_4}{e_1} + \frac{\delta_2 x^2 e^2}{n e_1}$, $T_7 = \beta_2 e - \beta_1 \frac{m_2}{m_1}$, $T_8 = \delta_2 \frac{m_3}{e_1} - \delta_1 \frac{m_4}{e_1}$,

$T_9 = \beta_2 (\omega_2 \frac{m_2}{m_1} + \frac{k_2 x^2 e e_4}{n m_1})$, $T_{10} = \varphi_2 \frac{m_3}{e_1} + \delta_1 x^2$, $T_{11} = \varphi_1 \frac{m_4}{e_1} + \delta_2 x^2$,

$T_{12} = \beta_2 \dfrac{k_1 x^2 ee_3}{m_1} + \dfrac{\beta_2 \omega_1 m_2}{m_1}$, R_{11} – коефіцієнт відбитої квазіпоздовжньої хвилі; R_{12} – коефіцієнт заломленої квазіпоздовжньої хвилі; R_{13} – коефіцієнт відбиття квазіпоздовжньої *SV*-хвилі; R_{14} – коефіцієнт заломлення квазіпоздовжньої *SV*-хвилі.

Формули для *коефіцієнтів відбиття і заломлення SH-хвилі*, які одержали П. Дейлі і Ф. Хрон (1977), мають такий вигляд:

$$R_{11} = \left(\frac{B_1 \cos\theta_1}{V_1} - \frac{B_2 \cos\theta_2}{V_2}\right) / D, \tag{3.177}$$

$$R_{12} = \frac{2B_1 \cos\theta_1}{V_1} / D, \tag{3.178}$$

$$D = \left(\frac{B_1 \cos\theta_1}{V_1} + \frac{B_2 \cos\theta_2}{V_2}\right),$$

де $B_1 = C_{44}^{(0)} = C_{44}^{(1)}$; $B_2 = C_{44}^{(2)} = B_2$;

3.13.4. Наближений метод оцінювання коефіцієнта відбиття квазіпоздовжньої хвилі для слабкоанізотропних поперечно-ізотропних середовищ

Розглянемо задачу відбиття сейсмічної *P*-хвилі від межі тріщинуватого ГПІ-середовища (рис. 3.17). Швидкість *P*-хвилі в площині ізотропії, яка ортогональна до головної осі симетрії, не змінюється при зміні напрямку. Але для інших вертикальних площин швидкість *P*-хвилі залежить від кута падіння *i* і азимутального кута φ (рис. 3.18).

Різниця амплітуд відбиття у двох ортогональних площинах (площині осі симетрії і площині ізотропії) спричиняє азимутальну залежність AVO-характеристик. *S*-хвилі, які поляризовані паралельно і ортогонально до площини ізотропії, мають різні швидкості у вертикальному напрямку.

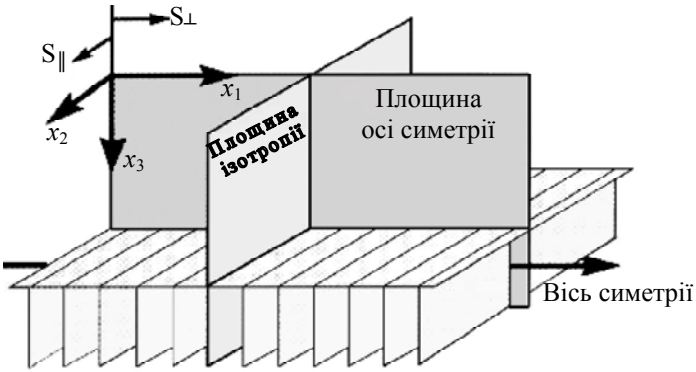


Рис. 3.17. ГПІ-модель і її елементи симетрії

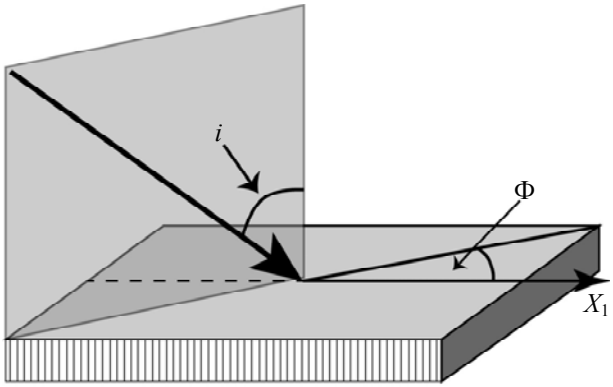


Рис. 3.18. Ілюстрація залежності коефіцієнта відбиття *P*-хвилі від поверхні тріщинуватого шару (від кута падіння *i* й азимутального кута φ відносно осі симетрії)

Таким чином, аналіз залежності амплітуди *P*-хвилі від віддалення "джерело–приймач" (AVO-аналіз) при різних азимутах може забезпечити локальну інформацію про анізотропію досліджуваного шару. Вихідні дані про анізотропію *P*-хвилі можна одержати за допомогою даних 3D сейсморозвідки.

Наближення для коефіцієнта відбиття плоскої *P*-хвилі від межі двома ГПІ з однаковою орієнтацією головної осі симетрії, одержане Рюгером, має такий вигляд:

$$R(i,\varphi)=\frac{1}{2}\frac{\Delta Z}{Z}+$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{\Delta\vec{V}_P(0)}{\vec{V}_P(0)}-\left[\frac{2\vec{V}_S(0)}{\vec{V}_P(0)}\right]^2\frac{\Delta G}{G}+\left[\Delta\delta^{(\upsilon)}+2\left[\frac{2\vec{V}_S(0)}{\vec{V}_P(0)}\right]^2\Delta\gamma\right]\cos^2\varphi\right\}\cdot$$

$$\cdot\sin^2 i+\frac{1}{2}\left[\frac{\Delta\vec{V}_P(0)}{\vec{V}_P(0)}+\Delta\varepsilon^{(\upsilon)}\cos^4\varphi+\Delta\delta^{(\upsilon)}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\right]\sin^2 i\,\mathrm{tg}^2 i, \quad (3.179)$$

де i та φ – відповідно фазовий кут падіння й азимутальний кут відносно осі $\Delta\vec{V}_P(0)$; $\Delta\vec{V}_S(0)$ – різниця між осередненими швидкостями верхнього і нижнього шару; $\vec{V}_P(0)$ – середня швидкість у шарі при вертикальному падінні хвилі; $Z=\rho V_P(0)$ – вертикальний P-хвильовий імпеданс; $G=\rho V_S(0)$ – вертикальний S-хвильовий імпеданс; $\Delta\delta,\Delta\varepsilon,\Delta\gamma$ – різниці параметрів анізотропії Томпсона між двома шарами.

Якщо азимутальний кут $\varphi=90^\circ$, то рівняння (3.179) є виразом для коефіцієнта відбиття у площині ізотропії, яке формально не відрізняється від рівняння тричленної апроксимації Шуе для межі між ізотропними середовищами.

Якщо падаючі на межу P-хвилі збурюють у площині симетрії відбиття обмінні $S_\perp(SV)$-хвилі із вертикальною швидкістю $V_{S\perp}$, то в площині ізотропії вони збурюють $S_\parallel(SH)$-хвилі з вертикальною швидкістю $V_{S\parallel}$. Різниця у вертикальних швидкостях S-хвиль описується їх розщепленням $\gamma=\dfrac{(V_{S\parallel}-V_{S\perp})}{V_{S\parallel}}$. Тому параметр γ впливає на градієнт AVO (член при $\sin^2 i$) у площині осі симетрії ($\varphi=0^\circ$) і у всіх інших площинах, крім площини ізотропії. Параметр $\delta^{(\upsilon)}$, який входить у вираз для обчислення швидкості $V_{P|}(i)$ при слабкій анізотропії, також впливає на градієнтний член при всіх азимутах, крім площини ізотропії. Аналогічно параметр $\varepsilon^{(\upsilon)}$

впливає на коефіцієнт відбиття при значних кутах падіння хвилі (член при $\sin^2$ і $\mathrm{tg}^2 i$).

Якщо нехтувати третім членом C у рівнянні (3.179), то одержимо рівняння, яке можна розглядати як анізотропний аналог двочленного рівняння Шуе:

$$R(i,\varphi_K) = A + \left[B^{iso} + B^{ani} \cos^2(\varphi_K - \varphi_{sym}) \right] \sin^2 i + \ldots , \quad (3.180)$$

де A – коефіцієнт відбиття для нормального падіння P-хвилі на межу.

Градієнт AVO

$$B(\varphi_K) = B^{iso} + B^{ani} \cos^2(\varphi_K - \varphi_{sym}) \quad (3.181)$$

у площині з азимутом φ_K відносно напрямку площини осі симетрії, складається з B^{iso}, який не залежить від азимутального кута, і з B^{ani}, який характеризує вклад анізотропії.

Виявляється при цьому, що параметри анізотропії Томпсона $\Delta\delta^{(\upsilon)}$ і $\Delta\varepsilon^{(\upsilon)}$ насамперед впливають на градієнт AVO (член B^{ani}).

На рис. 3.19 наведено результати моделювання впливу анізотропії на коефіцієнт відбиття P-хвилі для моделі, в якій верхній шар ізотропний з горизонтальною віссю симетрії (ГПІ). Як видно з наведених даних, залежності коефіцієнтів відбиття від кута падіння для різних азимутальних кутів φ відносно головної осі симетрії суттєво змінюються, і їхній вплив є несуттєвим лише при малих кутах падіння хвилі. Це означає, що навіть у випадку слабкої анізотропії (внаслідок класичного AVO-аналізу) вносяться суттєві помилки, які можуть призвести до хибних висновків.

Обернена задача AVO-аналізу упорядкованого геологічного середовища зводиться до оцінювання параметрів анізотропії Томпсона $\delta^{(\upsilon)}$ і γ за допомогою рівняння (3.180). Це рівняння є нелінійним відносно трьох невідомих B^{iso}, B^{ani} і φ_{sym}, тому необхідно не менше трьох азимутальних значень градієнта AVO для визначення орієнтації площини симетрії і відновлення коефіцієнта відбиття при невеликих кутах падіння для всіх азимутальних кутів.

Оптимальним можна вважати розв'язок у випадку вимірювань уздовж великої кількості азимутальних кутів, наприклад, методом 3D сейсморозвідки, коли є можливість побудувати графік залежнос-

ті $R(\varphi_K)$ від азимутального кута. Із рівняння (3.181) видно, що графік залежності $R(\varphi_K)$ являє собою косинусоїду, яка зсунута від нульової лінії на сталу складову B^{iso}. Унаслідок нелінійності рівняння розв'язок буде неоднозначним і за екстремумами кривої можна знайти два ймовірні ортогональні один відносно одного напрямки орієнтації головної осі симетрії. Будь-яка додаткова інформація, наприклад, навіть груба оцінка знака величини B^{ani}, достатня для однозначного відшукання орієнтації головної осі. Напрямок орієнтації головної осі симетрії можна одержати з незалежних даних, наприклад, за даними аналізу розщеплення *S*-хвиль або шляхом визначення швидкості ЗСТ у різних азимутах.

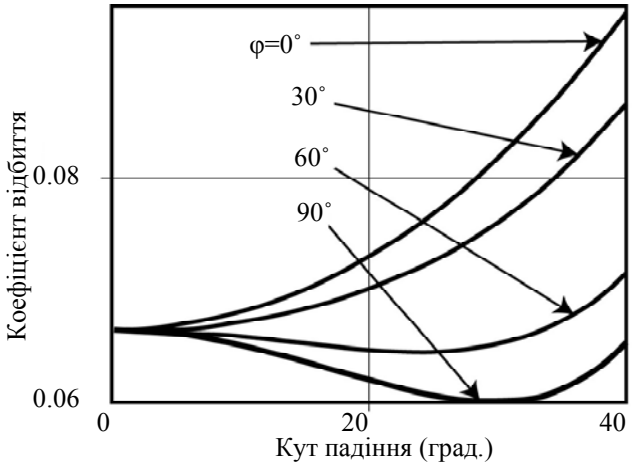


Рис. 3.19 Залежність коефіцієнта відбиття *P*-хвилі від кута падіння для різних азимутальних кутів φ моделі з ізотропним верхнім шаром і нижнім ГПІ-шаром

Інформацію про анізотропію у вигляді комбінації параметрів $\delta^{(\upsilon)}$ і γ можна одержати з різниці між градієнтами у площинах симетрії й ізотропії. Якщо припустити, що верхній шар ізотропний, то ця різниця запишеться як

$$B(\varphi_K) - B(\varphi_K - \frac{\pi}{2}) \approx \left[2V_S(0)/V_P(0)\right]^2 \gamma_2 + \frac{1}{2}\delta^{(\upsilon)}. \qquad (3.182)$$

Для випадку $\frac{V_P(0)}{V_S(0)} = 0$ різниця між градієнтами дорівнює $\gamma_2 + 0,5\delta^{(\upsilon)}$, що свідчить про вдвічі більший внесок параметра розщеплення *S*-хвиль γ, ніж параметра $\delta^{(\upsilon)}$. Визначення параметра γ є дуже важливим, оскільки саме він характеризує щільність тріщинуватості. Для його обчислення з рівняння (3.182) знаходять параметр анізотропії $\delta^{(\upsilon)}$.

Для одержання параметра $\delta^{(\upsilon)}$ визначають швидкість $V_{\text{ЗСТ}}$ у горизонтальному ГПІ-шарі для різних азимутальних кутів:

$$V^2_{\text{ЗСТ}} = V^2_P(0)\frac{1+2\delta^{(\upsilon)}}{1+2\delta^{(\upsilon)}\sin^2\varphi}, \qquad (3.183)$$

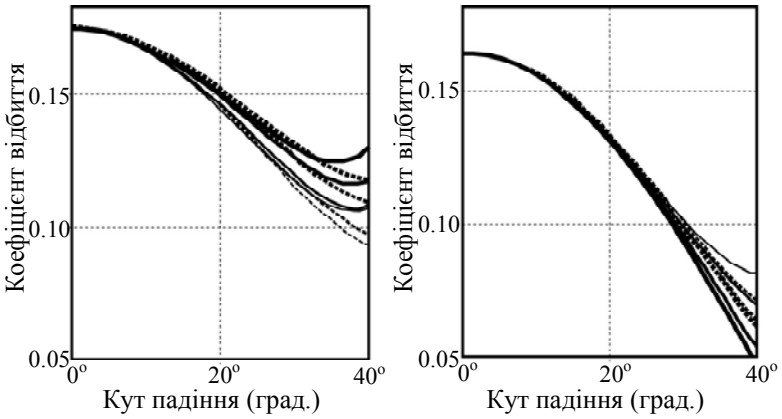
де φ – азимут орієнтації профілю відносно осі симетрії.

У рівнянні (3.183) невідомими є: вертикальна швидкість $V_P(0)$, кут орієнтації осі симетрії та параметр $\delta^{(\upsilon)}$. Тому достатньо визначення швидкостей $V_{\text{ЗСТ}}$ у трьох азимутах, щоб одержати три рівняння і знайти орієнтацію тріщин і параметр $\delta^{(\upsilon)}$, який необхідний для обчислення γ (щільності тріщин).

Якщо параметром анізотропії $\varepsilon^{(\upsilon)}$ можна нехтувати ($\varepsilon^{(\upsilon)} = 0$), наприклад, у випадку щільних порід із низькою пористістю і мікротріщинуватістю, яка заповнена флюїдом (флюїдонасичені вугільні пласти), виконується рівність $\delta^{(\upsilon)} = -\gamma$. Тоді щільність тріщин можна визначити безпосередньо з рівняння (3.182).

На рис. 3.20 наведено графіки залежності коефіцієнта відбиття *P*-хвилі від кута падіння для різних значень азимутальних кутів φ, які дорівнюють 0°, 30°, 60° і 90°. Розглядаються дві моделі: 1) рис. 3.20, *а* – модель, в якій верхній шар ізотропний і нижній ГПІ-шар насичений водою; 2) рис. 3.20, *б* – модель, в якій нижній шар насичений газом. На графіках зображено результати числових розрахунків по точних формулах і наближеній формулі (3.179). Різниці параметрів анізотропії Томпсона $\Delta\varepsilon^{(\upsilon)}$ і $\Delta\delta^{(\upsilon)}$ суттєво відрізняються: при водонасиченні вони дорівнюють відповідно 0,003 і 0,088, але при газонасиченні їх величина зростає і може дорівнювати 0,150. Параметр γ однаковий і дорівнює 0,085.

Як видно з наведених графіків, ці різниці параметрів анізотропії спричиняють суттєві зміни в залежностях коефіцієнтів відбиття від кута падіння і відповідно AVO-атрибутів.



а *б*

Рис. 3.20. Залежність коефіцієнтів відбиття *P*-хвилі від кута падіння для різних значень азимутальних кутів φ (0°, 30°, 60°, 90° – чим тонша лінія, тим менший кут φ на графіку) для моделі з ізотропним верхнім шаром і нижнім ГПІ-шаром:
а – водонасичений нижній шар; *б* – газонасичений нижній шар (суцільними лініями зображено точний розв'язок, пунктирними – наближений розв'язок)

Для тріщин, які заповнені водою, згідно з рівнянням (3.179) спостерігається суттєва азимутальна різниця в градієнтах у площині ізотропії, оскільки різниця градієнтів визначається приблизно величиною $\Delta\delta^{(\upsilon)} + 2\gamma$. Ця величина для випадку водонасичених тріщин є значною. Для газонасичених тріщин $\Delta\delta^{(\upsilon)} + 2\gamma = 0$ і значних азимутальних змін AVO-градієнта не слід очікувати.

У цьому випадку графіки залежності коефіцієнтів відбиття від кута падіння для різних азимутальних кутів починають змінюватися лише при значних кутах падіння хвилі (рис. 3.21, *б*). Таким чином, є реальні можливості за допомогою AVO-аналізу розпізнавати наявність тріщин, які заповнені газом або рідиною. Якщо характеристики AVO суттєво відрізняються лише при великих кутах падіння хвилі, то це свідчить про великі значення параметра $\Delta\varepsilon^{(\upsilon)}$ (газонасичені тріщини).

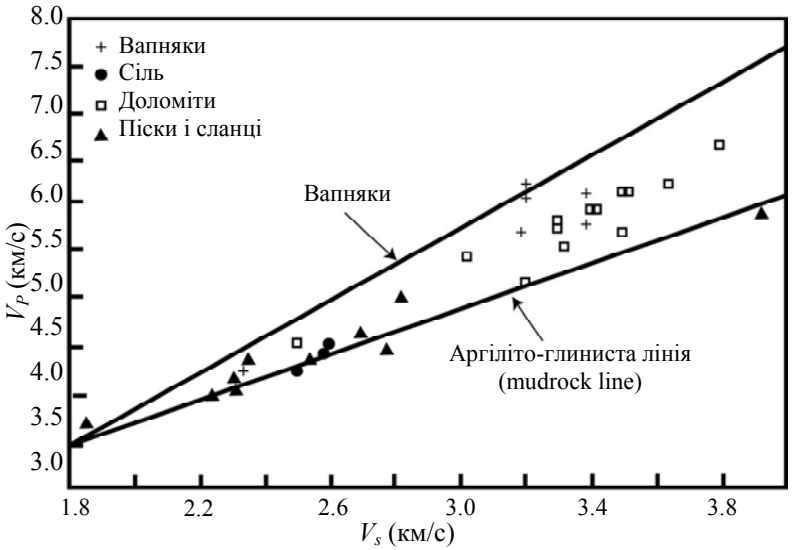


Рис. 3.21. Лінійна кореляційна залежність між V_P і V_S для аргіліто-глинистих і карбонатних порід за даними акустичного каротажу

Зауважимо, що розглянутий вище модельний приклад стосується дещо спрощеного випадку, коли верхній шар є ізотропним. Задача ускладнюється, якщо відбита *P*-хвиля поширюється через анізотропний верхній шар. Анізотропія цього шару може спричинити локальне фокусування фронту і спотворення амплітуд уздовж фронту відбитої хвилі. Азимутальні зміни коефіцієнтів прохідних хвиль в анізотропному середовищі може також внести спотворення в розподіл амплітуд на поверхні. Відсутність корекції цих спотворень може спричинити помилки в інтерпретації результатів AVO-аналізу.

Для вивчення анізотропії на *P*-хвилях і картування зон тріщинуватості, доцільно використовувати і зіставляти характеристики AVO за різними азимутами, які можна одержати завдяки даним 3D сейсморозвідки.

3.14. Петрофізичні основи інтерпретації AVO-аномалій

Петрофізичні властивості осадових порід помітно впливають на інтерпретацію результатів AVO-аномалій. Для з'ясування природи AVO-аномалій необхідно з'ясувати природу закономірностей атрибутів та їх взаємозв'язку на кросплотах. Однозначно розв'язати цю складну задачу дуже важко, оскільки швидкості V_P і V_S в гірських породах, а також їх відношення V_P / V_S залежать від літології, пористості, термодинамічних умов (тиск, температура) і насичення флюїдом.

3.14.1. Літологія

Визначення величини V_P / V_S для порід різної літології є надзвичайно важливим завдяки тому, що саме відхилення експериментальних сейсмічних даних від встановлених літологічних "фонових" відношень і допомагають при прогнозуванні покладів вуглеводнів сейсмічними методами.

Узагальнення числових результатів вимірювань швидкостей V_P і V_S сейсмічними методами, методами акустичного каротажу і лабораторними методами свідчить про те, що для різних літологічних різниць V_S майже лінійно пов'язана з V_P у всьому діапазоні швидкостей (рис. 3.21).

Наведені дані свідчать, що AVO-аналіз надійніший при дослідженні середовищ із низькими швидкостями. Для більшості літологічних типів теригенних осадових порід спостерігається лінійний кореляційний зв'язок між швидкостями V_P і V_S. Зокрема, для пісковиків лінійна регресійна залежність має вигляд

$$V_P = 1,24V_S + 1,06, \qquad (3.184)$$

а для глинистих сланців

$$V_P = 1,34V_S + 1,13\,. \qquad (3.185)$$

Обидві лінійні регресійні залежності виявилися достатньо близькими до "mudrock line" (аргіліто-глинистої лінії). Цю лінію

встановлено за даними акустичного каротажу і сейсмічних вимірювань у розрізах, які складаються переважно із глинистих порід і мулистих частинок незалежно від їх структури і текстури.

Для доломітів регресійна залежність має вигляд

$$V_P = 1,71 V_S + 1,33 . \qquad (3.186)$$

На рис. 3.22 зображено діаграму залежності між швидкістю V_P і V_S за даними акустичного каротажу для аргіліто-глинистих і карбонатних порід. Дані для чистих вапняків розміщені дуже близько до лінії вапняків $V_P / V_S = 1,9$, а дані для пісковиків і глинистих сланців поблизу аргіліто-глинистої лінії з $V_P = 4,4$ км/с і $V_P / V_S = 1,7$. Водночас доломіти й породи зі змішаною літологією займають проміжне положення між лініями вапняків і аргіліто-глинистих порід.

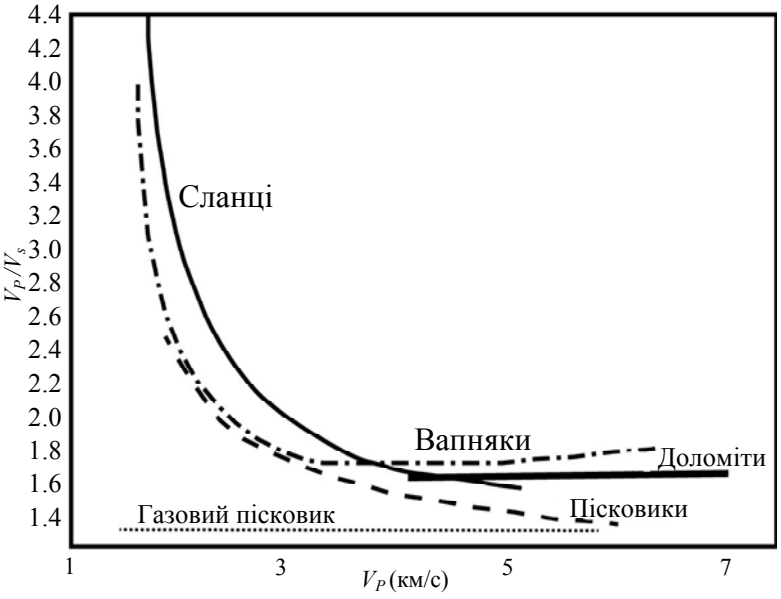


Рис. 3.22 . Залежність V_P / V_S від V_P для порід різної літології

Для ущільнених порід із високими швидкостями V_P більш ефективним може бути використання регресійної залежності між

V_P / V_S і V_P. Як видно з рис. 3.22, при високих значеннях V_P породи різної літології краще розрізнюють за величиною V_P / V_S.

Водночас у цій області можуть виникнути труднощі при розрізненні високошвидкісних глинистих сланців і вапняків.

У породах із високими швидкостями різниця V_P / V_S між газо- і водонасиченими породами дуже мала. Для порід із низькою швидкістю V_P різниця між газо- і водонасиченими породами буде відносно більшою. Тому дослідження AVO даватимуть кращі результати в розрізах із низькою швидкістю.

3.14.2. Пористість і флюїдонасиченість

При збільшенні пористості швидкості *P*- і *S*-хвиль зменшуються. Найчастіше при вивченні залежності між швидкістю V_P і коефіцієнтом пористості $K_{\text{п}}$ користуються добре відомим емпіричним рівнянням Віллі – Трегорі або "рівнянням середнього часу", яке використовують під час аналізу даних акустичного каротажу для визначення коефіцієнта пористості. Це рівняння не має ніякого фізичного обґрунтування і його простота та надійність при дослідженні грануляційних порід-колекторів сприяла його широкому застосуванню.

Рівняння має такий вигляд:

$$\frac{1}{V_P} = \frac{\left(1 - K_{\text{п}}\right)}{V_{\text{т}}} + \frac{K_{\text{п}}}{K_{\text{ф}}}, \tag{3.187}$$

де $V_{\text{т}}$, $V_{\text{ф}}$ – швидкості поздовжніх хвиль відповідно у твердому скелеті і флюїді; $K_{\text{п}}$ – коефіцієнт пористості породи.

Наведемо деякі альтернативні цьому рівнянню формули:

$$V_P = \left(1 - K_{\text{п}}\right)^2 V_{\text{т}} + K_{\text{п}} V_{\text{ф}}; \tag{3.188}$$

$$V_S = \left(1 - K_{\text{п}}\right)^2 V_{S_{\text{т}}}, \tag{3.189}$$

де $V_{S_{\text{т}}}$ – швидкість поширення поперечних хвиль у твердому скелеті.

3.14.3. Термодинамічні умови

Швидкості V_P і V_S хвиль зростають при збільшенні гідростатичного стискання і зменшуються при збільшенні температури.

У більшості випадків вважається, що геостатичний тиск має більший вплив на швидкості поширення пружних хвиль ніж температура, тому швидкість із глибиною зростає. Лише за наявності зон АВПТ (аномально високого пластового тиску) швидкості сейсмічних хвиль зменшуються, оскільки збільшення внутрішнього (порового) тиску спричиняє зменшення геостатичного тиску, тобто, в цьому випадку діє ефективний тиск.

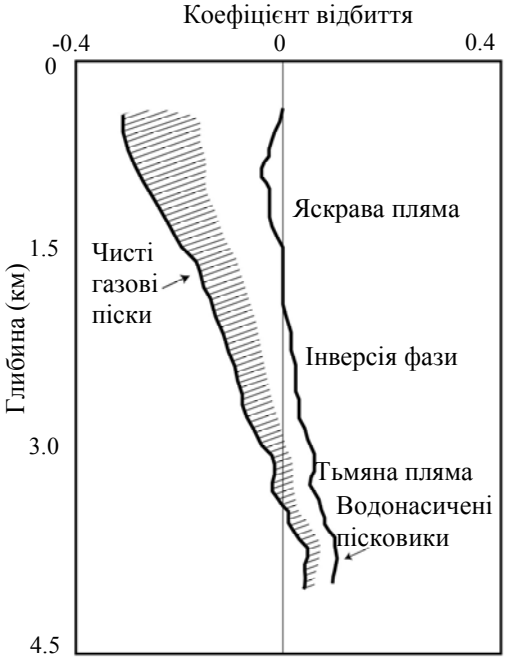


Рис. 3.23. Залежність коефіцієнта відбиття поздовжньої хвилі від глибини для водонасичених і газових пісковиків (заштрихована область показує можливі межі зміни коефіцієнта відбиття при зміні глинистості пісковиків)

На рис. 3.23 показано залежність коефіцієнта відбиття поздовжньої хвилі від глибини для водонасичених і газових пісковиків у теригенному розрізі. З нього видно, що для водонасичених піс-

ковиків коефіцієнт відбиття змінюється дуже слабко, але спостерігається тенденція переходу від від'ємного значення до додатного зі збільшенням глибини. Коефіцієнт відбиття для газового пісковика на малих і середніх глибинах від'ємний і лише на значних глибинах стає додатним, а криві для газо- і водонасичених пісковиків зближаються. Це означає, що можливість визначення наявності вуглеводнів за допомогою AVO-аналізу зі збільшенням глибини стає проблематичним.

13.4.4. Вуглеводневе насичення

При тисках і температурах, характерних для осадових басейнів, швидкість V_P мінералізованої води складає 1,5–1,65 км/с. Швидкість V_P у нафті суттєво залежить від її газонасиченості і змінюється від 0,45 км/с (для "живої" – сильно газонасиченої нафти) до 1,2 км/с (для "мертвої" нафти); V_P для вуглеводневих газів залежить від тиску і зростає при збільшенні глибини від 0,4 до 0,6 км/с. Густина води з глибиною майже не змінюється і залежно від мінералізації складає 1,0–1,1 г/см^3. Густина нафти при збільшенні глибини в середньому зменшується від 0,9 до 0,6 г/см^3 , а густина газу за рахунок підвищення тиску може зростати зі збільшенням глибини на порядок – від 0,01 г/см^3 на поверхні і до 0,1–0,2 г/см^3 на глибинах 2–4 км.

Для числових розрахунків швидкостей V_P, V_S при оцінюванні ефекту заміщення флюїду в сейсмічному діапазоні частот застосовують модель Гассмана. Ця модель справедлива за таких припущень:

- середовище макроскопічно однорідне й ізотропне;
- усі пори гідравлічно зв'язані між собою;
- заповнювачі пор (газ, рідина або їх суміш) являють собою середовище без тертя і в'язкості;
- у макроскопічному досліджуваному об'ємі при поширенні поздовжньої хвилі (при чергуванні фаз стискання і розтягнення) коливання скелета і флюїду збігаються за фазою, а градієнти тиску порозаповнювача достатньо малі, оскільки тиск у всьому виділеному об'ємі встигає вирівнюватись (релаксувати) при чергуванні фаз. Тобто, останні умови виконуються лише при достатньо низьких частотах;

• кількість флюїду у виділеному макроскопічному об'ємі середовища залишається незмінним (дренування відсутнє). Тому під час поширення поздовжньої хвилі тиск флюїду всередині цього об'єму в будь-яку мить часу такий самий, як і тиск флюїду зовні.

За наявності дренування поровий флюїд може вільно проникати всередину макроскопічного об'єму, вільно переміщуватися порами і вільно залишати цей макроскопічний об'єм. Це означає, що поровий тиск усередині цього об'єму залишається гідростатичним, якщо відбуваються коливання "зовнішнього" тиску. Відповідно помітних градієнтів тиску в поровому флюїді не виникає.

Для тріщинно-порових колекторів ця система умов доповнюється припущенням наявності обміну флюїдом між тріщинами й ізометричними порами у процесі поширення поздовжньої хвилі. Наявність такого обміну пояснюється тим, що тріщини набагато піддатливіші ніж пори і у фазі стискання флюїд перетікає з тріщин у пори, а у фазі розрідження повертається назад. Це припущення справедливе у випадку хаотичної орієнтації тріщин.

Модель Гассмана дозволяє здійснювати числові розрахунки модуля об'ємного стискання K флюїдонасиченої породи-колектора:

$$K = \frac{\dfrac{K_{\text{п}}}{K_S} - \dfrac{K_{\text{п}}}{K_f} - \dfrac{1}{K_{dry}} + \dfrac{1}{K_S}}{\left(\dfrac{K_{\text{п}}}{K_{dry}}\right)\left(\dfrac{1}{K_S} - \dfrac{1}{K_f}\right) - \left(\dfrac{1}{K_S}\right)\left(\dfrac{1}{K_{dry}} - \dfrac{1}{K_S}\right)}, \qquad (3.190)$$

де K_S – модуль об'ємного стискання твердого скелета; K_f – модуль об'ємного стискання флюїду; K_{dry} – об'ємний модуль твердого скелета із сухими порами.

Ключовим припущенням моделі Гассмана є таке: модуль зсуву вважається незалежним від стану флюїдонасичення породи-колектора, а відповідно і типу флюїду, тобто

$$\mu = \mu_{dry}. \qquad (3.191)$$

Це припущення ґрунтується на тому, що при зсувних зміщеннях зміни об'єму макроскопічного середовища не відбувається, відповідно, ступінь стисливості порозаповнювача, який різний у рідини і газу, не відіграє ніякої ролі. Модуль зсуву флюїду дорівнює нулю лише у флюїдів із низькою в'язкістю.

Фізичний зміст рівняння Гассмана стає зрозумілим, якщо його представити в такому вигляді:

$$K = K_{sat} = K_{dry} + \zeta^2 \Lambda , \qquad (3.192)$$

де K_{sat} – модуль об'ємного стискання флюїдонасиченого колектора; $\zeta = 1 - K_{dry} / K_S$ – коефіцієнт ефективного тиску або так званий коефіцієнт об'ємної піддатливості Біо; $\frac{1}{\Lambda} = \frac{\zeta - K_{\Pi}}{K_S} + \frac{K_{\Pi}}{K_f}$ – модуль пустотного простору породи-колектора.

Таким чином, модулі об'ємного стискання сухої і флюїдонасиченої порід відрізняються на величину, яка дорівнює добутку квадрата коефіцієнта об'ємної піддатливості на об'ємний модуль пустотного простору.

Вважається, що в низькочастотному діапазоні модуль K характеризує не лише газонасичену породу й відсутність дренування, але й наявність усередині цього макроскопічного гідравлічно зв'язаного порового об'єму.

Рівняння заміщення флюїду (3.192) лежить в основі ряду способів інтерпретації даних сейсморозвідки, зокрема, при оцінюванні характеру насичення порід-колекторів.

На рис. 3.24 показано числові розрахунки модулів об'ємного стискання газо- і нафтонасичених пісковиків за допомогою рівняння Гассмана. Як видно, присутність навіть невеликої кількості газу (5–10 %) у газоводяній суміші спричиняє зменшення швидкості V_P, оскільки стисливість газів на декілька порядків вище ніж стисливість води і нафти. При збільшенні вмісту газу більше 10 % спостерігається навіть слабке зростання V_P внаслідок зменшення об'ємної густини. Стисливості нафти і води відрізняються менше, тому заміщення води нафтою в порах веде до плавного зменшення V_P. Таким чином, між швидкостями поздовжніх хвиль породи-колектора: водонасиченого ($V_P^{\text{В}}$), нафтонасиченого ($V_P^{\text{Н}}$) та газонасиченого ($V_P^{\text{Г}}$) існує таке співвідношення: $V_P^{\text{В}} > V_P^{\text{Н}} > V_P^{\text{Г}}$, але з ростом глибини залягання різниця між швидкостями $V_P^{\text{Н}}$ і $V_P^{\text{Г}}$ зменшується.

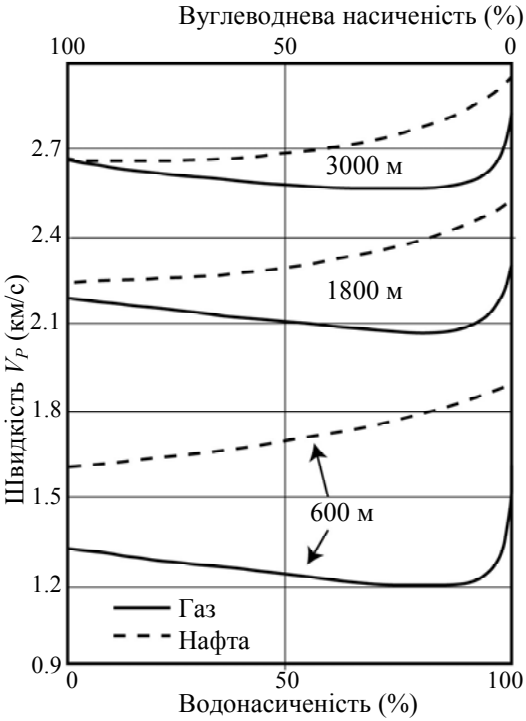


Рис. 3.24. Залежність швидкості поздовжніх хвиль від коефіцієнта водонасичення для нафто- і газонасичених пісків на різних глибинах їх залягання – 600, 1800 і 3000 м

Швидкості поперечних хвиль у моделі Гассмана в породі-колекторі, який заповнений двома фазами флюїду, змінюються на протилежні, оскільки тип флюїду не впливає на модуль зсуву, а його значення залежить лише від наявності пор. Тому швидкість V_S змінюється лише за рахунок густини флюїду, але ці відносні зміни значно менші, ніж зміни швидкості V_P.

Тому співвідношення між швидкостями поперечних хвиль у водонасичених ($V_S^{\text{В}}$), нафтонасичених ($V_S^{\text{Н}}$) та газонасичених ($V_S^{\Г}$) породах-колекторах буде протилежне $V_S^{\text{В}} \le V_S^{\text{Н}} \le V_S^{\Г}$. Відповідно співвідношення V_P / V_S для нафто- і газонасичених порід-

колекторів завжди менше, ніж для водонасичених. Зміна співвідношення V_P / V_S, яка зумовлена наявністю вуглеводнів, розглядається як головний чинник, який спричиняє AVO-аномалії.

Відношення V_P / V_S прямо залежить від коефіцієнта Пуассона ν:

$$\frac{V_P}{V_S} = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} . \qquad (3.193)$$

3.14.5. Залежність між швидкістю і густиною

Для моделювання AVO-аномалій важливими є дані про густину гірських порід. Об'ємна густина ρ прямо залежить від густини мінеральних зерен твердого скелета гірської породи ($\rho_т$), густини флюїду ($\rho_ф$) і коефіцієнта пористості ($K_п$):

$$\rho = (1 - K_п)\rho_т + K_п\rho_ф . \qquad (3.194)$$

Якщо відсутні дані каротажу густини, то для її визначення використовують кореляційну залежність між швидкістю поздовжніх хвиль V_P і густиною ρ. Емпірична регресійна залежність, яку називають формулою Гарднера, залежить від літології і має такий вигляд:

$$\rho = aV_P{}^b , \qquad (3.195)$$

де a, b – емпіричні коефіцієнти, які залежать від літології. Для пісковиків і глинистих сланців формулу (3.195) можна записати у явній формі:

$$\rho \approx 1,74V_P{}^{0,25} . \qquad (3.196)$$

Для відносних величин густини і швидкості рівняння (3.196) представити у лінеаризованому вигляді

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = 0,25\frac{\Delta V_P}{V_P} . \qquad (3.197)$$

Результати лабораторних і каротажних досліджень швидкості V_P і густини ρ для розрізу пісковиків і глинистих сланців наведено на рис. 3.25. Як видно, крива для рівняння Гарднера має дуже широкі довірчі межі. Дані для пісковиків розміщуються дещо вище цієї кривої, тобто рівняння Гарднера завищує густину піс-

ковиків. А результати для глинистих сланців містяться нижче цієї кривої. Тому густина глинистих сланців буде заниженою.

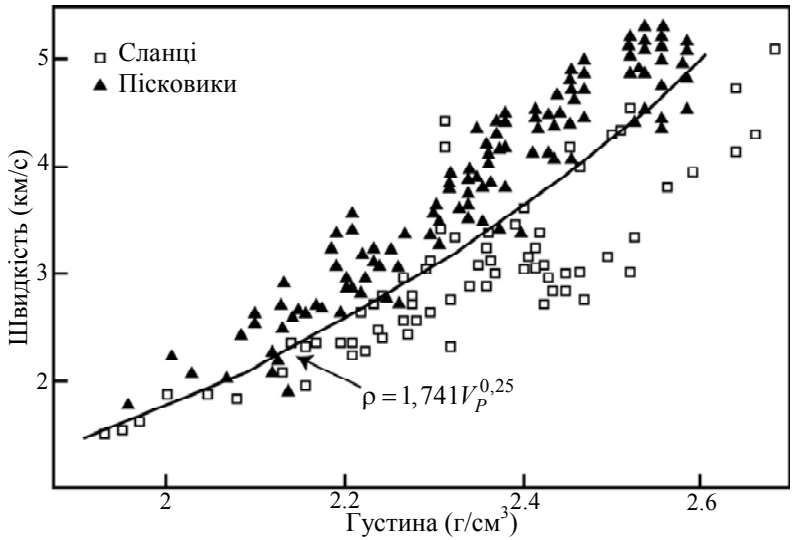


Рис. 3.25. Кореляційна залежність між швидкістю поздовжніх хвиль і густиною для пісковиків і глинистих сланців за даними лабораторних і каротажних досліджень
(суцільна лінія показує числові результати за формулою Гарднера)

3.14.6. Методологія апріорного і апостеріорного оцінювання достовірності результатів інтерпретації AVO-аналізу

У методах AVO-аналізу й інверсії надзвичайно важливим є оцінювання точності і достовірності результатів інтерпретації. Формально процес інтерпретації включає два етапи: 1) власне інверсію, тобто перетворення сейсмічних записів в оцінки сейсмічних властивостей геологічного середовища; 2) перехід за допомогою апарата кросплотів і нейронних мереж до геологічних категорій – літології, характеру насичення, пористості, ефективної потужності тощо.

Рівень формалізації цих двох етапів значно відрізняється, а кількість сейсмічних і геологічних параметрів дуже велика і не чітко ви-

значена; як сейсмічні, так і геологічні параметри сильно корелюють між собою. Крім того, відносні похибки сейсмічних і геологічних параметрів на порядок вищі за оцінки кінематичних параметрів, які використовуються при структурних побудовах. Формально в AVO-аналізі апріорне оцінювання достовірності амплітудної інверсії та результатів геологічної інтерпретації реалізується у двох варіантах.

Перший зводиться до оцінювання коефіцієнта кореляції між тією чи іншою парою параметрів безпосередньо за їхніми кросплотами. Зрозуміло, що коефіцієнти кореляції дають точну міру ступеня зв'язку між параметрами та довірчі інтервали. Не з'ясовано лише, які саме чинники спричиняють розкид точок:

1) об'єктивні варіації цільового параметра – пористості або ступеня доломітизації або ефективної потужності;

2) похибка оцінок імпедансу.

Очевидно, що певною мірою такі оцінки характеризують достовірність побудованої моделі, але питання про можливі шляхи її покращення є відкритим. Зокрема, модель можна покращити подальшим фаціальним розмежуванням або використанням інших наборів сейсмічних параметрів.

Другий варіант значно інформативніший і базується на виборі детерміністичної ефективної моделі геологічного середовища і цілеспрямованому дослідженні реакції акустичної та пружної інверсій. Це дослідження виконують варіацією параметрів і пружної інверсії, підбираючи варіанти параметрів апріорної моделі. Такий підхід включає п'ять послідовних процедур:

1. Побудову апріорної ефективної сейсмоакустичної моделі для типового розрізу цільового інтервалу з відомою літологією і даними акустичного каротажу; вибір детермінованої ефективної моделі геологічного середовища; підбір числових значень пружних модулів цих моделей, які задовольняють ефективну сейсмоакустичну модель розрізу.

2. Збурення геологічних параметрів апріорної ефективної сейсмоакустичної моделі (зміна літології, пористості, флюїдонасичення тощо) у діапазоні, який очікується на території досліджень; перерахунок цих збурень і розрахунок відповідних змін значень $I_P(t)$ і $EI(t)$ апріорної ефективної моделі для заданих кутів падіння, а також залежності $R(\theta)$ для точного рівняння Цьоппрітца.

3. Побудова синтетичних сейсмограм для серії збурених кривих імпедансів $I_P(t)$ і $EI(t)$ сейсмоакустичної моделі; обробка синтетичних даних за тими самими технологіями *AI* та *EI*, яка застосовується до реальних даних.

4. Статистичний аналіз одержаних результатів (математичні сподівання, дисперсія) із метою оцінювання відхилень одержаних оцінок $I_P(t)$ і $EI(t)$ від відповідних значень збуреної ефективної сейсмоакустичної моделі. Одержані характеристики і є кількісними оцінками ступеня достовірності отриманих результатів, тобто варіацій геологічних параметрів, які визначені за даними *AI* та *EI*.

5. Обробка реальних даних за технологією *AI* та *EI* й оцінювання з використанням кросплотів коефіцієнтів кореляції в межах виділених сейсмофацій, певного насичення, пористості відображають впливи випадкових похибок сейсміки.

Результати пунктів 4 і 5 спільно характеризують ступінь невизначеності геологічної інтерпретації результатів, які одержані за допомогою технологій *AI – EI*.

3.14.7. Глобальні й локальні тренди властивостей пористих порід

При інтерпретації даних AVO-аналізу важлива роль належить емпіричним співвідношенням, які одержують унаслідок статистичної обробки результатів петрофізичних досліджень – глобальних, регіональних або локальних, котрі можуть охоплювати широкі класи порід, а можуть обмежуватися вузькими літостратиграфічними рамками.

Масштаб узагальнення, тобто ступінь однорідності вибірки, визначає ступінь універсальності одержаних емпіричних моделей та область їх застосування.

Локальні вибірки для обмеження літостратиграфічних інтервалів служать базою для інтерпретації результатів на конкретних розвідувальних ділянках.

Глобальні й регіональні залежності належать до загальногеологічних закономірностей. Водночас емпіричні залежності не є універсальними і нерідко, при спробах їх екстраполяції за межі

діапазону, який забезпечений фактичними даними, не дають бажаних результатів.

При моделюванні AVO-ефектів від заміщення флюїду і при розрахунках деяких атрибутів за умов, коли прямі вимірювання швидкості V_S і ρ відсутні, застосовують регіональні або глобальні тренди для оцінювання фонових значень V_S і ρ шляхом використання кореляційних залежностей між V_P і V_S та V_P і ρ.

Результати статистичного аналізу експериментальних даних свідчать, що кореляційні залежності між V_P, V_S і ρ суттєво відрізняються для різних генетичних типів осадових порід. Тому необхідно брати до уваги можливі обмеження при застосуванні трендових залежностей і враховувати вплив латеральних варіацій швидкості в межах однієї літологічно однорідної стратиграфічної одиниці.

Зазначимо, що дуже мало уваги приділяється у практиці апостеріорного оцінювання таким важливим характеристикам, як щільність свердловин на площі досліджень, ступінь латеральної мінливості характеристик цільового об'єкта, радіуси кореляції помилок оцінюваних сейсмічних і геологічних параметрів. Зрозуміло, що такі оцінки можна одержати лише на густо розбурених площах.

Основним інструментом практичної інтерпретації сейсмічних даних в AVO-аналізі є кросплот. За допомогою кросплотів установлюють наявність і силу взаємодії будь-якого петрофізичного параметра з будь-яким іншим. Силу зв'язку оцінюють за величиною коефіцієнта кореляції.

Безперечною перевагою інтерпретації на основі кросплота є можливість визначення переходу від одного параметра до іншого без будь-яких апріорних припущень відносно моделі й можливої природи взаємозв'язку між параметрами. Водночас регресійні кореляційні залежності супроводжуються розкидом точок і відповідним розширенням довірчих інтервалів. Бажання звузити довірчі межі вимагає застосування сучасних статистичних методів обробки інформації – факторного аналізу, множинного аналізу, статистичного регресійного аналізу, розпізнавання образів і нейронних мереж.

Зрозуміло, що порівняно з кросплотами, ці статистичні методи забезпечують набагато глибший аналіз взаємозв'язку між параме-

трами, але проблема виявлення причинних факторів залишається відкритою.

Найпростіший спосіб урахування причинних взаємозв'язків і відповідного зменшення розкиду точок на кросплоті – розбиття генеральної вибірки на декілька вибірок, які відрізняються одна від іншої третім параметром, який задається на якісному рівні: або за ознакою літології; або за ознакою гранулометричного складу і т. ін. У цьому випадку фактично відбувається перехід до факторного аналізу і множинної регресії. Глобальні тренди взаємозв'язку швидкостей *P*- і *S*-хвиль із пористістю, глинистістю і типом флюїдонасичення широко застосовуються. І їхні особливості зумовлені особливостями осадконакопичення та діагенетичними змінами порід, тому вони є характерними для осадових басейнів.

3.14.8. Седиментаційний і діагенетичний тренди пружних властивостей

Методами сейсмічної стратиграфії і структурно-формаційного аналізу встановлено глобальні закономірності латеральної і вертикальної зональностей осадконакопичення і його відображення у сейсмічних записах. Основою цього відображення є взаємозв'язки між зональністю осадконакопичення і фізичними властивостями осадових порід. Найпростішим прикладом такої зональності є закономірне збільшення глинистості й дисперсності відкладів мірою віддалення від берегової лінії в бік відкритого басейну і внаслідок збільшення густини відкладів мірою зростання потужності перекриваючих їх товщ. Ці закономірності досліджують за допомогою седиментаційних і діагенетичних трендів.

Залежності швидкість–ефективний тиск (його можна виразити через глибину залягання породи), швидкість–пористість, акустичний імпеданс – пористість та інші використовують для оцінювання впливу різних факторів – літології, діагенетичного ущільнення, пористості.

Наявність зв'язку пружних модулів і сейсмічних швидкостей із глинистістю і ступенем ущільнення теригенних відкладів забезпечує побудову теоретичних моделей, які відображають ці взаємозв'язки. За допомогою таких моделей розраховують швидкості

P- і *S*-хвиль, якщо відомі співвідношення глинисті/піщані фракції та ефективний тиск. Подальша деталізація можлива шляхом конкретизації мінерального складу і мікроструктурних особливостей цементу. Мінералогічний склад цементу безпосередньо визначає його пружні модулі: глинистим мінералам (монтморилоніт, іліт) притаманні дуже низькі значення модулів K_S, μ_S, карбонатним мінералам (кальцит, доломіт) і особливо кварцу – досить високі, іноді більші за модулі піщаних зерен. Модулі K і μ цементу визначаються об'ємними частками цих мінералів.

Вплив мікроструктури зводиться, насамперед, до ступеня розвитку цементного прошарку між твердими зернами. Якщо такий прошарок відсутній, зерна мають безпосередній контакт одне з одним, що спричиняє високі модулі пружності K і μ, і відповідно високі швидкості V_P і V_S. Якщо зерна розділяються прошарками м'якого контактного цементу, пружність різко зменшується і швидкості також знижуються.

Проте характер зміни швидкостей не є лінійним при збільшенні кількості м'якого зв'язуючого цементу. Тому при переході від чистого пісковика до глинистого пісковика і глини швидкість спочатку зростає, а потім зменшується.

У чистому пісковику, насиченому флюїдом, швидкість буде меншою, ніж у глинистому пісковику, частина пор якого заповнена глиною. Цемент, що заповнює міжзернистий простір пісковика, може заповнювати межові пори або просто заповнювати пори ("плаваючий" цемент). В останньому випадку м'який матеріал по суті не є цементом.

У процесі діагенетичної цементації чистий пісковик може перейти в малопористий зцементований пісковик за рахунок привнесення цементуючого матеріалу. Імовірний і зворотний процес, коли пористість і проникність породи при діагенезі зростає внаслідок вилуговування або через зниження ефективного тиску внаслідок аномально високого пластового тиску (або розливу порід, що залягають вище) при зменшенні глибини залягання породи.

На рис. 3.26 зображено залежність швидкості від глибини залягання для теригенних порід. Ця залежність характеризує за даними моделювання особливості седиментаційного і діагенетичного трендів.

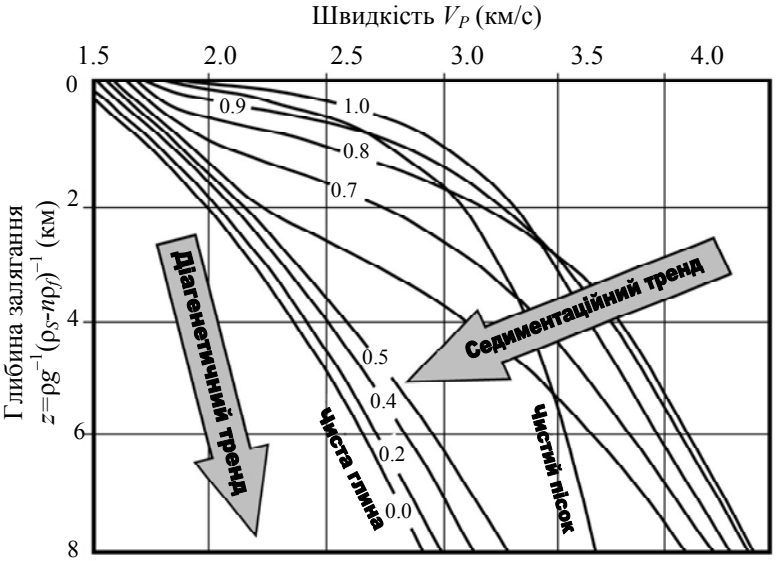


Рис. 3.26. Модельна залежність швидкості поздовжніх хвиль осадових відкладів від глибини залягання при різних співвідношеннях піщаної і глинистої фракцій (відклади на початку не зазнали впливу діагенезу)

Як і очікувалося, у пісковика градієнт зростання швидкості при збільшенні глибини більший, ніж у глин, оскільки контактна пружність зерен пісковика значно більша, ніж у глинистих частинок. У піщано-глинистих породах мірою зростання вмісту піщаної фракції криві $V_P(z)$ повторюють поведінку кривої для чистої глини і зміщуються в бік високих швидкостей при зростанні вмісту піщаної фракції. Якщо у свіжоутвореному відкладі піщаної фракції стає більше 40 %, то мірою занурення відкладів на більшу глибину окремі зерна піщаної фракції починають дотикатися одне до одного внаслідок більш швидкого ущільнення глин. Як тільки процент зерен піщинок стане визначальним для формування контактної пружності, крива $V_P(z)$ стає подібною до кривої для чистого пісковика, тобто градієнт швидкості зростає.

Чим більше піщаної фракції у свіжоутвореному відкладі, тим на меншій глибині спостерігається перехід від малих до великих градієнтів зростання $V_P(z)$.

Із ростом глинистості від 0 до 0,4 швидкість слабко зростає, а подальше збільшення вмісту глинистості веде до того, що градієнт зростання швидкості уповільнюється.

Седиментаційний і діагенетичний тренди на кросплоті "швидкість (пружність)–пористість" (рис. 3.27) також відображає в теригенних осадових породах співвідношення піщаної і глинистої фракцій. На модельному кросплоті точки для порід із контактним цементом утворюють відокремлену гілку, яка має найбільше зміщення в бік високих швидкостей і модулів пружності при високій пористості.

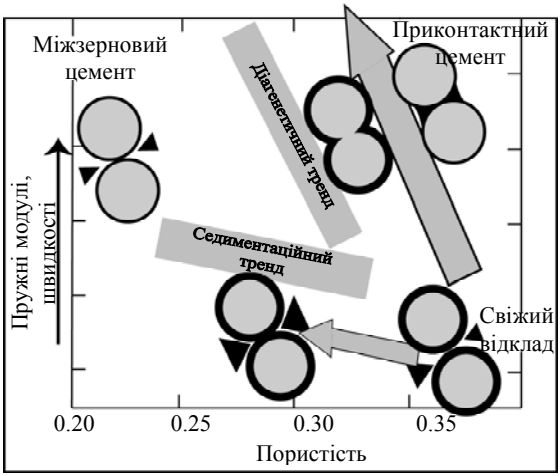


Рис. 3.27. Седиментаційний і діагенетичний тренди на кросплоті швидкість (або пружний модуль) – пористість для теригенних осадових порід

При побудові кросплота "V_P / V_S – акустичний імпеданс" (рис. 1 додатка) схема глобальних трендів набагато складніша, ніж на кросплоті "швидкість–пористість". Але на розрізах із піщано-глинистими колекторами, які ускладнені латеральними і вертикальними заміщеннями, кросплот "V_P / V_S – акустичний імпеданс" допомагає надійніше оцінювати пористість. У випадку, коли глинисті породи в межах колектора і глинистої покрівлі характеризуються суттєво різною залежністю "пористість–акустичний імпеданс", тоді виділення седиментаційного тренда в комплексі (визначенням інтервалів колектора і глинистої покрівлі) дозволяє більш надійно розділити піщанисті і глинисті зони та більш надійно оцінити пористість.

РОЗДІЛ 4
Спеціалізована обробка сейсмічних даних для вирішення задач AVO-аналізу й інверсії

4.1. Ускладнюючі фактори при практичному застосуванні AVO-аналізу

Для реалізації можливостей AVO-аналізу необхідно застосування спеціалізованої обробки сейсмічних даних, яка враховує його концептуальні особливості та численні ускладнюючі фактори. Концепція AVO-аналізу справедлива лише для простої моделі геологічного розрізу – одиночна, близька до горизонтальної відбиваюча межа й однорідна (середньошвидкісна) або горизонтально-шарувата покривна товща, що покриває межу.

Крім того, навіть при виконанні концептуальних умов, при дослідженні реального геологічного розрізу виникають ускладнюючі чинники, які необхідно враховувати під час застосування AVO-аналізу.

На рис. 2 додатка зображено схематичну діаграму, яка узагальнює наявні фактори в реальному геологічному розрізі. Ці фактори впливають на амплітуди відбитих хвиль і можуть вносити неоднозначність при дослідженнях амплітудних характеристик та варіацій хвильового поля.

AVO-аномалії, які зумовлені заміщенням порового флюїду, змінами пористості й варіаціями порового тиску, мало контрастні

порівняно з випадковими хвилями-завадами і факторами, які зумовлені впливом апроксимацій реальних хвильових полів невідповідними теоретичними моделями коефіцієнтів відбиття сейсмічних сигналів. Вплив випадкових хвиль-завад цілком передбачуваний і послабляється статистичним осередненням. Але неадекватність прийнятих інтерпретаційних моделей, навіть при достатньо високому співвідношенні сигнал/завада, може призвести до помилкових результатів.

Серед головних чинників неадекватності моделей можна виділити такі:

1) невизначеність положення відбиваючої точки при AVO-аналізі немігрованих сейсмограм;

2) відсутність врахування анізотропії;

3) монотонність послідовностей коефіцієнтів відбиття $r(t)$;

4) невідповідність прийнятих глобальних статистичних залежностей між фізичними властивостями, які використовуються при AVO-аналізі, і місцевих геологічних умов ділянки досліджень.

Шляхи усунення або послаблення ступеня впливу такої неадекватності достатньо очевидні. Перший із них можна реалізувати "підгонкою" моделі під особливості одержаних у процесі польових робіт сейсмічних даних, а другий – спеціальною обробкою одержаної сейсмічної інформації.

Фактори, що впливають на залежність амплітуди від віддалі "джерело–приймач", добре відомі.

Серед найважливіших можна виділити такі:

1) неадекватне врахування впливу геометричного розходження фронту хвилі на амплітуду хвилі;

2) неадекватне врахування зміни амплітуди хвилі за рахунок поглинання енергії сейсмічної хвилі;

3) мінливість поверхневих умов і фільтрувальна дія груп джерел і (або) приймачів.

Реальне оцінювання впливу кожного з вищезгаданих факторів значною мірою залежить від району робіт і методики польових сейсмічних досліджень. Тому для кожного конкретного випадку цей вплив необхідно оцінювати індивідуально шляхом моделювання.

Геометричне розходження фронту хвилі. У випадку швидкого зростання швидкості при збільшенні глибини променеві

трубки з великими кутами падіння характеризуються значно більшим розходженням, ніж променеві трубки, кути падіння яких близькі до вертикалі. Тому необхідно використовувати такий спосіб урахування геометричного розходження фронту хвилі, який залежить від віддалі "джерело–приймач".

Поглинання. На малих глибинах, коли офсети зіставлювані з глибиною до цільового об'єкта, а поглинання відносно велике, різниці в довжині шляху поширення хвиль на дальніх і ближніх офсетах можуть спричинити значні спади амплітуди хвилі внаслідок поглинання по мірі збільшення офсетів. У цьому випадку необхідне застосування відповідної процедури, яка компенсує такий ефект, зокрема процедури *інверсійна Q-фільтрація.*

Виходячи із сучасних тенденцій, які випливають із накопиченого досвіду застосування AVO-аналізу, базовими процедурами обробки можна вважати такі:

1. корекція сферичного розходження фронту хвилі;
2. експоненціальне підсилення амплітуд однократно відбитих хвиль;
3. мінімально-фазова деконволюція для стиснення імпульсу;
4. корекція швидкостей підсумовування;
5. normal move-out (NMO) – уведення кінематичних поправок;
6. вирівнювання трас сейсмічного запису;
7. горизонтальне підсумовування трас;
8. ослаблення багатократних відбиттів у *F–K* області;
9. відслідковування амплітудних піків в інтерактивному режимі;
10. згладжування годографа кінцево-різницевими методами;
11. вилучення некондиційних трас, що мають значні амплітудні аномалії.

Тонкошаруватість геологічного розрізу можна розглядати як деструктивний фактор при оцінюванні AVO-ефекту по сейсмічному запису, який обтяжений інтерференцією хвиль у тонких шарах. Для її послаблення на етапі побудови сейсмічного зображення і міграційних перетворень застосовують спеціальні фільтри, що залежать від кута падіння хвилі на відбиваючу поверхню. Як результат, інтерференція може певним чином враховуватися, але не може бути видалена взагалі. Дисперсійні ефекти можуть компенсуватися при екстраполяції поля в нижній півпростір.

4.2. Алгоритм обробки сейсмічних даних у режимі збереження "істинних" амплітуд

Основою спеціалізованої обробки сейсмічних даних у методах AVO-аналізу є процедури обробки в режимі збереження "істинних" амплітуд (ЗІА) сейсмічних хвиль для всього часового інтервалу їх реєстрації.

Режим ЗІА забезпечує можливість уникнути впливу таких спотворюючих амплітуди сейсмічної хвилі факторів, як геометричне розходження фронту хвилі, поглинання сейсмічної енергії геологічним середовищем та ослаблення впливу багатократних відбиттів.

Узагальнену блок-схему алгоритму спеціалізованої обробки сейсмічної інформації в режимі ЗІА, що має модульну структуру, наведено на рис. 3 додатка. Цей алгоритм включає 8 модулів, які забезпечують цифрову обробку сейсмічних даних, AVO-аналіз та інверсійні перетворення.

Алгоритм містить стандартний етап підготовки сейсмічних даних до виконання процедур збереження "істинних" амплітуд. На цьому етапі здійснюється формування геометрії сейсмічних спостережень та занесення цієї інформації в заголовки вхідних сейсмограм (рис. 4 додатка), виконується ручне й автоматичне очищення сейсмограм спільного пункту збудження від аномальних значень амплітуд.

Редагування не залежить від типу обробки сейсмічних даних: чи то кінематична, чи динамічна обробка. Відповідно застосовується стандартний набір процедур обробки, параметри яких не потребують тестувань і можуть характеризуватися однаковими значеннями для всієї оброблюваної площі.

На підготовчому етапі здійснюють розрахунки поля ССТ (спільної серединної точки), що називають *бінуванням*. Важливим кроком на цьому етапі є вибір швидкісного закону, за яким будуватиметься апріорний сейсмічний розріз та від якого далі слід відштовхуватися при виборі різноманітних швидкісних законів на різних етапах обробки.

За апріорний швидкісний розріз беруть швидкісний розріз згідно з даними ВСП (вертикального сейсмічного профілювання). За відсутності годографа ВСП і за наявності варіацій швидкостей сейсмічних хвиль по латералі оцінюють вертикальний швидкісний спектр у характерних точках часового розрізу. Часовий розріз для визначення характерних точок, що відображають конфігурацію морського дна, будується при використанні швидкості підсумовування 1500 м/с, яка дещо вища швидкості поширення сейсмічної хвилі у водній товщі. Як результат підготовчого етапу формується апріорний часовий розріз (рис. 5 додатка).

Процедури цього етапу виконуються за набором вхідних сейсмограм, які відсортовані за спільним пунктом збудження. Такий модуль забезпечує відновлення "істинних" амплітуд та підвищення роздільної здатності. У модуль також включено процедури послаблення різних типів хвиль-завад, шумів та короткоперіодних реверберацій. Основними процедурами модуля, які безпосередньо відповідають за збереження інформації про речовий склад і насиченість геологічних утворень, є процедури корекції сферичного розходження фронту хвилі та корекції непружного поглинання сейсмічної енергії, відновлення амплітудно-частотно-фазового спектра сейсмічних записів. Відповідно, поглинання енергії сейсмічної хвилі прийнято кількісно характеризувати коефіцієнтом поглинання α. Він характеризує зниження амплітуди A_0 плоскої хвилі до величини A при поширенні хвилі від точки r_0 до точки r і визначається співвідношенням

$$\alpha = \frac{1}{r - r_0} \ln \frac{A_0}{A} . \qquad (4.1)$$

Згідно з теорією поширення сейсмічної хвилі, амплітудна деструкція відбувається за рахунок сферичного розходження фронту хвилі.

Важливим елементом корекції сферичного розходження фронту хвилі є швидкісний закон, який вибирається на підготовчому етапі. Контроль якості такої корекції проводять, використовуючи швидкісний закон у процесі візуалізації вхідних сейсмограм при оцінюванні динамічних характеристик сейсмічного запису. Процедура мінімально-фазової деконволюції із передбаченням за

вхідними сейсмограмами спільного пункту збудження виконується з метою підвищення роздільної здатності сейсмічної траси (розширення частотного спектра сейсмічного сигналу) та послаблення багатократних відбиттів – реверберацій. Ключовим питанням даної процедури є вибір довжини оператора деконволюції та величини похибки передбачення.

Від вибору вікна настроювання оператора деконволюції залежить те, наскільки чітко будуть ослаблені багатократні відбиття та виділені цільові горизонти. Вікно настроювання оператора оцінюється шляхом аналізу кожної п'ятої вхідної сейсмограми, згідно з конфігурацією відбиттів і морського дна та розташуванням у часовому діапазоні цільових горизонтів. Контролюється якість роботи вищеописаної процедури шляхом побудови автокорелограм та візуалізації частотних та амплітудних спектрів сейсмограм.

Завершальною процедурою цього модуля є широкосмугова фільтрація для коригування частотного спектра вхідних сейсмограм та формування контрольного сумарного часового розрізу. Параметри широкосмугового фільтра вибирають шляхом розрахунку частотно-амплітудних спектрів сейсмограм. Вибрано такі параметри: від 4 Гц – нижня частота зрізу, 120 Гц – верхня частота зрізу широкосмугового коригувального фільтра.

Ефективність роботи процедур модуля № 2 порівняно з кінематичним підходом до обробки сейсмічних записів представлено на рис. 6 додатка. В інтервалі, що виділений червоним прямокутником, спостерігається значне покращення кореляції сигналу відбитих хвиль, що апріорі може свідчити про наявність характерних об'єктів у геологічному середовищі, на які потрібно звернути увагу при подальшій обробці цих сейсмічних даних.

У результаті виконання процедур даного модуля забезпечується корекція сферичного розходження фронту хвилі і непружного поглинання, досягається суттєве підвищення роздільної здатності, (розширення та корекція частотного спектра), часткове усунення реверберацій та багатократних відбиттів.

Модуль № 2 забезпечує ослаблення короткоперіодних і довгоперіодних багатократних відбиттів. Процедури цього модуля застосовують для обробки наборів сейсмограм ССТ та редагування швидкостей ССТ, що використовуються для відповідних процедур при ослабленні енергії годографів багатократних відбиттів.

Важливою процедурою аналізу вхідних сейсмограм ССТ є вибір верхнього м'ютингу для обнулення інтенсивних перших вступів сейсмічних хвиль, що дуже спотворюються при введенні кінематичних поправок і відповідно спотворюють хвильову картину у верхній частині часового розрізу. Вибраний на цьому етапі м'ютинг використовується і при виконанні наступних процедур обробки, і при підсумовуванні сейсмограм ССТ.

Важливою та необхідною процедурою модуля № 2 є побудова макросу (це алгоритм виконання спеціалізованих процедур), що працює зі швидкостями ССТ у FK -області, де відбувається обнулення області недоспрямлених та спрямлених годографів багатократних відбиттів..

Другою ключовою процедурою модуля № 2 є високороздільне перетворення Радона в $(\tau - p)$-області. Основним критерієм при його застосуванні є вибір швидкості ССТ, що вводиться під час обробки в сейсмограми з метою переспрямлення корисних однократних відбиттів. Спрямлені та недоспрямлені годографи хвиль-завад трансформуються в $(\tau - p)$-область, де відбувається обнулення за рахунок зворотного м'ютингу та алгоритмічного апарата фільтра Радона Далі йде зворотне перетворення в $(\tau - x)$-область. На цьому етапі використовується зворотний м'ютинг у $(\tau - p)$-області. Такий м'ютинг дуже важливий щодо ослаблення залишкових короткоперіодних багатократних відбиттів, що не були ослаблені внаслідок застосування попередніх процедур обробки.

Відповідно для контролю формується сумарний часовий розріз. Результати виконання процедур таких як макрос, що працює у FK-області, та високороздільне перетворення Радона зі зворотним м'ютингом в $(\tau - p)$-області для послаблення багатократних відбиттів, представлено на рис. 7 додатка.

Модуль № 3 усуває хибні кути падіння хвилі на відбиваючу межу, вводить поправки часу приходу хвиль, редагує швидкості підсумовування, формує фінальний немігрований часовий розріз та підвищує роздільну здатність і співвідношення сигнал/завада фінального часового розрізу.

За допомогою процедури цього модуля вибираються швидкості для процедури DMO-перетворення (Deep move-out), яка

включає операції згладжування та контролю швидкостей у характерних точках часового розрізу. Основною процедурою модуля № 3 є DMO-перетворення, що застосовується до набору рівновіддалених трас (рис. 8 додатка).

Формування рівновіддалених трас по розгортках ССТ відбувається з уведеними кінематичними поправками та прямим м'ютингом, вибраним перед застосуванням процедур модуля № 2. Сформований набір рівновіддалених трас подається на вхід процедури DMO-перетворення. Ключовими параметрами цієї процедури є вибір кроку між наборами рівновіддалених блоків трас ССТ. Для розв'язання задач спеціалізованої динамічної обробки довжина кроку вибирається рівною відстані між пунктами збудження. Одним із основних параметрів даної процедури, що впливає на якість вихідних даних, є максимальна частота DMO-перетворення корисних частотних компонент і яка дорівнює 100 Гц. Після завершення цієї процедури виконують редагування швидкостей і побудову фінального часового розрізу.

Редагування швидкостей виконується з оптимальним кроком, що задовольняє часовий інтервал ручного редагування та оптимально висвітлює латеральні зміни швидкостей підсумовування.

Для покращення когерентності, роздільної здатності та динамічної виразності однократних відбиттів застосовується процедура деконволюції, *FX*-деконволюції та широкополосної частотної фільтрації за немігрованим часовим сейсмічним розрізом.

Деконволюція сумарного часового розрізу та ключові параметри цієї процедури вибираються за тим самим принципом, що і на попередніх етапах обробки. Для забезпечення динамічної виразності та когерентності відбиттів застосовується процедура *FX*-деконволюції по всій довжині запису і в межах повного частотного діапазону.

Одним із важливих кроків на даному етапі обробки є побудова та застосування фільтра для якісного відображення всіх елементів хвильового поля. Шляхом тестувань вибирають змінний у часі смуговий фільтр у двох вікнах. Перше вікно вибране з метою збільшення когерентності видимих цільових відбиттів до 4,5–5 секунд із характеристиками фільтра 4-10-70-110 Герц. Друге вікно орієнтоване на виділення цільових відбиттів у нижній частині часового розрізу, тобто для підкреслення тих відбиттів, які у

своєму частотному діапазоні мають переважно низькочастотну складову спектра з характеристиками фільтра 4-7-60-80 Гц.

Результат формування фінального часового розрізу за методикою кінематичної обробки зображено на рис. 9 додатка.

Результат роботи процедур обробки цього модуля представлено на рис. 10 додатка у вигляді немігрованого фінального часового розрізу.

Сейсмограми ССТ, зображені на рис. 8 додатка, після проведення циклу обробки в режимі ЗІА, порівняно з результатами кінематичної обробки демонструють однозначну картину динамічно виразних однократних відбиттів. Це зумовлено оптимально підібраними процедурами трансформацій сейсмічних записів (модулі процедур № 1, 2, 3), а саме, корекцією сферичного розходження фронту хвилі та корекцією непружного поглинання геологічним середовищем сейсмічного сигналу. Особливу увагу приділяють ослабленню багатократних відбиттів, що можуть внести суттєву деструкцію в амплітуди відбитих хвиль.

Як видно з даних на рис. 9 додатка, у результаті кінематичної обробки динамічна виразність відбиттів є досить низькою. Такий вигляд хвильового поля на сумарному часовому розрізі зумовлений недостатньо чітким вибором процедур обробки сейсмічного сигналу та деструктивними процедурами регулювання та вирівнювання амплітуд.

Часовий сейсмічний розріз (рис. 10 додатка), одержаний за алгоритмом ЗІА, має динамічно виразні відбиття, що спостерігаються на всьому інтервалі запису. Порівнюючи та аналізуючи рисунки 9 та 10 додатка, відмітимо суттєву різницю, особливо при виділенні більш пологого схилу структури. На рис. 10 додатка даний елемент хвильового поля виділяється набагато виразніше у динамічному сенсі. Такий результат динамічного розподілення хвильових особливостей поля, як на цьому рисунку, при правильно підібраній швидкісній моделі дає більш однозначні результати виділення та локалізації відбиваючих площадок на мігрованих сейсмічних даних.

У результаті виконання процедур модуля № 4 одержують мігроване зображення в часовому масштабі та мігровані сейсмограми ССТ.

Одним із важливих завдань цього етапу обробки є уточнення швидкісної моделі для виконання процедур міграційних перетворень. Проводиться детальний аналіз для кожних наступних 50 точок ССТ, тобто з інтервалом 625 метрів.

За допомогою побудованої швидкісної моделі виконується два типи міграції: до підсумовування по вхідним сейсмограмам ССТ у режимі ЗІА та міграція по сумарному часовому розрізу.

Міграція після підсумовування виконується за фінальним немігрованим часовим розрізом. Результат міграції по фінальному часовому розрізу (Post-Stack міграція) наведений на рис. 12 додатка та зіставлений з мігрованим часовим розрізом, отриманим за методикою кінематичної обробки сейсмічних даних (рис. 11 додатка).

Для побудови зображення відбиваючих елементів застосовується алгоритм міграції Кірхгофа до підсумовування зі збереженням "істинних" амплітуд. Міграція в часовій області до підсумовування приводить до кращого розподілу сейсмічної енергії і дозволяє точніше аналізувати уявні швидкості.

Для цього використовувалися спеціально підготовлені сейсмічні дані, які забезпечують підвищену роздільну здатність і покращене співвідношення сигнал/завада. Це досягається спеціальним підбором за характером конфігурацій корисних відбиттів, оператора деконволюції з передбаченням, а також завдяки застосуванню динамічного фільтра (*FX*-деконволюція по вхідним сейсмограмам ССТ), який підвищує когерентність однократно відбитого сигналу.

Після завершення міграційних перетворень Кірхгофа виконувався уточнюючий аналіз швидкостей ССТ в інтервалі завдовжки 500 метрів та формувалося мігроване зображення відбиваючих елементів (рис. 13 додатка).

Мігровані сейсмограми ССТ та частотний спектр зображено на рис. 14 додатка. Отримана після міграції по вхідних сейсмограмах швидкісна модель ССТ перераховувалась у модель інтервальних швидкостей (рис. 18 додатка).

Результати міграції, отримані за методикою кінематичної обробки (див. рис. 11 додатка) мають недостатню динамічну та структурну виразність об'єкта досліджень, як і ключових елементів хвильового поля, на відміну від мігрованих розрізів, зображе-

них на рисунках 12 і 13 додатка. Це пояснюється тим, що кінематична обробка виконана без процедур, що зберігають "істинні" амплітуди хвильового поля. Зазначимо, що обробка за методикою ЗІА, дає набагато кращі та однозначніші результати, особливо після застосування процедури міграції до підсумовування (рис. 13 додатка).

На рис. 14 додатка демонструються сейсмограми ССТ після міграції до підсумовування та їх амплітудно-частотний спектр. Як видно з цих даних, амплітуди запису на сейсмограмах мають чітку форму, прослідковуються лише годографи однократно відбитих хвиль. Це дає змогу максимально чітко оцінити і розраховувати форму сигналу та розподіл як інтервальних швидкостей (рис. 18 додатка), так і швидкостей підсумовування. Аналіз спектра мігрованих сейсмограм ССТ дає чітку форму амплітудно-частотних характеристик без будь-яких аномальних значень та викидів. Збережено низькі та високі частоти спектра сейсмічного сигналу, причому, без внесення деструкцій в амплітудні характеристики (рис. 14 додатка).

Для порівняння на рис. 15 додатка наведено сейсмограми ССТ після обробки за алгоритмом ЗІА та за методикою кінематичної обробки сейсмічних даних.

Зауважимо, що результати, отримані за методикою обробки в режимі збереження "істинних" амплітуд, кардинально відрізняються від результатів отриманих за методикою кінематичної обробки. На рис. 16 додатка показано залежність амплітуди від відстані "джерело–приймач", що обчислена у визначеному часовому вікні в інтервалі 1525–1575 мілісекунд, в який попадають цільові відбиття. На рис. 17 додатка у тому самому часовому діапазоні обчислено амплітуди залежно від відстані "джерело–приймач", але вже для сейсмограм, отриманих за методикою кінематичної обробки.

Як видно з рис. 16 додатка, характер зміни амплітуд залежно від відстані "джерело–приймач" є упорядкованим і має корельовані характеристики зміни значень амплітуд залежно від відстані "джерело–приймач", причому даний цільовий горизонт розглядається як перспективний щодо наявності газонасиченого колектора.

Аналізуючи характер зміни амплітуди цільового горизонту (рис. 17 додатка) за сейсмограмами, які отримані за методикою кінематичної обробки, можна зробити висновок про те, що ці амплітуди носять некорельований характер, мають значні аномальні викиди і не мають жодних логічних амплітудних залежностей.

Отримана модель інтервальних швидкостей у результаті виконання процедур модуля № 4 (рис. 18 додатка) далі використовуватиметься для AVO-аналізу й інверсії сейсмічних даних.

Для підтвердження ефективності роботи алгоритму обробки отримано мігровані часові розрізи за даними морської сейсморозвідки із застосуванням алгоритму обробки в режимі ЗІА по регіональних профілях акваторії Чорного моря та виконано зіставлення цих сейсмічних даних із результатами кінематичної обробки (рисунки 19, 20 додатка).

Мігровані часові розрізи та сейсмограми ССТ, отримані за алгоритмом спеціалізованої обробки морських сейсмічних даних зі збереженням "істинних" амплітуд, є вхідним матеріалом для вилучення та оцінювання різноманітних динамічних параметрів запису та виконання інверсійних перетворень і AVO-аналізу. За результатами AVO-аналізу будуються: кросплот, кутові розрізи, розрізи "*інтесепт*×*градієнт*" та їхні комбінації – флюїд-фактор, псевдокоефіцієнти Пуассона.

Для оцінювання AVO-ефекту від продуктивних горизонтів застосовується метод математичного моделювання синтетичних сейсмограм за рівнянням Акі – Річардса та калібрування з реальною сейсмограмою за допомогою даних ГДС у перспективних інтервалах із покращеними колекторними властивостями. За результатами AVO-аналізу будують кросплот і здійснюють чотириступеневу класифікацію AVO-аномалій.

У результаті застосування процедур акустичної інверсії сейсмічних даних отримують розрізи швидкостей поздовжніх хвиль – V_P та розрізи акустичного імпедансу (AI) при нормальному падінні хвилі.

Основні процедури акустичної інверсії, які використовуються для побудови товстошаруватої моделі акустичного імпедансу та акустичної інверсії сейсмічних даних (рис. 4.1). Зауважимо, що основні елементи цієї блок-схеми алгоритму інверсії застосовуються і при виконанні пружної інверсії.

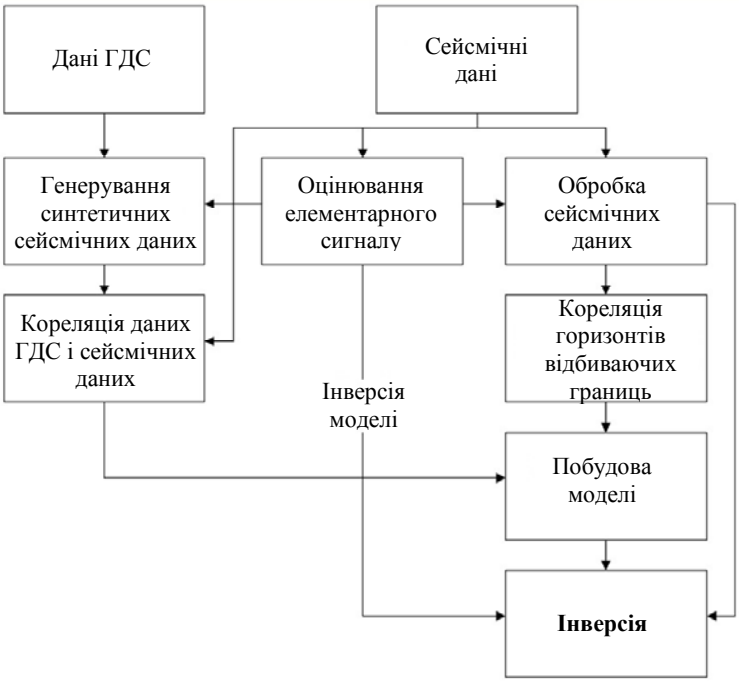


Рис. 4.1. Блок-схема алгоритму акустичної інверсії на основі заданої моделі

Основні етапи підготовки даних для проведення процедури акустичної інверсії, а в подальшому і пружної інверсії,такі:

- контроль якості та попередня підготовка вхідних даних (а саме, динамічна обробка сейсмічних записів);
- прив'язка сейсмічних даних до свердловинних даних та зведення їх до нуль-фазового вигляду в зоні досліджень. Оцінювання елементарного сигналу;
- запуск алгоритму інверсії з генеруванням кубів акустичної жорсткості для нормального або похилого падіння хвилі на межу та одержання атрибутів інверсії;
- візуалізація та інтерпретація результатів.

У результаті інверсії прості імпульси відбиттів "прив'язуються" до геологічних меж (літологічних змін) і до основних меж колектора (наприклад, контакт флюїдів (газ-вода, нафта-вода, газ-нафта) за даними ГДС). Звичайно ця операція виконується шля-

хом інверсії сейсмічних даних зі значеннями амплітуд у дані акустичної жорсткості. АІ порід шаруватої товщі визначається як добуток густини на швидкість. За даними акустичного каротажу та кривих густини розраховують штучні імпульсні сейсмограми та визначають імпульсний відгук акустичного імпедансу геологічного середовища. Для здійснення глибинно-часової конвертації вертикальної шкали каротажних даних виконують калібрування акустичного каротажу за даними сейсмокаротажу і/або за даними вертикального сейсмічного профілювання (ВСП). При цьому реальна сейсмічна траса в точці розташування свердловини зіставляється із трасою коефіцієнтів відбиття, які розраховані за даними акустичного каротажу та кривої густини. У результаті цього порівняння одержують штучну імпульсну сейсмограму.

За допомогою процедур пружної інверсії (elastic inversion) відновлюють пружні параметри швидкості поздовжніх і поперечних хвиль та густину шляхом інверсії розподілу амплітуд на сейсмограмах.

У процесі реалізації процедури "пружної інверсії" здійснюють:

- корелювання сейсмічних даних із даними ГДС;
- оцінювання елементарного сигналу для різних кутів падіння (ближніх і дальніх);
- побудову синтетичних сейсмограм для різних кутів падіння;
- побудову фонової моделі пружних імпедансів;
- пружну інверсію (побудову розрізів V_P, V_S, імпедансів поздовжніх та поперечних хвиль, побудову розрізів співвідношення V_P / V_S при різних кутах падіння та побудову розрізів $\lambda\rho$, $\mu\rho$);
- аналіз отриманих розрізів.

Для кількісного оцінювання літології, глинистості, ємнісно-фільтраційних властивостей та флюїдогазонасиченості ймовірно продуктивних горизонтів здійснюється процедура інверсії параметрів AVO-аналізу.

Процедура інверсії сейсмічних швидкостей і параметрів AVO-аналізу забезпечує оцінювання продуктивності перспективних горизонтів. В основі алгоритму інверсії лежить багатокомпонентна флюїдогазонасичена тріщинно-каверно-порова модель породи-колектора, для якої ефективні пружні сталі, швидкості поздовжніх і поперечних хвиль визначаються узагальненим методом умо-

вних моментних функцій із застосуванням розрахункової схеми Морі – Танака. Для інверсії сейсмічних даних застосовуються сучасні методи глобальної оптимізації.

Для кожного інтервалу інверсії одержані за сейсмічними даними параметри калібруються для їх узгодження з даними, які отримані при дослідженнях опорної свердловини.

Ефективні пружні модулі об'ємного стискання (K^*) і зсуву (G^*), швидкості пружних хвиль (V_P^*, V_S^*) цієї моделі розраховувалися методом умовних моментних функцій із застосуванням розрахункової схеми Морі – Танака:

$$K^* = \frac{1}{3}\sum_{r=1}^{N+1} c_r K_r K_{Ar};\ G^* = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N+1} c_r G_r m_{Ar};\ V_P^* = \sqrt{\frac{K^* + \frac{4}{3}G^*}{\rho^*}};\ V_S^* = \sqrt{\frac{G^*}{\rho^*}}, \qquad (4.2)$$

де K_{Ar}, m_{Ar}, – компоненти алгебраїчної матриці, які визначаються в результаті аналізу напруженодеформованого стану в *r*-му включенні моделі; c_r – об'ємна концентрація сухих або насичених газом чи нафтою пустот формату *Ar*; K^*, G^* – модулі пружності *r*-го включення; $N+1$ – компонента, що відповідає матриці.

Форма включень моделі приймається у вигляді сфероїда, формат α якого визначався із співвідношення $\alpha = c/a$ (*c* – мала і *a* – довга півосі сфероїда). Ефективна густина (ρ^*) моделі розраховувалась за формулою

$$\rho^* = \sum_{r=1}^{N+1} c_r \rho_r, \qquad (4.3)$$

де ρ_r – густина компоненти.

Далі оптимізується цільовий функціонал

$$\Phi(\vec{x}) = \sum (V_P^{(e)} - V_P^{(r)})^2, \qquad (4.4)$$

де $V_P^{(e)}$, $V_P^{(r)}$ – експериментальні та обчислені на *r*-му кроці ітерації значення ефективних швидкостей пружних хвиль; $\vec{x}$ – вектор невідомих параметрів.

Для розв'язування задачі нелінійної інверсії застосовується квазіньютонівський метод Бройдена – Флетчера – Гольдфаба – Шано.

Для подолання неоднозначності розв'язку задачі нелінійної інверсії на параметри відновлення накладаються жорсткі обмеження з урахуванням всієї наявної апріорної інформації. При цьому особливу увагу приділяють вибору початкового наближення, параметри якого мають вибиратися максимально близькими до реальних.

Як вихідні результати отримують петрофізичні параметри: $K_{гл}$ –коефіцієнт глинистості, $K_{в}$ – коефіцієнт водонасиченості, $W_{сум}$ – сумарний вміст вологи, $K_{г}$ – коефіцієнт газонасиченості, $K_{н}$ – коефіцієнт нафтонасиченості, $K_{п}$ – коефіцієнт пористості.

4.3. Результати тестування алгоритму обробки сейсмічних даних у режимі ЗІА

Моделювання сейсмічного розрізу. Для перевірки ефективності алгоритму обробки в режимі ЗІА його тестують на модельних прикладах. Для цього будують модель сейсмічного розрізу (рис. 21 додатка) із параметрами, максимально наближеними до реального геологічного розрізу, а саме: V_P, V_S, ρ, коефіцієнтом пористості газонасиченого колектора (табл. 4.1).

Таблиця 4.1

Фізичні параметри моделі

V_P, км/с	V_S, км/с	ρ, г/см^3	$K_{п}$, %
2500	982	2,3	0
2650	1112	2,35	0
2850	1284	2,4	0
2700	1155	2,3	15
3150	1542	2,42	0
3200	1586	2,45	0
3300	1672	2,5	0
3500	1844	2,65	0
4000	2275	2,4	0

Числові розрахунки хвильового поля моделі виконувалися за програмою Tesseral. Процедура моделювання сейсмічного поля включала в себе опцію поглинання хвильової енергії.

Система спостережень включала 100 джерел збудження та 100 приймачів із кроком 100 м.

Параметри моделі: довжина по латералі 1 км; глибина $H = 600$ м.

Середня потужність газоносного пласта 20 м, довжина по латералі 190 м.

Довжина хвилі 30 м, частота моделюючого сигналу 60 Гц.

Параметри моделі зображено на рис. 21 додатка.

Одержано синтетичний сейсмічний розріз (рис. 22 додатка) та сейсмограми ССТ, що оброблялися за методикою спеціалізованої обробки в режимі ЗІА, а для порівняння – із застосуванням методики кінематичної обробки.

Відомо, що пористий газонасичений поклад є поглиначем сейсмічної енергії, і це добре видно з рис. 22 додатка в часовому інтервалі 420 мілісекунд. На штучному часовому розрізі в цьому інтервалі часу, під газонасиченим покладом також спостерігається поглинання сейсмічної енергії. По-перше, це веде до падіння амплітуд відбитих хвиль під покладом, а по-друге, на сейсмограмі спостерігається так звана деструкція фази сейсмічного відбиття. Такий ефект обумовлений низькошвидкісними характеристиками товщі, що залягає вище. Наведені характеристики має змодельований газонасичений поклад. Це, у свою чергу, за відсутності інформації та уявлень про геологічну будову досліджуваного об'єкта, може призвести до помилок при інтерпретації сейсмічних даних.

На рис. 23 додатка наведено мігровані сейсмічні дані, отримані за методикою кінематичної обробки сейсмічних даних і за алгоритмом обробки в режимі ЗІА. Аналізуючи одержані результати, можна стверджувати, що отриманий сейсмічний розріз характеризується "багатофазністю" відбиттів, яка веде до неоднозначності структурних побудов.

Суттєвим недоліком сейсмічного розрізу хвильового поля (рис. 23, *а*) є те, що на рівні 420 мілісекунд (виділено чорним овалом) спостерігається розрив фаз, який може призвести до невірних інтерпретаційних висновків.

Зображений на рис. 23, *б* додатка мігрований часовий розріз, який отриманий за алгоритмом ЗІА, демонструє однозначну поведінку хвильового поля з погляду геологічного обґрунтування, що спирається на вхідну модель. Особливо увагу звернемо на зону, де спостерігається значна деструкція фаз. На рис. 23, *а* додатка ця зона обведена чорним овалом. Після спеціалізованої обробки за алгоритмом ЗІА, фазова деструкція нівелюється і мігрований часовий розріз стає більш однозначним для інтерпретації.

Ще одним критерієм якості виконаної обробки за алгоритмом ЗІА є оцінювання мігрованих сейсмограм ССТ до підсумовування (рис. 4.2) та побудова залежності амплітуди від відстані "джерело–приймач" у районі аномальної поведінки амплітуд, такі елементи демонструються на рис. 24 додатка.

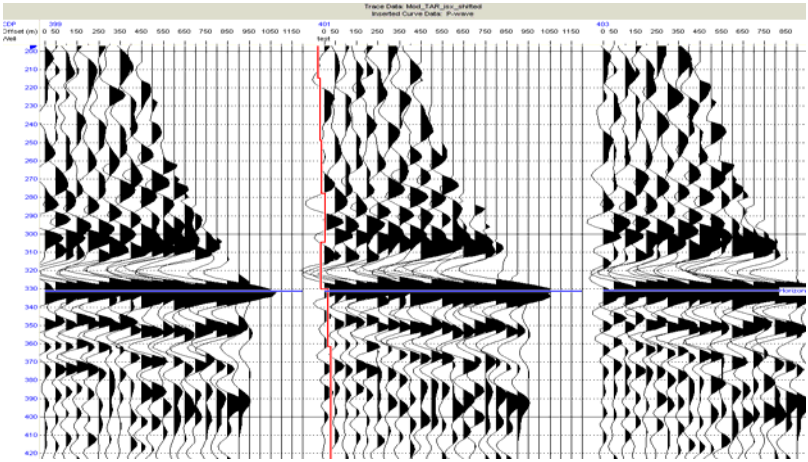


Рис. 4.2. Сейсмограми СГТ після обробки за алгоритмом ЗІА

Ця залежність характерна для інтервалу газонасиченого покладу і підтверджує наявність AVO-аномалій третього класу, які характерні для газонасиченого пісковика, згідно з чотириступеневою класифікацією AVO-аномалій.

Аналізуючи залежність на рис. 24 додатка, підкреслимо, що вона відображає логічну поведінку амплітуд залежно від відстані "джерело–приймач" в умовах газонасиченого колектора і на ній відсутні аномальні амплітудні викиди.

РОЗДІЛ 5
Практичне застосування AVO-аналізу та інверсії при пошуках газових покладів на родовищі Субботіна

5.1. Геологічна характеристика родовища Субботіна

5.1.1. Загальні відомості про район досліджень

Досліджуваний район, загальною перспективною площею близько 2,0 тис. км^2, розташований у північно-східній частині Чорного моря у межах прикерченського шельфу. Структуру Субботіна виявлено у східній частині на відстані 25 км на південь від південного берега Керченського півострова (рис. 25 додатка).

Дно моря в районі робіт рівне, має нахил на південь. Його глибина змінюється від 20 до 200 м, у межах структури Субботіна – від 40 до 50 м.

Структуру Субботіна виявлено в 1976 році сейсморозвідкою методом спільної серединної точки (МССТ) і підготовлено до глибокого буріння у 2002 році. У процесі геологічних досліджень вивчено палеоценовий, еоценовий, майкопський і середньоміоценово-пліоценовий нафтогазоносні комплекси. Сейсмічні дослідження на прикерченському шельфі ведуть з 1957 року.

У 1976 році. на прикерченському шельфі проводилися спільні пошукові роботи МССТ сейсмічними партіями 288/76 Чорноморської геофізичної експедиції об'єднання "Кримморгеологія" і 2/76 ЦГГЕ НВО "Південьморгео".

За результатами досліджень параметричної свердловини № 403 здійснено прив'язку відбиваючих сейсмічних горизонтів. На рис. 26 додатка зображено сейсмогеологічний розріз по профілю № 1.

На даний час на родовищі також розкрито бурінням свердловини Субботіна-1, Субботіна-2, Субботіна-3. Наявні геолого-геофізичні матеріали вказують на продуктивність розкритих розрізів майкопу.

5.1.2. Літостратиграфічна характеристика родовища

У розрізі прикерченського шельфу Чорного моря виділяється п'ять нафтогазоносних перспективних комплексів: нижньокрейдяний, верхньокрейдяний, палеоценово-еоценовий, олігоценово-нижньоміоценовий (майкопський) середньоміоценово-пліоценовий. На структурі Субботіна розкрито бурінням лише три останні комплекси (рис. 26 додатка).

Палеоценово-еоценовий газоносний комплекс вміщує карбонатні колектори тріщинно-порового типу, їх густина становить близько 1270–2640 кг/м^3, відкрита пористість – від 1 до 47,8 % (переважна частина колекторів має відкриту пористість 10–20 %, місцями 25–30 %). За рахунок відкритих тріщин вона підвищується до 2,18 мкм^2. Пісковики являють собою колектори порового типу, їх густина близько 1680–2480 кг/м^3, пористість близько 5,6–35,8 %, проникність від 0,001 до 0,005 мкм^2.

Олігоценово-нижньоміоценовий (майкопський) нафтогазоносний комплекс є регіонально продуктивним в межах Індоло-Кубанського прогину. Він характеризується на півострові проявами діапіризму та грязьового вулканізму, розвитком брахіантиклінальних і куполоподібних складок, як правило, діапірової та прихованодіапірової будови.

Загалом майкопська товща є потужною регіонально поширеною надійною екрануючою товщею. Пісковики і алевроліти залягають переважно на двох стратиграфічних рівнях – у підошві (базальні верстви) і верхньокерлеутському горизонті, де вони об'єднуються в декілька пачок. Сумарна потужність їх змінюється в широкому

діапазоні від 0 до 200 м. Відкрита пористість становить близько 4,6–30 %, проникність – від 0,0001 до 0,6426 мкм^2.

Із комплексом пов'язана низка газових, газоконденсатних і нафтових покладів на Керченському півострові: на Мошкарівському, Владиславівському, Південносиваському, Фонтанівському, Поворотному, Придорожному родовищах.

Середньоміоценово-пліоценовий нафтогазоносний комплекс найкраще вивчений у північно-східних районах Керченського півострова, що належать до південного борту Індоло-Кубанського прогину.

Колектори представлено органогенно-детритовими, черепашковими, оолітовими вапняками та збагаченими органогенним матеріалом мергелями, зрідка пісковиками і алевролітами. Вони залягають у вигляді малопотужних прошарків серед глин, які домінують у розрізі.

Унаслідок буріння параметричної свердловини № 403 на структурі Субботіна випробуванням доведено нафтоносність майкопської серії. У процесі буріння газопрояви спостерігалися за показниками газового каротажу. Наявність бітуму в керні встановлено при петрографічних і хіміко-бітумінологічних дослідженнях.

При проходженні середньоміоценових-пліоценових утворень в інтервалі 180–690 м відзначалося різке зниження часу буріння, густини промивального розчину, підвищення вмісту метану.

Наявність порід-колекторів, представлених пісковиками й алевролітами майкопської серії, підтверджується результатами лабораторних досліджень і даними ГДС. Відкрита пористість пісковиків становить за лабораторними аналізами близько 8–12 %, проникність у межах 5–47,5 мкм^2. Пористість алевролітів змінюється від 4,6 до 17,5 % при пересічних значеннях 10–12 %, проникність – від часток одиниці до 10–18 мкм^2. Пачки пісковиків – грануляційних колекторів нижнього майкопу, виділяються в інтервалах 2852–2880, 2632–2700, 2520–2580, 2380–2455 м. У відкладах середнього і верхнього майкопів простежуються аналогічні пачки піщано-алевролітових порід. У переліку інтервалів для оцінювання фільтраційно-ємнісних властивостей і характеру насичення є також еоценові відклади, що залягають на глибинах 2912–2940, 3300–3320, 3458–3495, 3748–3800, 3860–3890 і 3910–3944 м.

Стратиграфічний розріз прикерченського шельфу в діапазоні глибин буріння проектних глибоких свердловин представлено породами нижньої та верхньої крейди, палеоцену, еоцену, міоцену, пліоцену та антропогену.

Нижньокрейдові відклади мають потужність близько 100 м. Судячи з розрізів свердловин, пробурених у прибережній зоні Керченського півострова, вони представлені темно-сірими та сірими, вапнистими та алевритистими аргілітами пізньоальбського віку з рідкими прошарками пісковиків і алевролітів.

Верхньокрейдові утворення виражені переважно сірими та темно-сірими вапняками, різною мірою глинистими, тріщинуватими та мергелями і глинистими мергелями з рідкими прошарками глин, пісковиків та алевролітів. Теригенні породи, очевидно, істотну роль відіграють тільки в нижній сеноманській компоненті розрізу.

Кайнозойський комплекс (до 3,4–3,5 км) представлено переважно аргілітами і вапняками палеоцену, пісковиками, глинами і мергелями еоцену, а також в основному глинистими породами майкопської серії (олігоцен – нижній міоцен) і середнього міоцен – антропогену.

У розрізі палеоцену превалюють вапнисті аргіліти з прошарками глинистих мергелів, пісковиків і вапняків. Товщина їх досягає 200–250 м .

Еоценові відклади представлено переважно пісковиками, алевролітами, алевритистими мергелями та зеленкувато-сірими глинами потужністю до 200–260 м.

Розріз майкопської товщі на суходолі складений сірими і темно-сірими, у верхній частині бурувато-сірими, невапнистими, у середній частині слабовапнистими, різною мірою алевритистими глинами, із прошарками та пачками алевролітів і пісковиків. За матеріалами морської сейсморозвідки товщина майкопської серії становить 2000 м.

Теригенно-карбонатні утворення середнього міоцен – пліоцену, завтовшки 700–720 м, неузгоджено перекривають більш древні відклади.

Розріз середнього міоцену (баденського ярусу) складений чергуванням сірих і темно-сірих глин, алевролітів, пісковиків, мергелів і органогенно-детритових вапняків завтовшки 80–100 м.

Сарматський ярус верхнього міоцену виражений темно-сірими і сірими шаруватими глинами з пачками мергелів і вапняків. Потужність – до 100 м.

Меотичні відклади верхнього міоцену представлено сірими вапняками-черепашниками і глинами в нижній частині піщанистими, із прошарками пісковиків завтовшки близько 100 м.

Породи нижнього пліоцену (понтичного ярусу) виражено сірими та темно-сірими глинами, із прошарками мушлевих та оолітових вапняків. Потужність – до 100 м.

Розріз середнього пліоцену (кімерійський і куяльницький яруси) складено невапнистими глинами та пісками, із прошарками слабо зцементованих органогенно-детритових і мушлевих вапняків завтовшки 200–225 м.

Верхньопліоценові утворення за матеріалами сейсморозвідки передбачаються тільки на Південнокерченській структурі. Вони представлені сірими глинами та пісковиками завтовшки 50–70 м.

Антропогенові осади складаються з мулу, суглинків, у нижній частині пісковиків та слабо зцементованих вапняків-черепашників. Потужність – до 100 м.

5.1.3. Тектоніка району досліджень

Ділянка структури Субботіна міститься в межах Південнокерченського (Керченсько-Таманського) прогину, розташованого між Кримською і Кавказькою складчастими спорудами.

У східній частині прикерченського шельфу прогин обмежується Правдинським розломом, а з південного сходу – Арапським виступом і зоною Бар'єрних антикліналей (західне занурення орогену Великого Кавказу). Він дискордантно перетинає структури складчастих альпідів Північно-Західного Кавказу і через Південнокарагатську сідловину з'єднується на заході із западиною Сорокіна. Розташована північніше від сідловини ділянка прикерченського шельфу, разом із Північно-Західною рівниною Керченського півострова являє собою східне занурення складчастої споруди Гірського Криму. Південнокерченський прогин, складений із неогенових і палеогенових осадових порід, що трансгресивно перекривають відклади верхньої крейди. Широко поширена, крім середньо-

міоценових–пліоценових утворень, потужна (600–3500 м) здебільшого глиниста майкопська товща (збагачена у верхній частині піщано-алевритовим матеріалом), а також еоценові (100–300 м) і верхньокрейдові породи (1,5–2,5 км). У центральній (осьовій) частині прогину, до якої належить структура Субботіна, потужність майкопу 2–4 км, палеоцену – еоцену близько 600–800 м.

Значні дислокації осадового чохла прогину і западини Сорокіна виявлено сейсморозвідкою і пов'язано з дією напруг (сил) стиснення на етапах гороутворення і (або) з явищами глиняного діапіризму. На таких етапах сформувалися передпалеогенове і передпліоценове неузгодження, що розділяють літостратиграфічні комплекси з різними особливостями структур. Останні найбільш суттєво змінюються на передпліоценовому рівні. Зокрема, локальні структури простежуються лише до цього рівня. На півночі прикерченського шельфу зім'яті у складки міоценові утворення виходять на поверхню морського дна або під четвертинні осадові товщі.

Структури у відкладах крейди – міоцену групуються в декілька тектонічних зон північно-східного простягання. Вони переважно представлені асиметричними високоамплітудними вузькими антикліналями, ускладненими розривними порушеннями такого самого простягання. Висота їх зазвичай становить декілька сотень метрів, кути падіння крил – близько 20–40°.

Структура Субботіна як склепінна пастка підготовлена по горизонтах II_a і III_m [14]. Вона являє собою антикліналь північно-східного простягання розміром 12×4 км і висотою 850 м по ізогіпсі, мінус 4120 м підошви палеогену (горизонт III_m), її розміри майже не змінюються (12×5 км) за горизонтом II_a в нижній частині майкопських відкладів по замкнутій ізогіпсі – 3520 м. Висота зменшується до 700 м. Кути падіння більш крутого південного крила складки складають 35–40°, північного 20–30°. Перше крило ускладнене скидом та підкидом з амплітудами відповідно 50–100 м та 150–300 м і більше. Поза межами замкнутої ізогіпси на північному крилі спостерігається неузгоджений скид амплітудою 50–150 м. У товщі міоценових порід структура Субботіна має вигляд неускладненої розривними порушеннями антикліналі заввишки 150–200 м.

За результатами буріння свердловини Субботіна № 403 підтверджується чітка стратифікація сейсмічних відбиттів I_a і II_a,

віднесених відповідно до покрівлі й підошви майкопської серії. Так, сейсмічний відбиваючий горизонт III_m, що пов'язувався до буріння з підошовною частиною палеогену, розташовується лише на різних рівнях середнього еоцену.

За інтерпретацією сейсмічних матеріалів ДГП "Укргеофізика" за горизонтом відбиття I_b нижнього майкопу, складка Субботіна представляє собою антикліналь субширотного простягання. Її розміри в межах замкненої ізогіпси мінус 3000 м становлять 10×2…4 км, висота – 650 м. Південне крило структури похилене під кутом 20–24° і ускладнене Південносубботівською підкидонасувною зоною південної вергентності, амплітудою понад 200 м.

За більш глибоко розташованим горизонтом III антикліналь має два склепіння й ускладнена низкою розривних порушень.

5.2. Результати спеціалізованої обробки-інтепретації даних морської 2D сейсморозвідки структури Субботіна

Для апробації методики спеціалізованої обробки ЗІА використовувалися результати досліджень уздовж двох морських 2D сейсмічних профілів структури Субботіна акваторії Чорного моря. Сейсмічні дослідження виконувалися з борту науково-дослідного судна "Искатель" під час руху, методом багатократного перекриття, із пунктом збудження сейсмічних коливань, що працює в автоматичному режимі збудження та реєстрації відбитих сейсмічних хвиль. Пошукові профілі відпрацьовувались по сітці 2×2 км. База реєстрації складає 2975 м – це є максимальне віддалення "джерело–приймач", а відстань між пунктами збудження по профілю дорівнювала 25 м, що забезпечило кратність спостереження 60.

Наведемо основні характеристики матеріалів, що використовувалися у процесі спеціалізованої обробки сейсмічних даних у режимі збереження "істинних" амплітуд, зокрема, параметри запису та геометрія спостережень:

- довжина запису – 6 с, дискретність запису – 2 мілісекунди, у приймальній косі сейсмічних коливань розміщено 120 каналів,

відстань між пунктами прийому – 25 м, відстань між пунктами збудження – 25 м;

- мінімальне віддалення "джерело–приймач" – 175 м, максимальне віддалення "джерело–приймач" – 2975 м;
- тип джерела BOLT, відстань "корма–джерело" – 70 м, глибина вибуху – 6 м, швидкість судна близько 4,5–4,7 вузла.

5.2.1. Атрибутний аналіз сейсмічних даних

Атрибутний аналіз сейсмічних даних проведено з метою оцінювання ефективності розробленого алгоритму спеціалізованої обробки сейсмічних даних у режимі збереження "істинних" амплітуд у візуалізаційному режимі. Крім того, атрибутний аналіз забезпечує більш детальне вивчення комплексу динамічних характеристик сейсмічного запису сейсмогеологічного розрізу при пошуках газонасичених зон та ймовірних зон з аномально високими тисками.

Це досягається застосуванням процедур, що дозволяють перетворювати енергетичні й частотні характеристики сейсмічного запису. Як такі характеристики найчастіше використовують: повну енергію; енергію, локалізовану в заданій смузі частот; середню частоту, оцінювану по енергії; частку енергії в заданій смузі частот від повної енергії у процентах, ширину спектра частот тощо.

При динамічному аналізі сейсмічних записів найчастіше використовується перетворення Гільберта.

Якщо сейсмічну трасу представити у вигляді

$$S(t) = A(t)\cos\theta(t), \tag{5.1}$$

де $A(t)$ і $\theta(t)$ – амплітуда і фаза запису,

то спряжена згідно з перетворенням Гільберта траса визначається як

$$S_1(t) = A(t)\sin\theta(t). \tag{5.2}$$

Обвідну комплексної сейсмічної траси $A(t)$, а саме,

$$Z(t) = A(t)\exp[i\cdot\theta(t)], \tag{5.3}$$

називають миттєвою амплітудою сейсмічного запису.

Функція

$$\theta(t) = \operatorname{arctg}\left(S_1(t)/S(t)\right) \tag{5.4}$$

визначає миттєву фазу сейсмічного запису.

Диференціюючи миттєву фазу $\theta(t)$ за часом, можна отримати ще один параметр – миттєву частоту.

На рисунках 28 і 29 додатка наведено часові розрізи миттєвої амплітуди і на рисунках 5.1 і 5.2 часові розрізи миттєвої фази структури Субботіна, що обраховані для двох типів обробки сейсмічних даних – кінематичної обробки та обробки в режимі ЗІА. Як видно на рис. 29 додатка, у купольній частині цієї структури спостерігається поглинання енергії сейсмічної хвилі. Тобто, структуру можна розглядати як деякий аномальний об'єкт, що поглинає сейсмічну енергію.

Водночас, під куполом цієї аномалії відбувається падіння частоти сейсмічного сигналу, але такий аномальний фактор насправді є абсолютно відсутнім (рис. 28 додатка).

Аналізуючи отримані результати, констатуємо, що результати кінематичної обробки сейсмічних даних певною мірою відображають структурну складову геологічного розрізу (рис. 28 додатка). Часові розрізи миттєвих амплітуд, отримані за мігрованим часовим розрізом ЗІА, відображають повною мірою як структурну складову, так і динамічну виразність відбиваючих меж (рис. 29 додатка).

Як видно на часових розрізах миттєвих фаз, які отримані за мігрованими часовими розрізами (рис. 5.1, 5.2), відображаються основні елементи структури з роздільною здатністю, вищою ніж на розрізі (рис. 5.1), що одержаний за методикою кінематичної обробки.

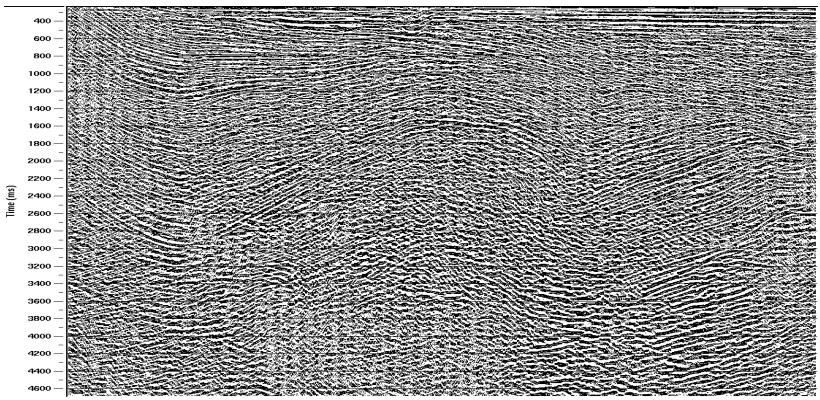


Рис. 5.1. Миттєві фази розраховані по мігрованому розрізу, отриманому за методикою кінематичної обробки

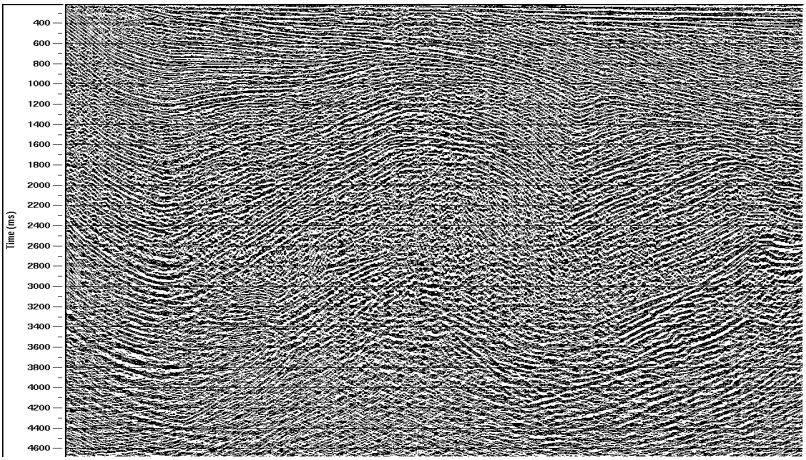


Рис. 5.2. Миттєві фази розраховані по мігрованому розрізу, отриманому за алгоритмом обробки ЗІА

На результатах кінематичної обробки спостерігається зарегульованість хвильового поля (рис. 5.1) завдяки застосуванню процедур когерентної фільтрації для ослаблення хвиль-завад. Таким чином, спеціалізована обробка в режимі збереження "істинних" амплітуд забезпечує отримання кондиційних результатів для виконання AVO-аналізу та інверсії сейсмічних даних.

5.2.2. Побудова AVO-атрибутів

Як видно з мігрованого часового сейсмічного розрізу рис. 30 додатка, який побудований за даними кінематичної обробки попередніх років по профілю № 2, на ньому в загальних рисах відображено структурну складову хвильового поля. Причому динамічна виразність відбиттів є досить низькою.

Такий характер хвильового поля на сумарному часовому розрізі зумовлений недостатньо чітким вибором процедур обробки сейсмічного сигналу та деструктивними процедурами регулювання та вирівнювання амплітуд.

Мігрований часовий сейсмічний розріз (рис. 31 додатка) має динамічно виразні відбиття, що простежуються по всьому інтервалу запису. Особливо важливою складовою хвильового поля на

представлених матеріалах є виділення проявів самої структури Субботіна у хвильовому полі. Порівнюючи та аналізуючи рисунки 30 і 31 додатка, відмітимо суттєву різницю, особливо при виділенні більш пологого схилу структури Субботіна.

На рис. 31 додатка цей елемент хвильового поля виділяється набагато виразніше в динамічному сенсі. Такого результату було досягнуто завдяки коректному підбору швидкісної моделі, що і забезпечило можливість виділити та локалізувати відбиваючі площадки на мігрованому часовому сейсмічному розрізі.

Контроль ефективності процедур динамічної обробки здійснюється спектральним аналізом елементраного сигналу, що розрахований уздовж фрагмента профілю № 2. Цей сигнал використовується при операції сейсмічної згортки з коефіцієнтами відбиття геологічного середовища.

Оцінюючи форму та амплітудно-частотний спектр цього елементарного сигналу, зазначимо (рис. 32 додатка), що він є дійсно нуль-фазовим без спотворень і має необхідні спектральні характеристики, притаманні корисному сейсмічному сигналу. Це свідчить про високу якість спеціалізованої обробки сейсмічної інформації та високу ефективність розробленого алгоритму обробки даних морської сейсморозвідки в режимі ЗІА.

5.2.3. Кутові розрізи

Для виявлення AVO-аномалій здійснювався, до процедури підсумовування, аналіз мігрованих кутових сейсмограм ССТ. Як видно з наведених на рис. 33 додатка мігрованих кутових сейсмограм ССТ, профілю № 1, спостерігається яскравий AVO-ефект в діапазоні кутів 0–45° в часовому інтервалі – 1600 мілісекунд. Величина коефіцієнтів відбиття *P*-хвиль, навіть в області невеликих кутів падіння (до 30°), істотно залежить від співвідношення швидкостей V_P / V_S (тут V_P – швидкість поширення поздовжніх хвиль; V_S – швидкість поширення поперечних хвиль) або коефіцієнтів Пуассона покриваючої та підстилаючої товщ.

Одним із найперших та найпростіших аналітичних представлень AVO-атрибутів є кутові суми ССТ в різних діапазонах кутів

падіння хвилі на поверхню відбиття. На рис. 34 додатка представлено часовий розріз кутової суми при малих кутах падіння хвилі 0°–15° уздовж профілю № 1. Із певним наближенням можна говорити, що це є сума ближніх віддалень сейсмограм ССТ.

На рис. 34 додатка можна виділити зони різкої зміни акустичної жорсткості у верхній частині цього розрізу. Вони характеризуються як протяжними, так і фрагментарними динамічно виразними відбиттями. Такий характер зміни акустичної жорсткості притаманний екрануючим поверхням імовірних колекторів.

На рис. 35 додатка зображено часовий розріз суми для великих кутів падіння хвилі від 15° до 45°, який із певним наближенням можна назвати сумою дальніх віддалень. На цьому рисунку добре відображаються зміни динамічних характеристик хвильового поля. Згідно з теорією AVO-аналізу та класифікації колекторів за AVO-ознаками ймовірні газонасичені колектори третього класу у хвильовому полі проявляються при великих кутах падіння.

Кутові сумарні часові розрізи вздовж профілю № 2 в діапазоні кутів падіння хвилі на відбиваючу межу від 0 до 30° зображено на рис. 36 додатка.

Динаміка перспективних товщ структури Субботіна проявляється при кутах падіння від 15° (рис. 36 додатка), що може свідчити про газонасиченість цієї майкопської товщі.

За набором мігрованих кутових сейсмограм ССТ виконано ітераційний аналіз швидкостей кожного відліку сейсмічного запису для отримання високороздільної швидкісної картини хвильового поля. Для розв'язання поставленої задачі використовувалися траси "*інтерсепта"* (значення інтенсивності амплітуди на нульовому віддаленні "джерело–приймач") та *"градієнта"* (значення зміни інтенсивності амплітуди залежно від віддалення "джерело–приймач"). Числові розрахунки базуються на кореляційній статистиці.

Як видно з рис. 37 додатка, завдяки застосуванню розробленого алгоритму спеціалізованої обробки зі збереження корисних складових хвильового поля, побудовано високороздільну швидкісну картину, яка добре узгоджується з геологічними даними.

5.2.4. Моделювання AVO-ефекту за свердловинними даними із застосуванням рівняння Акі – Річардса

Із метою оцінювання можливостей виявлення газонасичених покладів у майкопській товщі на пошуковій структурі Субботіна проведено моделювання. За його результатами побудовано синтетичний сейсмічний розріз. Значення швидкості *S*-хвиль розраховано по кривій швидкості *P*-хвиль за рівнянням Кастаньї.

Для побудови синтетичних сейсмограм використовувалося рівняння Акі – Річардса. На рис. 38 додатка наведено вхідні дані (криві швидкостей *P*- і *S*-хвиль, ρ та елементарний сигнал (див. рис. 32 додатка)). На рис. 38, *а* додатка зображено реальну та синтетичну сейсмограми однакових віддалень "джерело–приймач". Із наведених даних випливає, що подібність обох сейсмограм є досить суттєвою, що підтверджується зіставленням амплітуд відбитих хвиль залежно від віддалення "джерело–приймач" по цільових горизонтах (рис. 38, *б* додатка).

Спостерігається тенденція збереження однакової поведінки амплітуд на цільових горизонтах (на рис. 38 – інтервал жовтого кольору). Факт збереження інформаційної складової сейсмічного запису, як і за обробки реальних сейсмічних даних у режимі збереження "істинних" амплітуд, підтверджує наявність аномальної поведінки амплітуд, що є індикатором можливої наявності газонасиченого покладу.

5.2.5. Аналіз AVO-атрибутів "інтерсепт-градієнт"

У процесі спеціалізованої обробки-інтерпретації сейсмічних даних на родовищі структури Субботіна побудовано розрізи AVO-атрибутів. Часовий розріз добутку "*інтерсепт*×*градієнт*" уздовж профілю № 1 для діапазону кутів падіння хвилі 0–30° показано на рис. 39 додатка. Він може служити непрямим індикатором водонасичених та газонасичених колекторів залежно від полярності сигналу.

Для оцінювання типу флюїдонасиченості продуктивних горизонтів майкопської товщі структури Субботіна за даними AVO-аналізу побудовано часові розрізи добутку "*інтерсепт×градієнт*" та кросплоти із залученням даних свердловинних геофізичних досліджень. Фрагмент мігрованого часового розрізу за мігрованими сейсмограмами ССТ уздовж профілю № 2 показано на рис. 40 додатка. На рисунках 41 і 42 додатка окремо зображено розрізи *інтерсепта – A* та *градієнта– G* відповідно, а на рис. 43 наведено часовий розріз добутку "*інтерсепт×градієнт*". Він характеризує сейсмічні хвилі з аномальними значеннями коефіцієнтів відбиття на нульовій відстані "джерело–приймач". Зростання амплітуди відбиття сейсмічної хвилі з віддаленням характеризується появою додаткового екстремуму в зареєстрованому сигналі. Зменшення абсолютної амплітуди відображається у від'ємних значеннях амплітуди на розрізі "*інтерсепт×градієнт*" (рис. 43 додатка).

Із метою детального аналізу сейсмічних даних уздовж фрагмента профілю № 2 побудовано кросплот (рис. 44 додатка) для часового інтервалу 250 мілісекунд, у межах від 1400 до 1650 мілісекунд, в який потрапляють прогнозовані колектори. Як видно з наведених даних, на ділянках, де проявляються незначні зміни амплітуд залежно від віддалення "джерело–приймач", значення *градієнта* близькі до нуля. Значення *інтерсепта* змінюються від додатних значень до від'ємних залежно від того, як поводить себе амплітуда. На кросплоті (рис. 44 додатка) множини описаних вище значень дають лінійний тренд і таким чином чітко виділяється зона газонасичених порід. Одержані результати отримані за реальними даними і корелюються зі свердловинною інформацією.

Результати AVO-аналізу в числовій формі винесено на реальний сейсмічний розріз (рис. 45 додатка).

Як бачимо, у межах інтервалу виявлено газонасичену товщу та спостерігаються ймовірні індикатори газонасиченості у верхній частині розрізу.

Для незалежного підтвердження наявності аномалій на часових розрізах ССТ із використанням AVO-атрибутів "*інтерсепт-градієнт*" можна застосовувати спеціальний алгоритм, блок-схему якого зображено на рис. 45 додатка. За допомогою цього алгоритму за даними AVO-аналізу (параметрів "*інтерсепт-градієнт*") можна ідентифікувати аномалії, зв'язані з літологією

або покладами вуглеводнів. Причому амплітудних деструкцій на часовому розрізі "*інтерсепта*" не виявлено. Усі основні відбиваючі горизонти відображені і мають динамічні прояви, що ще раз свідчить про високу ефективність застосування розробленого алгоритму обробки в режимі ЗІА.

Рис. 5.3. Блок-схема алгоритму для ідентифікації типу AVO-аномалій на часових розрізах ССТ

5.2.6. Часові розрізи псевдокоефіцієнта Пуассона

Зміна відношення V_P / V_S є головним чинником, що викликає AVO-аномалії, і його пов'язують із наявністю вуглеводнів, де V_P – швидкість поширення поздовжніх хвиль; V_S – швидкість поширення поперечних хвиль.

Нагадаємо, що відношення V_P / V_S прямо пов'язане з коефіцієнтом Пуассона ν співвідношенням

$$\frac{V_P}{V_S} = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}}\,. \qquad (5.5)$$

Градієнт залежить від R_P – коефіцієнта відбиття поздовжньої хвилі, а також від контрасту коефіцієнтів Пуассона по обидва боки відбиваючої межі. Характер цієї залежності – при зменшенні R_P і зі зменшенням коефіцієнтів Пуассона градієнт також зменшується.

За даними сейсмічних спостережень будують часові розрізи псевдокоефіцієнта Пуассона, який розраховується за формулою

$$\text{Pseudo Poissons Reflectivity} = \frac{\Delta V_P}{V_P} - \frac{\Delta V_S}{V_S}. \qquad (5.6)$$

На рисунках 45 і 46 представлено часові розрізи псевдокоефіцієнтів Пуассона вздовж профілів № 1 і № 2 відповідно.

Аналіз часових розрізів цих параметрів також підтверджує, що геологічний розріз даного регіону у верхній майкопській товщі є досить контрастним у літологічному аспекті й характеризується різкими перепадами псевдокоефіцієнтів Пуассона.

Аналогічні зміни цього параметра спостерігаються в зонах геологічних неузгоджень, в яких проявляється різка зміна літології (рис. 46 додатка).

5.2.7. Часові розрізи флюїд-фактора

Для оцінювання характеру насичення порід-колекторів геологічного розрізу структури Субботіна будувалися часові розрізи флюїд-фактора, значення якого характеризують ступінь відхилення стрибка швидкості поздовжніх хвиль від передбаченого для водонасичених порід. На рис. 47 (ліворуч) додатка наведено часовий розріз флюїд-фактора вздовж профілю № 1 без урахування свердловинних даних. Достовірність одержаних оцінок відповідає ймовірності 0,8. Праворуч на рис. 47 додатка – часовий розріз флюїд-фактора вздовж профілю № 2 з урахуванням даних по свердловині Субботіна-403. Достовірність одержаних оцінок відповідає тій самій імовірності 0,8.

Із цього рисунка видно фрагментарні аномалії прогнозованих колекторів. Зазначимо, що за розрізом флюїд-фактора на якісному рівні прогнозуються газонасичені товщі порід.

5.3. Акустична інверсія сейсмічної інформації

Для побудови часового розрізу акустичного імпедансу залучались сейсмічні дані, одержані вздовж профілю № 2, на якому розташовано опорну свердловину Субботіна № 403.

Для коректної побудови часових розрізів акустичного імпедансу необхідно відновити частотний спектр сейсмічного сигналу.

Низькочастотна складова частотного спектра (низькочастотний тренд) визначається на етапі побудови початкової товстошаруватої моделі імпедансів шляхом фільтрації акустичної кривої. За допомогою тестування низькочастотний тренд імпедансних характеристик вибирається в діапазоні 5–25 Гц. Високочастотну складову частотного спектра знаходять за даними акустичного каротажу (АК).

За результатами відновлення частотного спектра будують початкову товстошарувату модель для акустичної інверсії сейсмічних даних (рис. 48 додатка), яка характеризує тренд зміни швидкостей поздовжніх хвиль V_P та акустичного імпедансу як по латералі, так і по вертикалі, тобто по часовій шкалі.

У цьому посібнику застосовувався алгоритм інверсії, в якому використовується модель акустичного імпедансу. Алгоритм забезпечує детерміністичну інверсію шляхом оптимізації на кожному кроці параметрів моделі в рамках деяких довірчих меж. При цьому вважається, що вхідний елементарний сигнал відомий і є точно підібраним.

Алгоритм побудови моделі акустичного імпедансу та інверсійних перетворень сейсмічних даних зображено вище на рис. 4.1.

Детальна кореляція сейсмічних і свердловинних даних та їх двовимірна інтерполяція на сейсмічний часовий розріз, виконувалася підбором елементарного сигналу (див. рис. 32 додатка) та побудовою синтетичних сейсмічних сейсмограм (див. рис. 38 додатка). Ці процедури проводять у декілька етапів. На першому етапі кореляційного аналізу оцінюють параметри елементарного сигналу в околі свердловини. Після того, як свердловина відкорельована з найвищим коефіцієнтом кореляції, розраховують елементарний сигнал в

цільовому інтервалі з урахуванням даних АК свердловини. У результаті знаходять параметри зваженого, генералізованого елементарного сигналу (див. рис. 32 додатка), який задовольняє будь-яку точку сейсмічного розрізу і відповідає всьому інтервалу досліджень та каротажним кривим АК і густини.

Загальний коефіцієнт кореляції за свердловинними та сейсмічними даними дорівнює 0,82.

Наступним кроком є побудова оператора інверсії для переходу від сейсмічних амплітуд в область сейсмічних імпедансів. На рис. 49 додатка демонструється оператор інверсії та порівняння реальних та модельних трас. Похибка моделювання є незначною і дорівнює 0,18. Коефіцієнт кореляції між реальними та модельними трасами становить 0,983.

За даними інверсії побудовано часовий розріз акустичних імпедансів в заданому цільовому інтервалі, уздовж профіля № 2 (рис. 50 додатка). За результатами аналізу розрізу акустичних імпедансів виділяють зони з пониженими значеннями АІ (до 5000 м/с×г/см^3) при нормальному падінні хвилі на відбиваючу поверхню. Такий ефект може свідчити про наявність зон із розущільненими товщами, які теоретично можуть показувати наявність покращених колекторних властивостей у досліджуваному інтервалі майкопської товщі.

5.4. Пружна (еластична) інверсія до підсумовування

У процесі обробки сейсмічних даних будувалися часові розрізи пружних імпедансів *P*- і *S*-хвиль. Числові розрахунки пружних імпедансів здійснювалися для трьох кутів падіння хвилі на відбиваючу поверхню: 1) при нормальному падінні хвилі на відбиваючу поверхню, 2) при падінні хвилі під кутом 5°, 3) при падінні хвилі під кутом 25°. За результатами пружної інверсії побудовані розрізи імпедансів поздовжніх та поперечних хвиль, розрізи співвідношення V_P / V_S та розрізи $\lambda\rho$, $\mu\rho$.

Для реалізації алгоритму пружної інверсії вирішувалась задача оцінювання амплітудно-частотного спектра елементарного сигналу залежно від кута падіння хвилі на відбиваючу поверхню. Алгоритм пружної інверсії включає в себе оцінку елементарного сигналу при падінні хвилі в межах від 0 до 10° – ближні віддалення, при падінні хвилі від 20 до 30° – дальні віддалення.

При похилому падінні хвилі на відбиваючу поверхню та внаслідок розходження фронту хвилі та втрат енергії, у тому числі й непружних втрат енергії, за наявності флюїду в породі-колекторі спостерігаються зміни форми елементарного сигналу залежно від кута падіння хвилі на відбиваючу поверхню.

На рис. 51 додатка зображено амплітудно-частотні характеристики елементарних сигналів, отриманих при різних кутах падіння: перший отриманий при кутах падіння 7,5°, другий – при 22,5°. Аналізуючи ці елементарні сигнали, зазначимо, що елементарний сигнал, отриманий при незначних кутах падіння, містить у собі більш високочастотну складову порівняно з елементарним сигналом, що одержаний при значних кутах падіння хвилі на відбиваючу поверхню.

Відмінністю між пружною та акустичною інверсіями є ще й те, що будуються оператори переходу від даних ГДС до сейсмічних даних для трьох основних величин: імпедансів поздовжніх хвиль, імпедансів поперечних хвиль і співвідношення V_P / V_S. Ці оператори показано на рис. 52 додатка.

На рисунках 53–61 зображено часові розрізи *P*- і *S*-імпедансів (при різних кутах падіння хвилі), що отримані за результатами пружної інверсії.

Проаналізувавши результати пружної інверсії, будують розрізи імпедансів поздовжніх хвиль – I_P, поперечних хвиль – I_S та їх співвідношення – V_P / V_S уздовж фрагмента профілю № 2 при різних кутах падіння. На рисунках 53–55 додатка зображено імпеданси I_P, I_S та V_P / V_S при нормальному падінні хвилі на відбиваючу поверхню. Часовий розріз імпедансів поздовжніх хвиль, що зображений на рис. 53 додатка, є аналогом акустичного імпедансу (див. рис. 50 додатка). На рисунках 56–58 додатка зобра-

жено імпеданси I_P, I_S та V_P/V_S при падінні хвилі під кутом 5° на відбиваючу поверхню. Найбільш високороздільну та однозначну картину I_P, I_S та V_P/V_S отримано за результатами пружної інверсії сейсмічних записів під кутом падіння хвилі 25° (рисунки 59–61 додатка). Таким чином, підтверджуються геологічні уявлення про досліджуваний розріз щодо наявності перспективних газонасичених товщ.

5.5. Оцінювання параметрів Ламе часового розрізу

За даними AVO-аналізу й інверсії шляхом числових розрахунків побудовано часові розрізи комплексних параметрів Ламе $\mu\rho$ та $\lambda\rho$ (рисунки 62 і 63 додатка відповідно).

Результати аналізу часових розрізів $\mu\rho$ та $\lambda\rho$ показують, що вони мають високу роздільну здатність. Результати інтерпретації розрізу $\mu\rho$ свідчать про те, що досліджувана товща характеризується не дуже контрастними літологічними змінами.

Розріз $\lambda\rho$ характеризується наявністю понижених значень у зонах із покращеними колекторними властивостями. Перспективні газонасичені заглинизовані пісковики характеризуються значеннями $\lambda\rho$, що коливаються в межах від 3,36 ГПа×г/см^3 до 4.00 ГПа×г/см^3 відповідно (рис. 63 додатка).

5.6. Інверсія сейсмічних швидкостей

Із метою деталізації петрофізичних параметрів та одержання кількісної оцінки геологічного розрізу за даними сейсморозвідки здійснювалась інверсія сейсмічної швидкості.

Для реалізації алгоритму інверсії будувалася модель багатокомпонентної нафтогазоводонасиченої глинистої породи-колек-

тора, структура пустотного простору якої включає міжзернові пори, перехідні пори і мікротріщини та глинисті включення з водонасиченими мікропорами (рис. 64 додатка).

Для параметризації багатокомпонентної моделі залучаються результати петрографічних і петрофізичних досліджень зразків кернового матеріалу, що отримані на свердловині Субботіна № 403.

За результатами інверсії ультразвукових швидкостей пружних хвиль і об'ємної густини зразків керна визначено модулі пружності твердого скелета глинистих пісковиків і густину відповідно K_S = 42,97±0,005 ГПа, G_S = 42,97±0,005 ГПа і ρ_S =2664 кг/м^3.

Для порівняння наведено дані для модулів пружності, у наближенні Фойгта – Реусса – Хілла, кварцу: $K^{\text{ФРХ}}$ = 37,7 ГПа, $G^{\text{ФРХ}}$ = 44,4 ГПа, $\bar{\rho}$ = 2650 кг/м^3; калієвого польового шпату: $K^{\text{ФРХ}}$ = 59,8 ГПа, $G^{\text{ФРХ}}$ = 30,1 ГПа, $\bar{\rho}$ = 2546 кг/м^3. Ці результати добре узгоджуються з даними петрографії щодо переважного складу скелета пісковиків (кварц та польовий шпат).

За даними інверсії були визначені й модулі пружності твердого скелета глин, і параметри його мікропористості. Модулі пружності твердого скелета глин прийнято такі:

$K_{\text{гл}}$ = 64,77 ± 0,004 ГПа, $G_{\text{гл}}$ = 39,79 ± 0,007 ГПа, $\rho_{\text{гл}}$ = =2937 ± 5 кг/м^3.

Ці значення модулів пружності дещо вищі ніж для гідрослюд і хлоритів при оцінюванні цих значень у наближенні Фойгта – Реусса – Хілла. Суттєва різниця спостерігається в густині твердого скелета і гідрослюди. Дійсно, густина більш залізистого глауконіту вища за густину гідрослюди (іллїту), але її вплив на модулі пружності значно менший.

При інверсії прийнято такі формати пустот скелета пісковиків:

α_1 = 0,693 ± 0,011; α_2 = 0,047 ± 0,007; α_3 = 0,008 ± 0,002.

Модулі пружності мінералізованої води при інверсії прийнято такі: $K_{\text{в}}$ = 2,17 ГПа, $\rho_{\text{в}}$ = 1040 кг/м^3; для нафти: $K_{\text{нафти}}$ = =1,91 ГПа, $\rho_{\text{нафти}}$ = 850 кг/м^3; для газу: $K_{\text{газу}}$ = 0,054 ГПа, $\rho_{\text{газу}}$ =4 кг/м^3.

Основні результати інверсії сейсмічних швидкостей і густини при обмеженні на сумарну пористість швидкостей показано на рис. 65 додатка. Отримані петрофізичні параметри узгоджуються з результатами випробувань.

Одержано оцінки коефіцієнтів глинистості $K_{гл}$, коефіцієнтів газонасиченості $K_г$ і нафтонасиченості – $K_н$, які свідчать про перспективність досліджуваного горизонту.

Червоним пунктиром виділено продуктивні інтервали, що підтверджені даними випробувань. У цих інтервалах отримано промислові припливи нафти. Підвищені значення коефіцієнта пористості $K_п$ узгоджуються з результатами нафтонасиченості і характеризуються підвищеними значеннями цих параметрів. Продуктивні інтервали характеризуються підвищеними значеннями $K_н$, а саме до 0,23. Спостерігається прямо пропорційна залежність $K_н$ від сумарної водонасиченості $W_{сум}$. На глибині нижче 2555 метрів отримано припливи газу, за результатами інверсії він проявляється у вигляді підвищених значень кривої $K_г$ відносно загального фону.

5.7. Результати зіставлення даних AVO-аналізу та інверсії з даними ГДС

Аналізуючи отримані результати з позиції виділення газонасичених покладів на структурі Субботіна, зазначимо, що всі наведені вище дані логічно підтверджують одну з теорій щодо існування ймовірного газового покладу. Вивчаючи рисунки 33–48 додатка, бачимо, що методика AVO-аналізу дає вірогідний прогноз колекторів тільки до глибини 1600 метрів. Це пов'язано зі зміною літології при переході до майкопського комплексу та з дуже малим контрастом коефіцієнтів відбиття майкопського комплексу. Там спостерігається перешарування пісковиків і аргілітів, що по своїх акустичних властивостях проявляються як "сліпі" товщі на сейсмічних матеріалах.

За даними ГДС імовірні продуктивні газонасичені поклади прогнозуються аж до глибини 2000 метрів. Ці прогнозні оцінки добре узгоджуються із сейсмічними даними, зокрема, із результатами пружної інверсії сейсмічних даних до підсумовування. Про це свідчать часові розрізи, зображені на рисунках 53–63 , а також на рисунку 66 додатка, на якому зображено глибинну шкалу.

Максимально інформативними виявилися співвідношення V_P / V_S та пружні імпеданси, отримані при різних кутах падіння. Продуктивні газоносні горизонти добре виділяються на часових розрізах при кутах падіння хвилі від 20 до 30°, як видно при порівнянні рисунків 59 і 61 додатка. Як відомо, пониження співвідношення V_P / V_S та значна його диференціація при різних кутах падіння притаманна лише газонасиченим пісковикам. Однозначно наявність продуктивних колекторів підтверджує рис. 66 додатка. Фактично такі результати слід вважати прямими ознаками ВВ-насичення.

На рис. 67 додатка наведено результати інверсії сейсмічних швидкостей у петрофізичні параметри, що узгоджуються з керновими дослідженнями, даними ГДС та результатами випробувань.

Одержані оцінки коефіцієнтів глинистості та пористості, коефіцієнтів газо- і нафтонасиченості також свідчать про перспективність цього продуктивного горизонту.

За даними інверсійних перетворень чітко прослідковується підвищений вміст глинистої компоненти, що також узгоджується з даними ГДС. Досліджуваний розріз є досить складним з погляду літології, спостерігається перешарування пісковиків і глин.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Аки К. Количественная сейсмология. Теория и методы : у 2 т. / К. Аки, П. Ричардс. – М. : Мир, 1983. – Т. 1, 2.

Александров К. С. Анизотропия упругих свойств минералов и горных пород / К. С. Александров, Г. Т. Продайвода. – Новосибирск : изд-во СО РАН, 2000.

Бат М. Спектральный анализ в геофизике / М. Бат. – М. : Недра, 1980.

Берзон И. С. Сейсмическая разведка вертикально-слоистых сред фундамента / *И. С. Берзон.* – М. : Недра, 1977.

Гогоненков Г. Н. Изучение детального строения осадочних толщ сейсморазведкой / Г. Н. Гогоненков. – М. : Недра, 1987.

Гольдин С. В. Интерпретация данных сейсмического метода отраженных волн / С. В. Гольдин. – М. : Недра, 1979.

Гуревич И. И. Сейсмическая разведка / И. И. Гуревич, Г. Н. Боганик. – М. : Недра, 1980.

Клаербоут Д. Ф. Теоретические основы обработки геофизической информации / Д. Ф. Клаербоут. – М. : Недра, 1981.

Клаербоут Д. Ф. Сейсмическое изображение земных недр / Д. Ф. Клаербоут. – М. : Недра, 1989.

Козлов Е. А. Миграционные преобразования в сейсморазведке / Е. А. Козлов. – М. : Недра, 1986.

Мак-Куллин Р. Введение в сейсмическую интерпретацию / Р. Мак-Куллин, М. Бекон, У. Барклай. – М. : Недра, 1985.

Продайвода Г. Т. Основи сейсмоакустики / Г. Т. Продайвода. – К. : ВПЦ "Київ. ун-т", 2001.

Продайвода Г. Т. Акустика текстур гірських порід / Г. Т. Продайвода. – К. : ВГЛ "Обрії", 2004.

Ризниченко Ю. В. Сейсмическая разведка слоистых сред / Ю. В. Ризниченко. –М. : Недра, 1985.

Робинсон Э. А. Метод миграции в сейсморазведке / Э. А. Робинсон. – М. : Недра, 1988.

Сейсмическая томография / под. ред.. Г. Ноллета – М. : Мир, 1990.

Сильвиа М. Т. Обратная фильтрация гефизических временных рядов при разведке на нефть и газ / М. Т. Сильвиа, Э. А. Робинсон. – М. : Недра, 1983.

Тимошин Ю. В. Сейсмическая голография сложно построенных сред / Ю. В. Тимошин, С. А. Бирдус, В. В. Мерщий. – М. : Недра, 1989.

Тимошин Ю. В. Теорія обробки геофізичної інформації / Ю. В. Тимошин, Г. Д. Лісний. –К. : Вища шк., 1994.

Уотерс К. Отражательная сейсмология. Метод отраженных волн для поисков нефти и газа / К. Уотерс. – М. : Мир, 1981.

Хаттон Л. Обработка сейсмических данных. Теория и практика / Л. Хаттон, М. Уэрдингтон, Дж. Мейкин. – М. : Мир, 1989.

Шерифф Р. Сейсморазведка : у 2 т. / Р. Шерифф, Л. Гелдарт. – М. : Мир, 1987. – Т. 1, 2.

Козлов Е. А. Модели среды в разведочной сейсмологии / Е. А. Козлов. – Тверь : изд-во "ГЕРС", 2006.

Геофізичні методи оцінки продуктивності колекторів нафти і газу / Г. Т. Продайвода, С. А. Вижва, І. М. Безродна, Т. Г. Продайвода. – К. : ВПЦ "Київ. ун-т", 2011.

Продайвода Г. Т. Математичне моделюваня геофізичних параметрів / Г. Т. Продайвода, С. А. Вижва. – К. : ВПЦ "Київ. ун-т", 1999.

Ампилов Ю. П. От сейсмической интерпретации к моделированию и оценке месторождений нефти и газа / Ю. П. Ампилов. – М. : СПЕКТР, 2008.

Банди Б. Методы оптимизации / Б. Банди. – М. : Радио связь, 1988.

Бондарев В. И. Анализ данных сейсморазведки: учеб. пособие для студ. вузов / В. И. Бондарев. – Екатеринбург : изд-во УГГГА, 2002.

Воскресенский Ю. Н. Изучение изменений амплитуд сейсмических отражений для поисков и разведки залежей углеродов / Ю. Н. Воскресенский. – М. : изд-во РГУ нефти и газа, 2001.

Гольдин С. В. Динамический анализ изображения в сейсмологии / С. В. Гольдин // Геология и геофизика. – 1987. – № 2. – С. 84–90.

Гольдин С. В. Спектрально-статистический метод учета приповерхностных неоднородностей в системах многократного прослеживания отраженных волн / С. В. Гольдин, Г. М. Митрофанов // Геология и геофизика. – 1975. – № 6. – С. 102–112.

ДОДАТОК

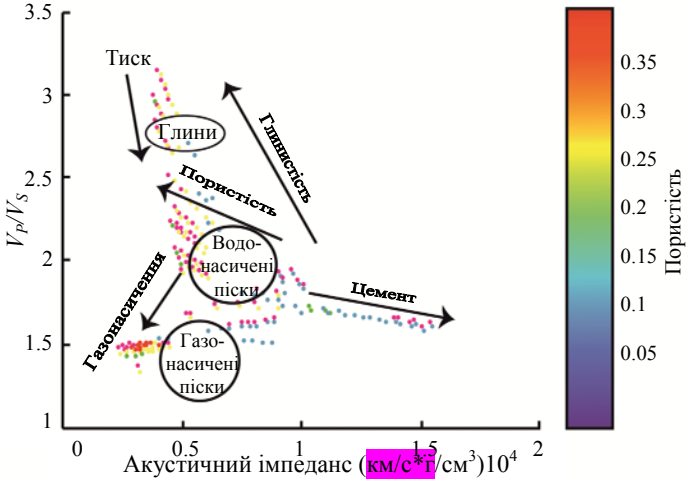


Рис. 1. **Схема глобального тренду в області кросплота відношення "V_P / V_S – акустичний імпеданс": тренди з пористості, глинистості, газонасичення й ефективного тиску**

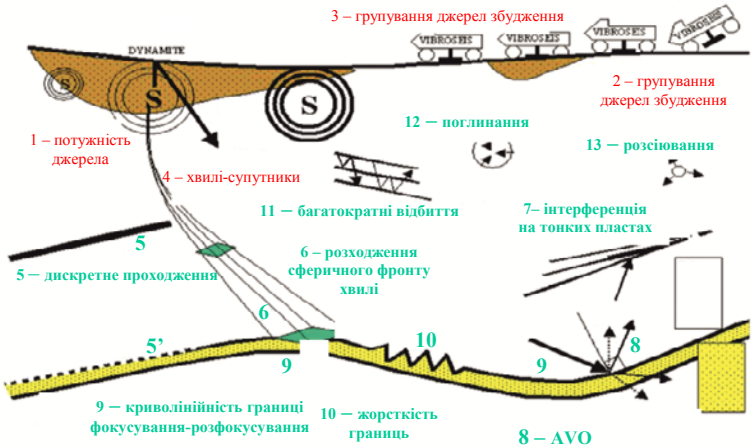


Рис. 2. Схематична діаграма для ілюстрації факторів, що впливають на амплітуди відбитих хвиль

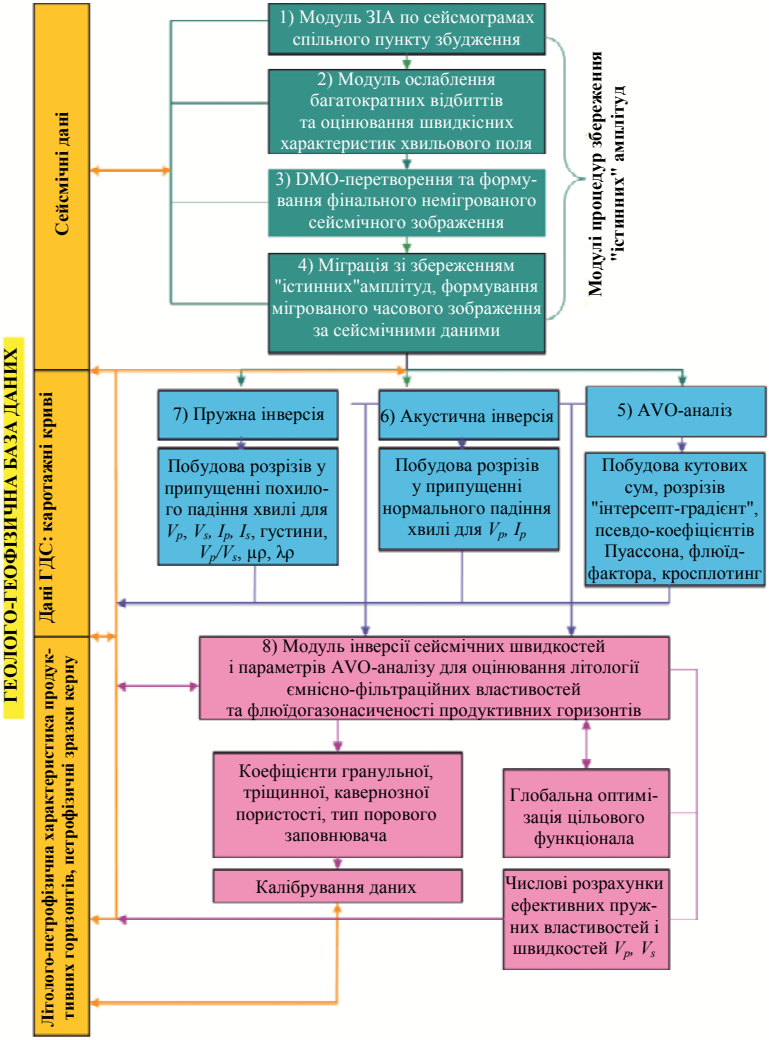


Рис. 3. Блок-схема алгоритму спеціалізованої цифрової обробки-інтерпретації сейсмічної інформації із застосуванням AVO-аналізу

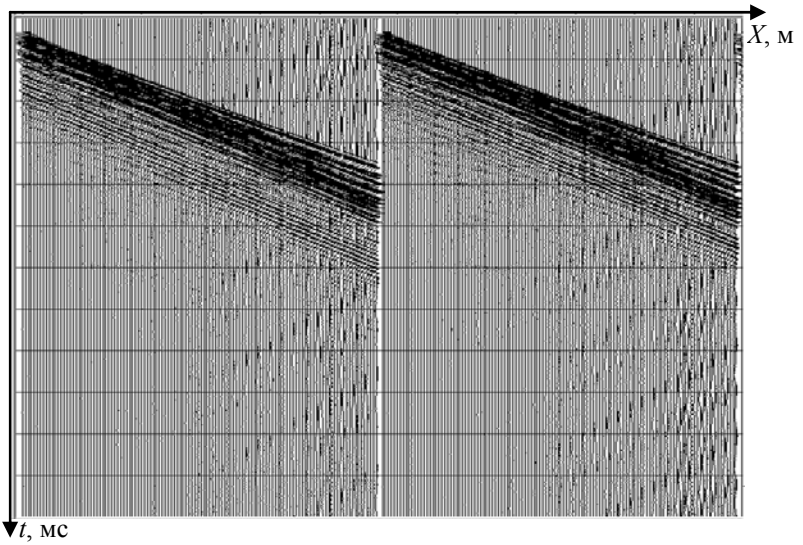


Рис. 4. Вхідні сейсмограми

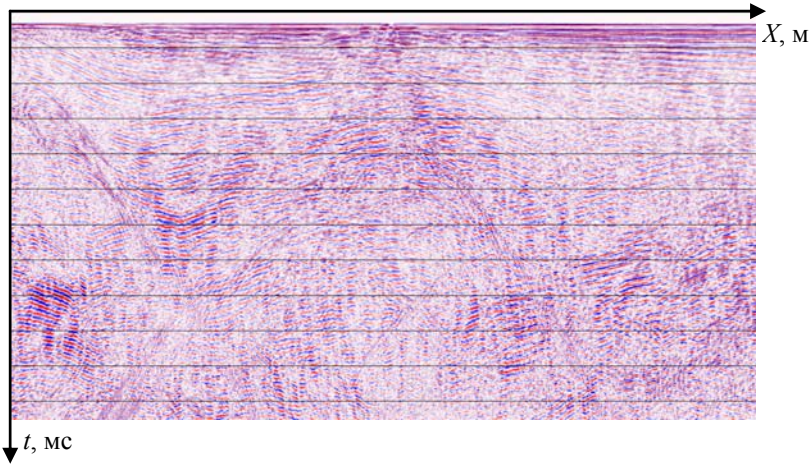


Рис. 5. Часовий розріз, одержаний підсумовуванням вхідних сейсмограм

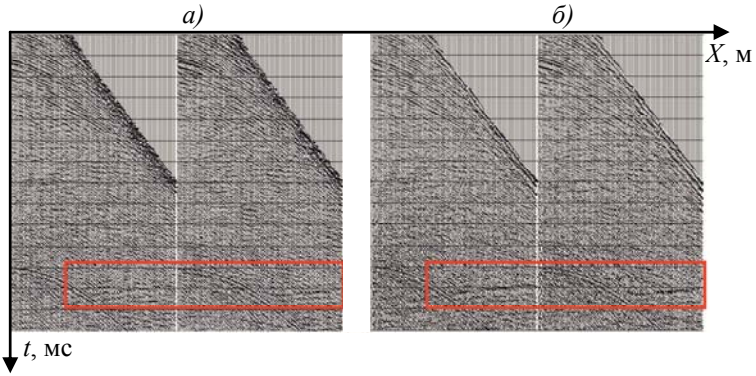


Рис. 6. Результати роботи процедур модуля № 2:
а) вхідні сейсмограми, отримані за кінематичною методикою; б) вхідні сейсмограми, отримані за методикою зі збереженням "істинних" амплітуд

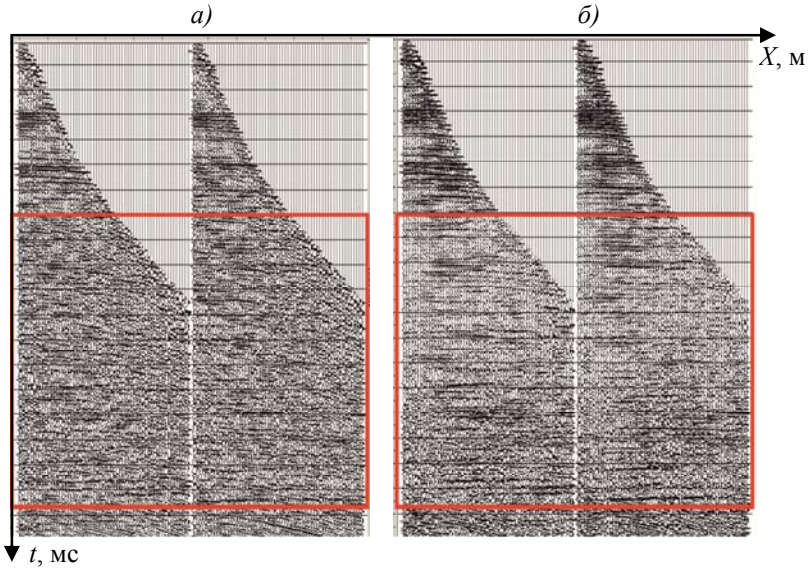


Рис. 7. Результати обробки при застосуванні до сейсмограм, відсортованих за ССТ, процедур модуля № 2:
а) до застосування процедур послаблення багатократних відбиттів;
б) після застосування ключових процедур модуля № 2
для послаблення багатократних відбиттів

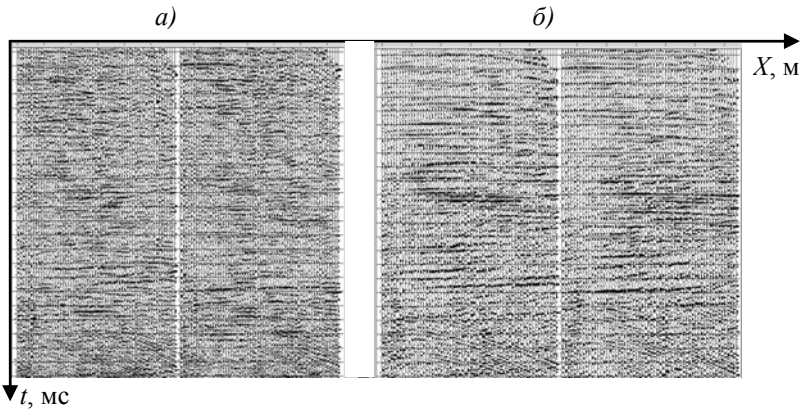


Рис. 8. Сейсмограми, відсортовані по ССТ після циклу ослаблення багатократних відбиттів та DMO-перетворення, які отримані за методикою кінематичної обробки сейсмічних даних (а); і сейсмограми, відсортовані по ССТ після циклу обробки за алгоритмом ЗІА (б)

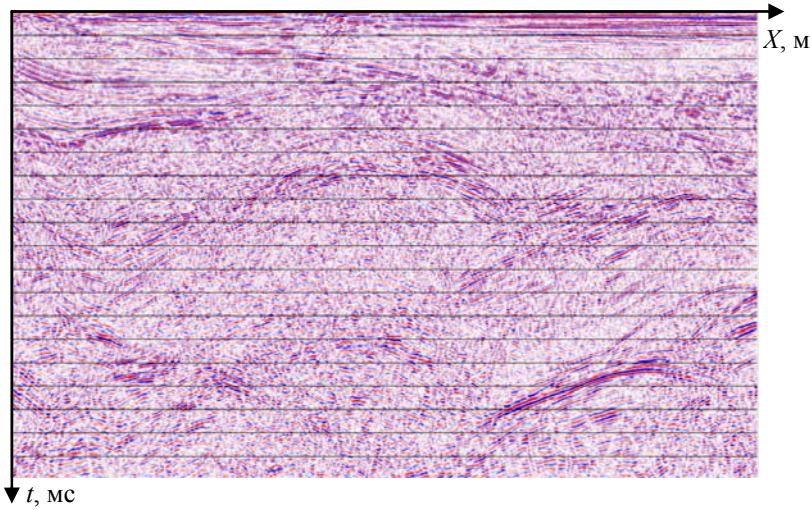


Рис. 9. Фінальний часовий розріз, отриманий за алгоритмом кінематичної обробки

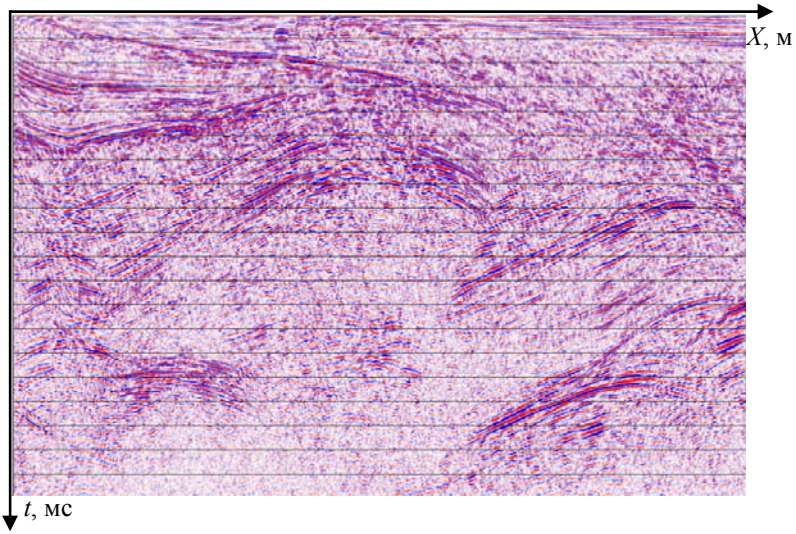


Рис. 10. **Фінальний часовий розріз, отриманий за алгоритмом обробки ЗІА**

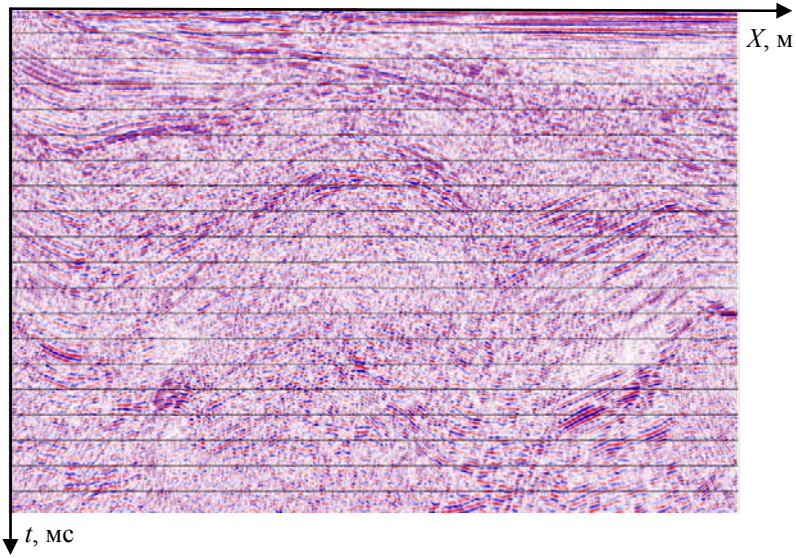


Рис. 11. **Мігрований часовий розріз, отриманий шляхом міграції Кірхгофа після підсумовування за методикою кінематичної обробки**

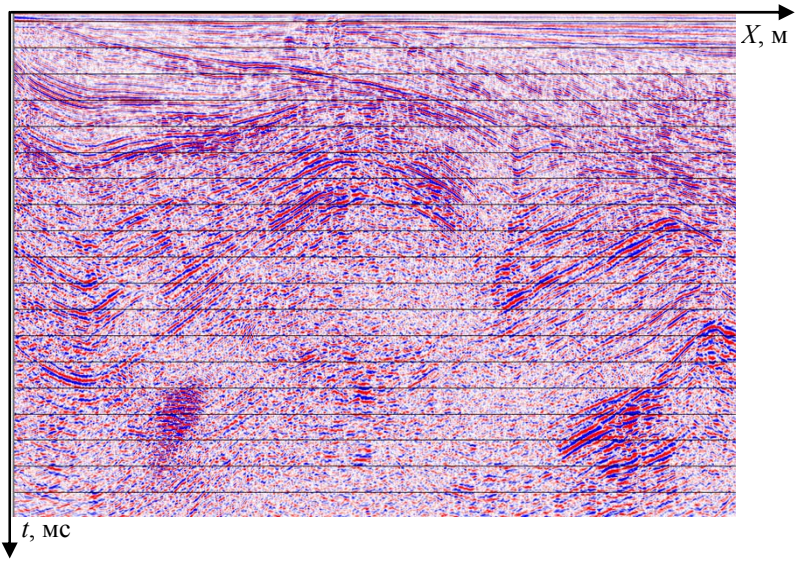


Рис. 12. **Мігрований часовий розріз, отриманий шляхом міграції Кірхгофа після підсумовування за алгоритмом обробки ЗІА**

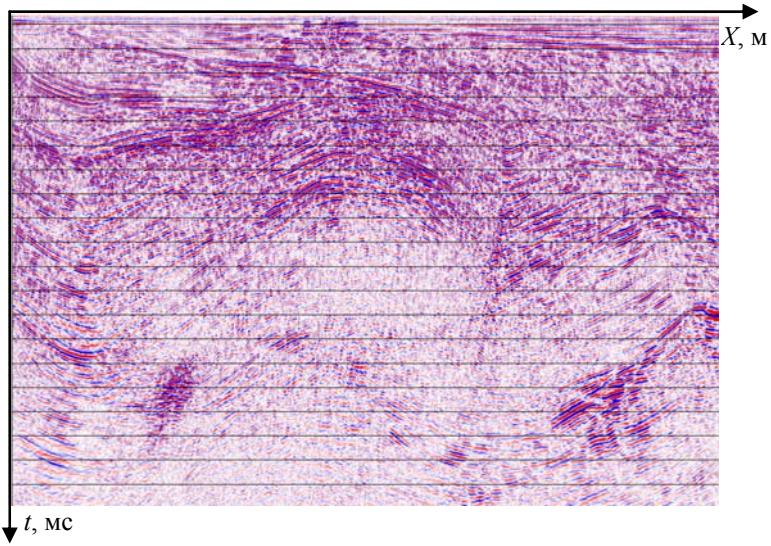


Рис. 13. **Мігрований часовий розріз, отриманий шляхом міграції Кірхгофа по вхідних сейсмограмах до підсумовування за алгоритмом обробки ЗІА**

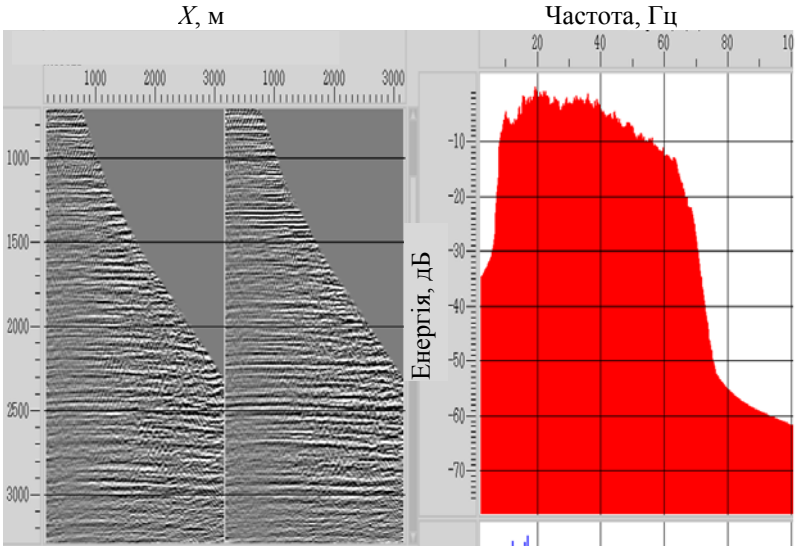
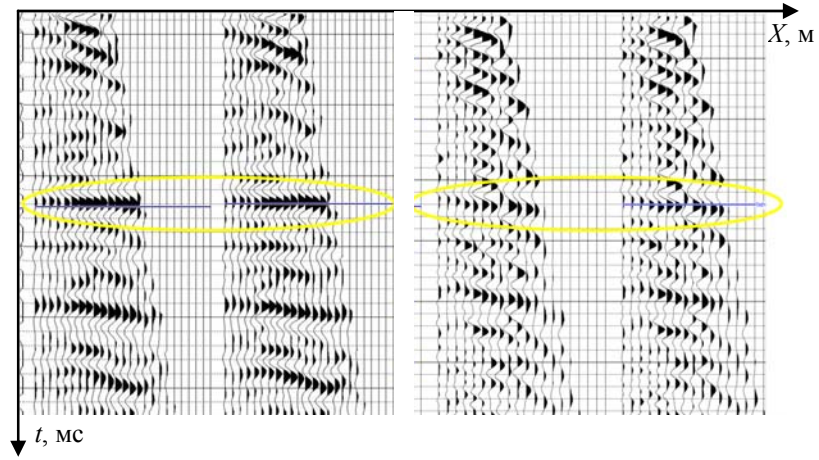


Рис. 14. Вхідні мігровані сейсмограми та їх амплітудно-частотний спектр, одержані за алгоритмом ЗІА



а) *б)*

Рис. 15. Мігровані сейсмограми ССТ після обробки:
а) за алгоритмом ЗІА; б) за методикою кінематичної обробки

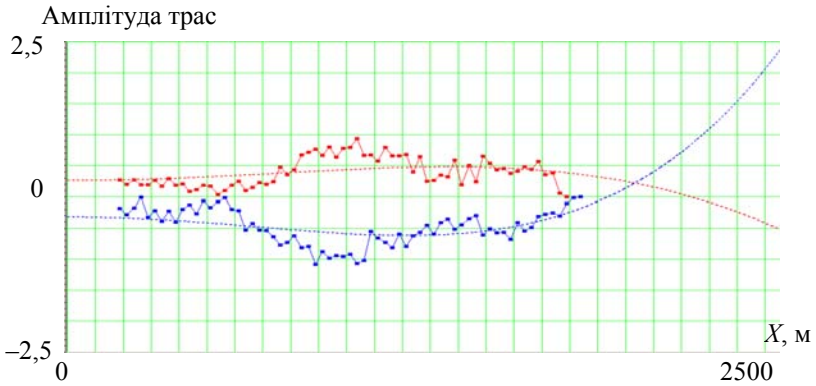


Рис. 16. Амплітуди сейсмограми, обробленої алгоритмом обробки ЗІА (розрахунки проводилися вздовж цільового відбиття у вікні з інтервалом 1525–1575 мілісекунд. Червоним кольором показано амплітуду покрівлі, синім – амплітуду підошви колектора)

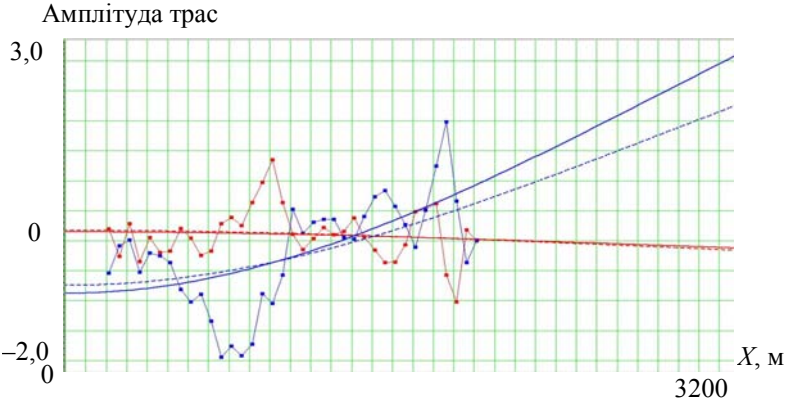


Рис. 17. Амплітуди сейсмограми, обробленої за кінематичною методикою обробки (розрахунки проводилися вздовж цільового відбиття у вікні з інтервалом 1525–1575 мілісекунд. Червоним показано амплітуду покрівлі, синім – амплітуду підошви колектора)

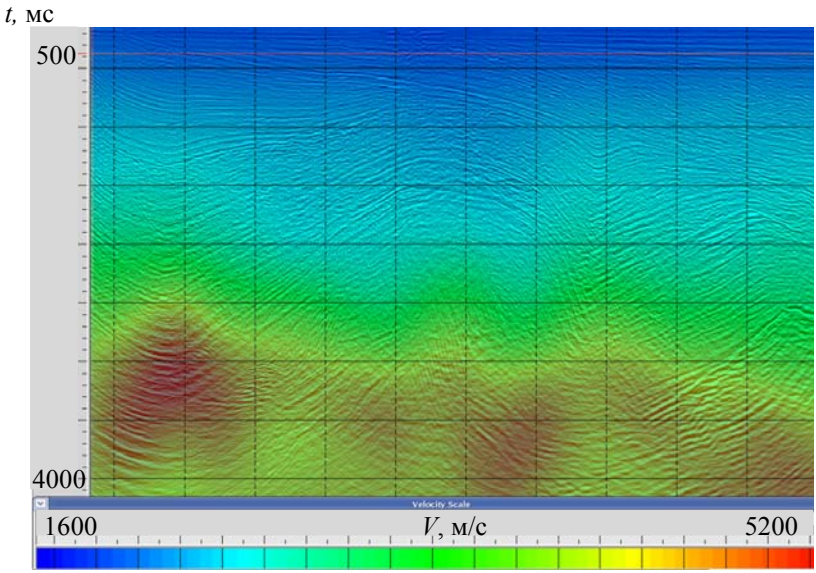


Рис. 18. Часовий розріз інтервальних швидкостей, отриманий після аналізу вхідних мігрованих сейсмограм ССТ, оброблених за алгоритмом ЗІА

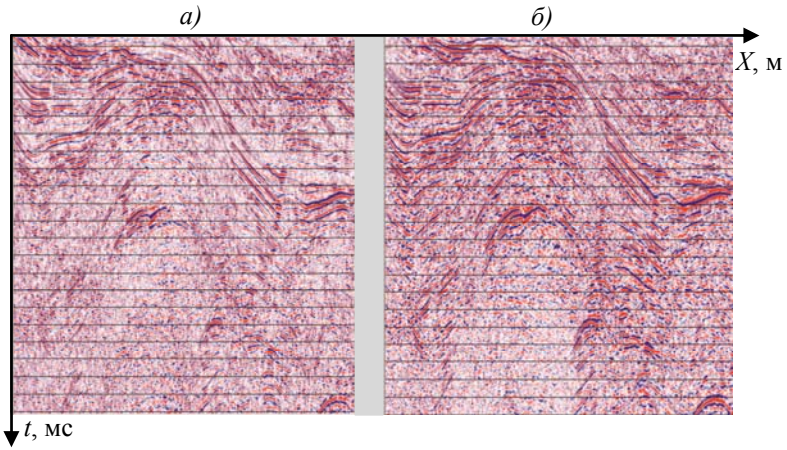


Рис. 19. Фінальні часові розрізи вздовж регіонального профілю(структура Субботіна):
а) часовий розріз, отриманий за методикою кінематичної обробки;
б) часовий розріз, отриманий за алгоритмом обробки в режимі ЗІА

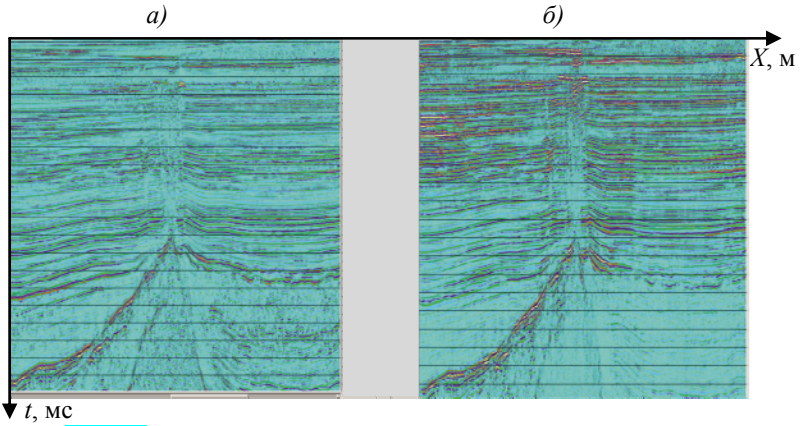


Рис. 20. Динамічне відображення мігрованих часових розрізів по регіональному профілю:
а) отриманому за методикою кінематичної обробки;
б) отриманому за алгоритмом обробки в режимі ЗІА

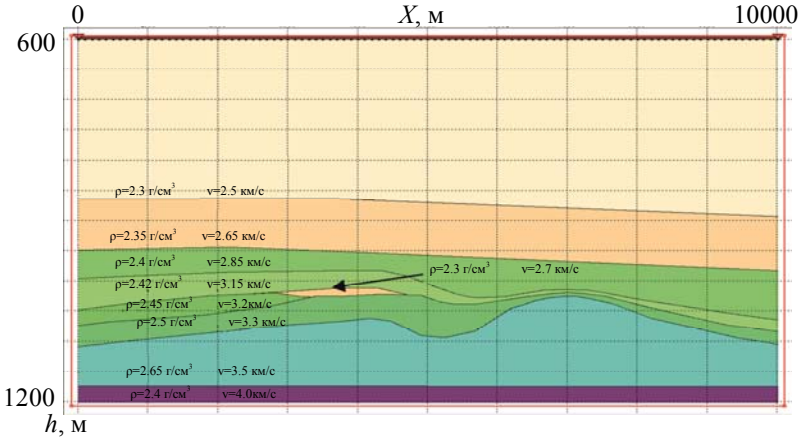


Рис. 21. Вхідна модель інтервальних швидкостей та густин (стрілкою показано газонасичений колектор)

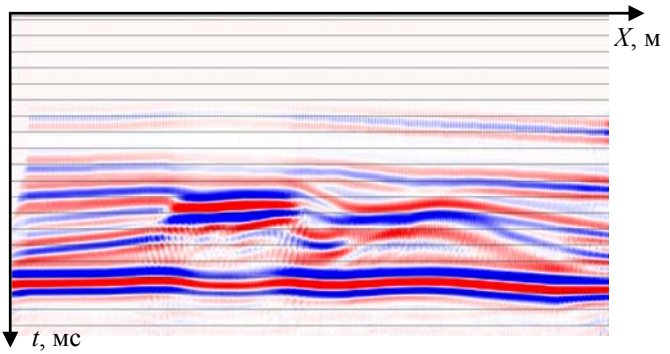


Рис. 22. Синтетичний часовий сейсмічний розріз, отриманий для заданої моделі геологічного розрізу

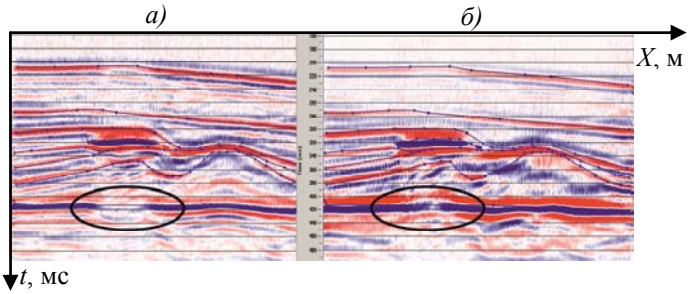


Рис. 23. Мігровані часові сейсмічні розрізи, які отримані:
а) за алгоритмом кінематичної методики обробки;
б) за алгоритмом обробки в режимі ЗІА

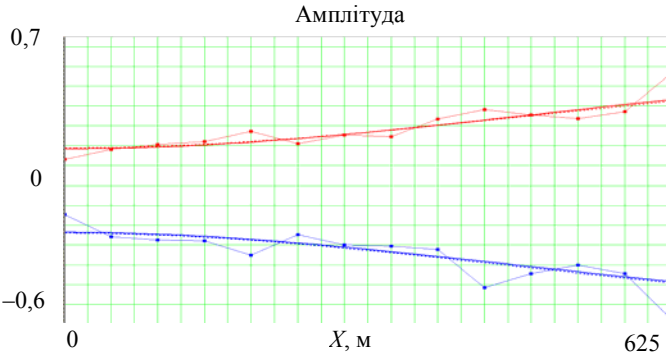


Рис. 24. Амплітудні характеристики сейсмічних сигналів на сейсмограмі, яка оброблена за алгоритмом ЗІА, у районі AVO-аномалії

Рис. 25. Оглядова схема району робіт

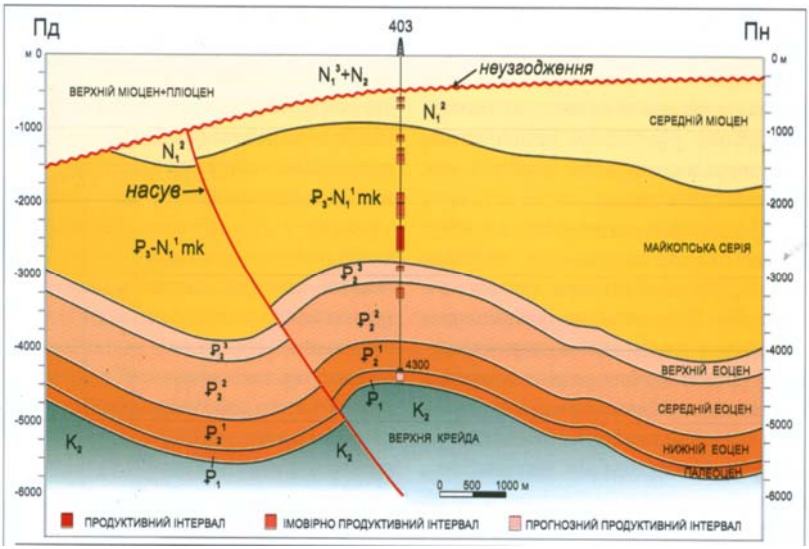


Рис. 26. Сейсмогеологічний розріз структури Субботіна по профілю № 1

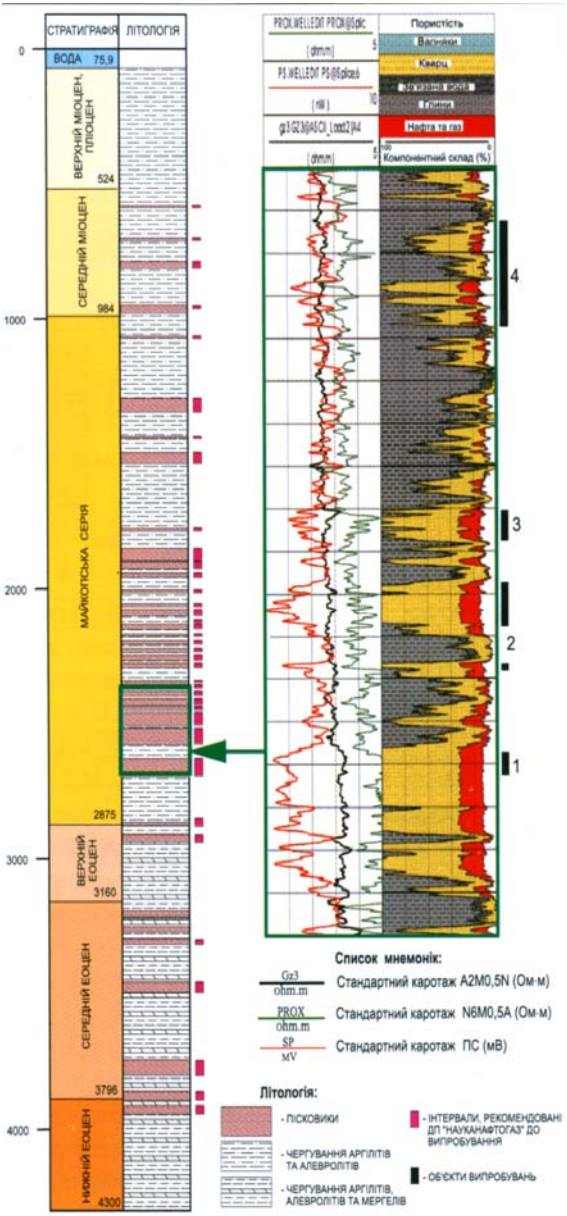


Рис. 27. Літостратиграфічний розріз свердловини Субботіна № 403 та геолого-геофізична характеристика продуктивної частини майкопу

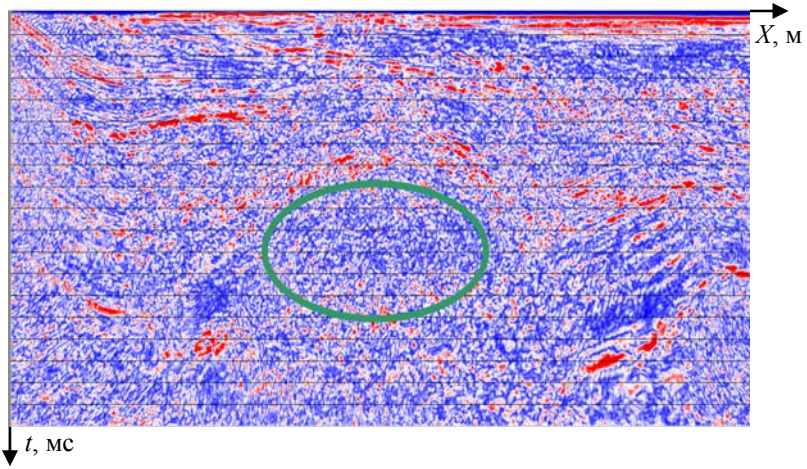


Рис. 28. **Миттєві амплітуди, розраховані за мігрованим розрізом, що отриманий за методикою кінематичної обробки**

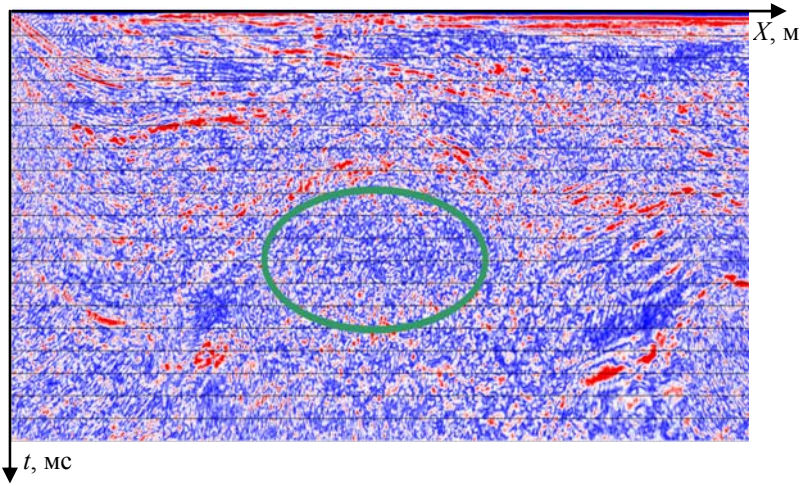


Рис. 29. **Миттєві амплітуди, розраховані за мігрованим розрізом, що отриманий за алгоритмом обробки ЗІА**

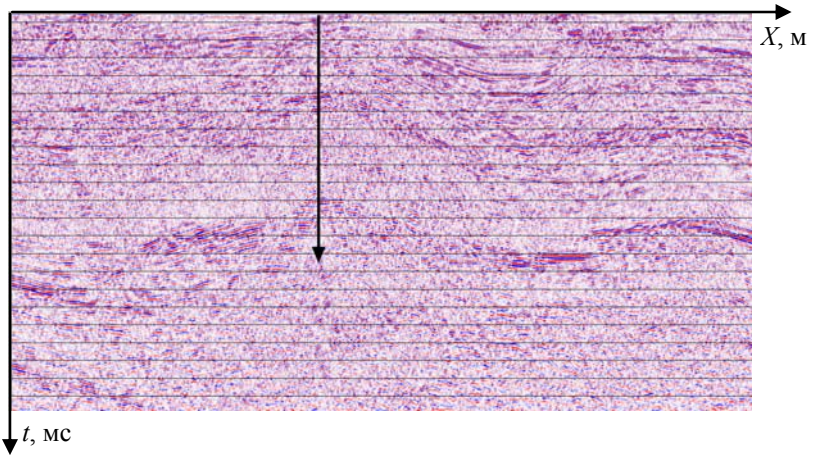


Рис. 30. Мігрований часовий розріз № 2, отриманий шляхом міграції Кірхгофа після підсумовування за методикою кінематичної обробки (стрілкою показано розміщення свердловини Субботіна № 403)

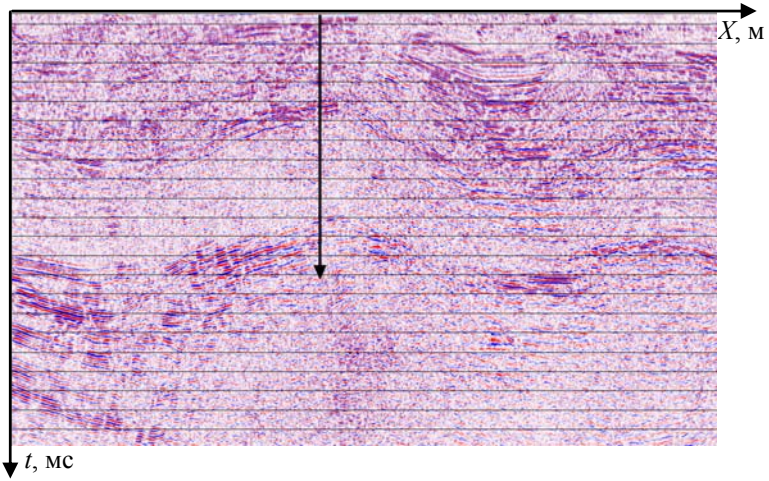


Рис. 31. Мігрований часовий розріз № 2, отриманий шляхом міграції Кірхгофа по вхідних сейсмограмах до підсумовування – обробка в режимі ЗІА (стрілкою показано розміщення свердловини Субботіна № 403)

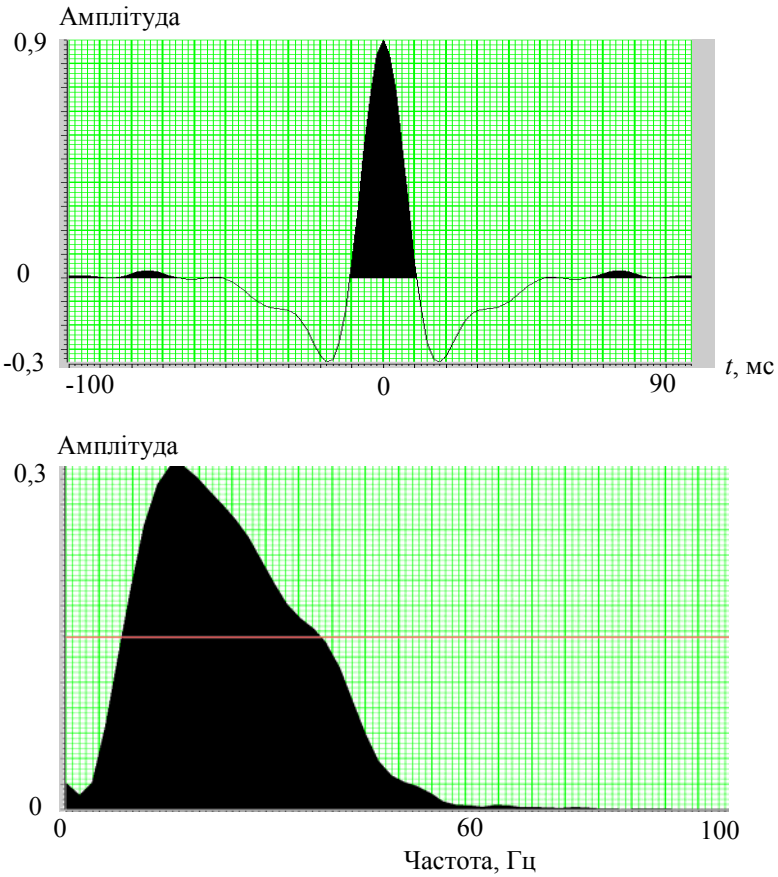


Рис. 32. Елементарний сигнал після динамічної обробки сигналу: форма елементарного сигналу (угорі); амплітудно-частотний спектр елементарного сигналу (знизу)

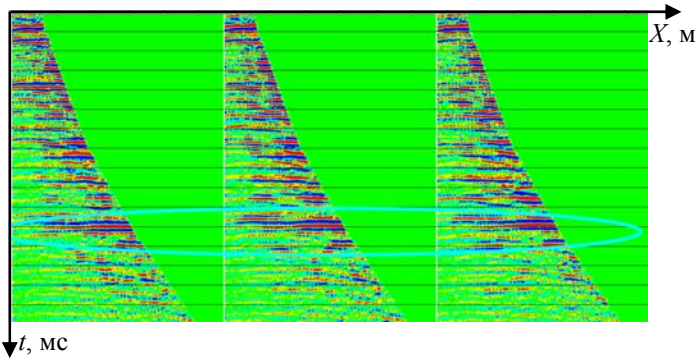


Рис. 33. **Мігровані кутові сейсмограми ССТ профілю № 1 для діапазону кутів падіння хвилі 0–45°**

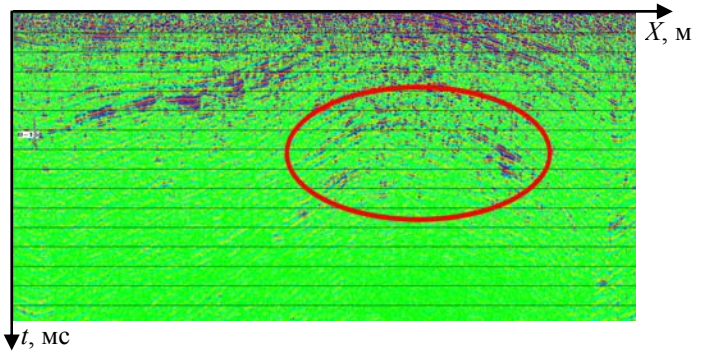


Рис. 34. **Часовий розріз кутових сум ССТ уздовж профілю № 1 для діапазону кутів падіння хвилі 0–15°**

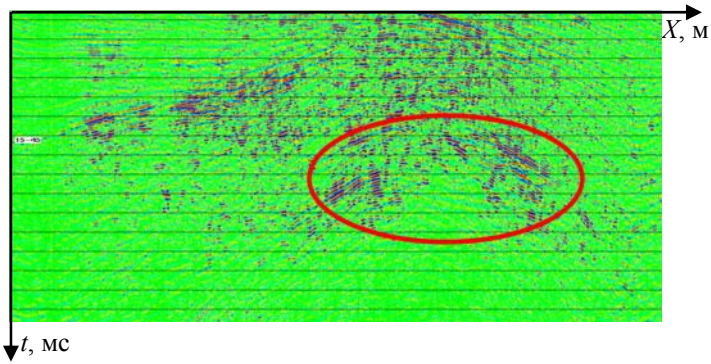


Рис. 35. **Часовий розріз кутових сум ССТ уздовж профілю № 1 для діапазону кутів падіння хвилі 15–45°**

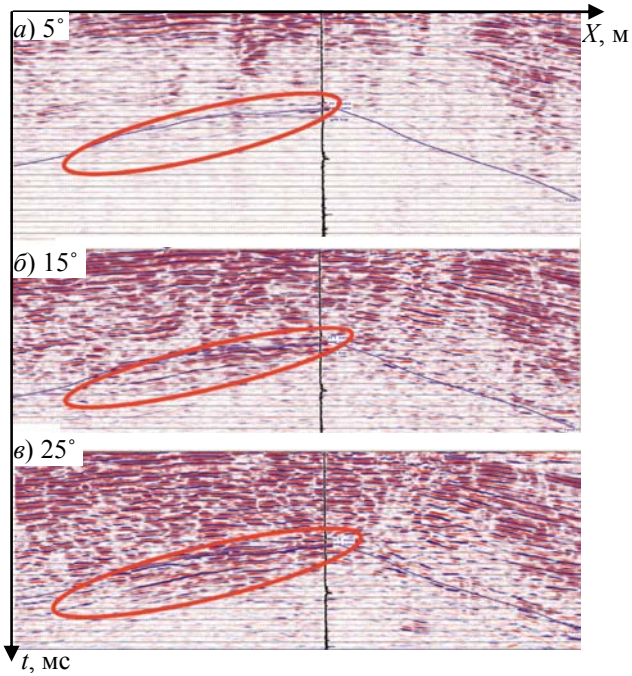


Рис. 36. Часові розрізи кутових сум уздовж профілю № 2 у діапазоні кутів падіння хвиль від 0 до 30°

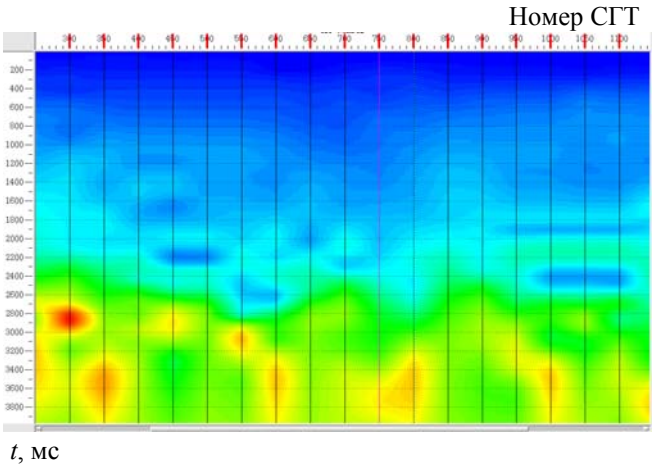


Рис. 37. Високороздільна швидкісна картина хвильового поля, отримана за алгоритмом AVO-аналізу

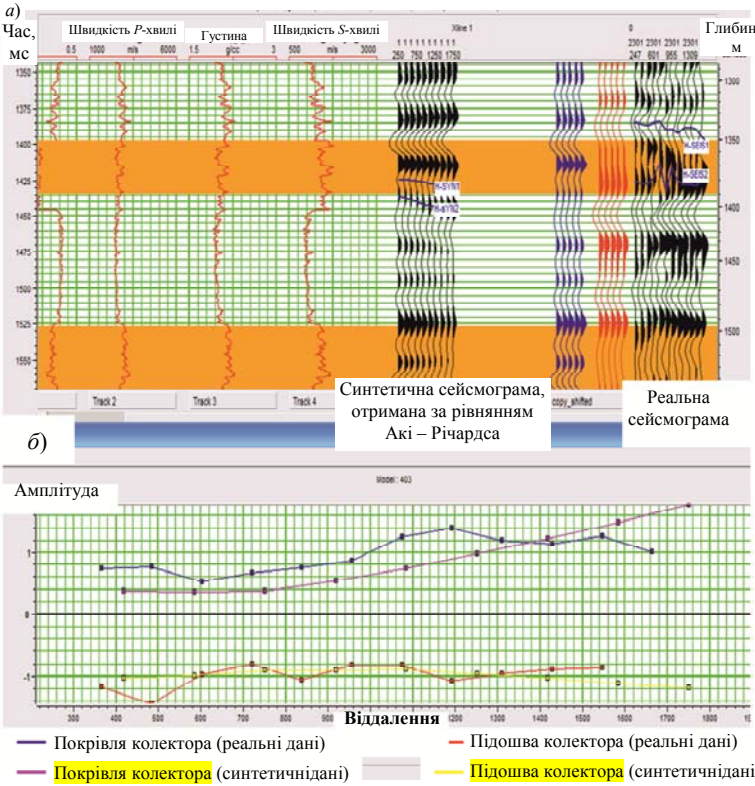


Рис. 38. Синтетична та реальна сейсмограми за результатами моделювання за рівнянням Акі – Річардса та зіставлення результатів моделювання з реальними сейсмічними даними по профілю № 2 структури Субботіна

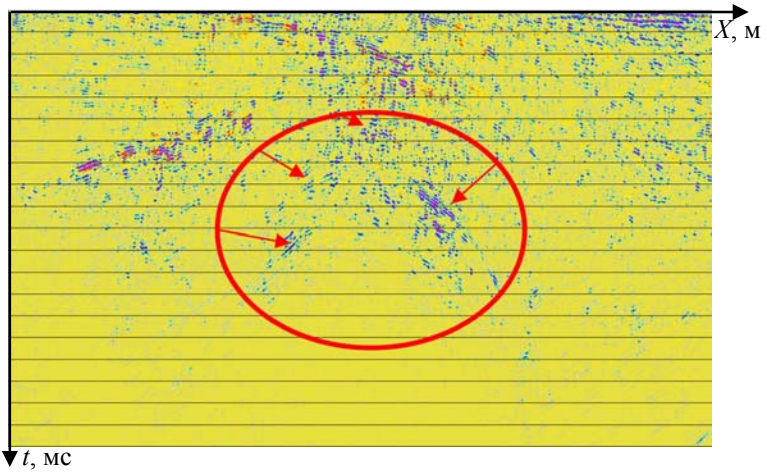


Рис. 39. **AVO-атрибут по профілю № 1: добуток "інтерсепт × градієнт" у діапазоні кутів падіння хвилі 0–30° (червоним виділено зони з покращеними колекторними властивостями в майкопській товщі)**

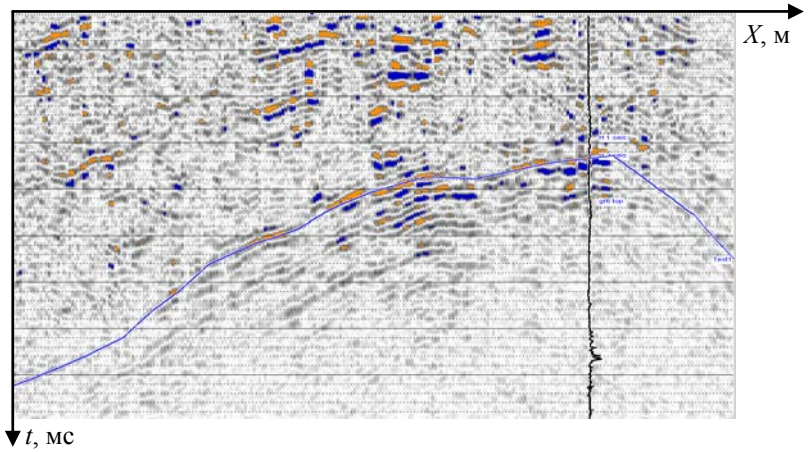


Рис. 40. **Фрагмент мігрованого часового розрізу вздовж профілю № 2**

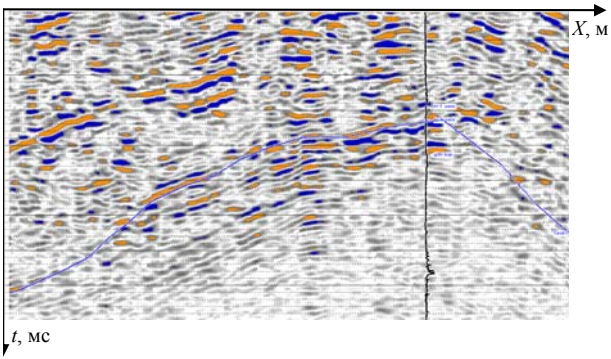


Рис. 41. **Фрагмент часового розрізу інтерсепт А вздовж профілю № 2**

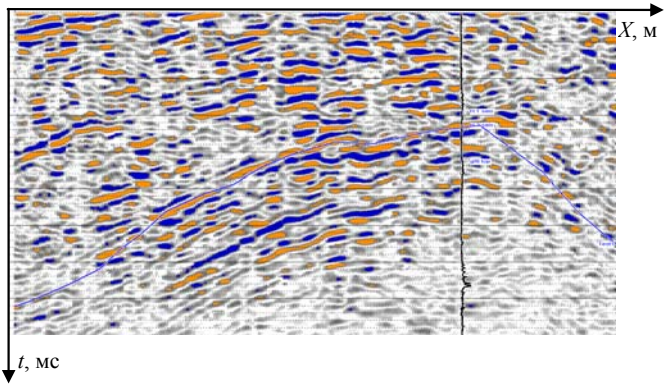


Рис. 42. **Фрагмент часового розрізу градієнт G уздовж профілю № 2**

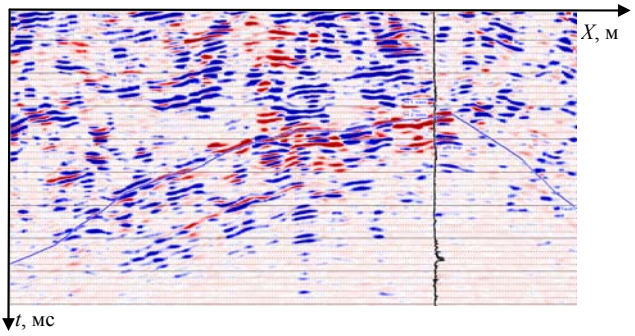


Рис. 43. **Фрагмент часового розрізу добутку атрибутів А × G уздовж профілю № 2**

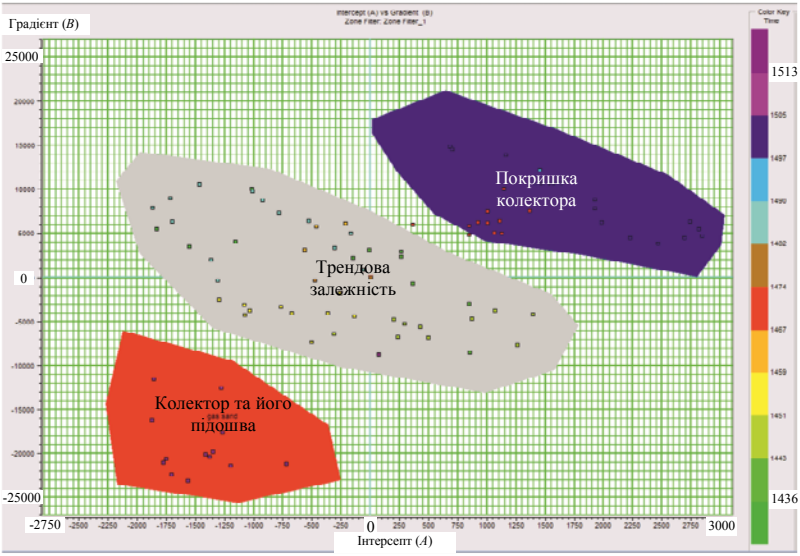


Рис. 44. Кросплот "інтерсепт × градієнт"
уздовж сейсмічного профілю № 2 площі Субботіна

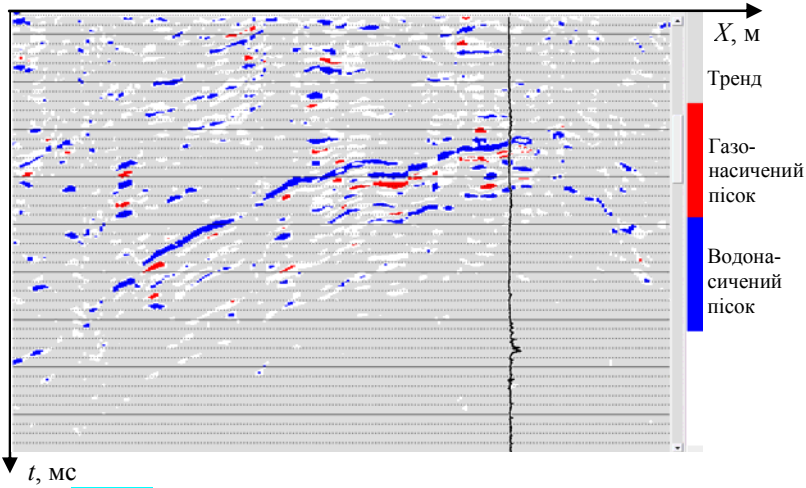


Рис. 45. Класифікація AVO-аномалій за сейсмічними даними
"інтерсепт×градієнт" уздовж сейсмічного профілю № 2 площі Субботіна

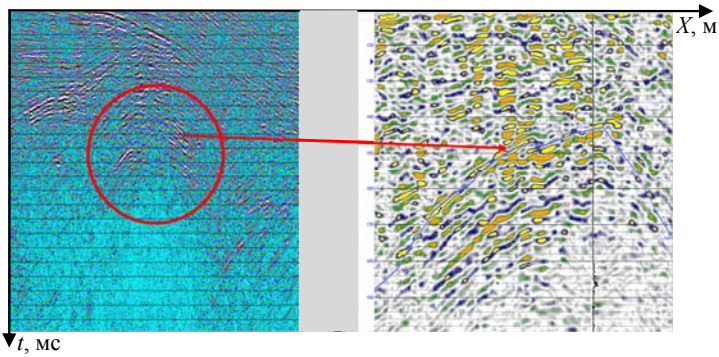


Рис. 46. Часовий розріз псевдокоефіцієнтів Пуассона вздовж фрагмента профілю № 1 (ліворуч) та часовий розріз псевдокоефіцієнтів Пуассона вздовж фрагмента профілю № 2 (праворуч)

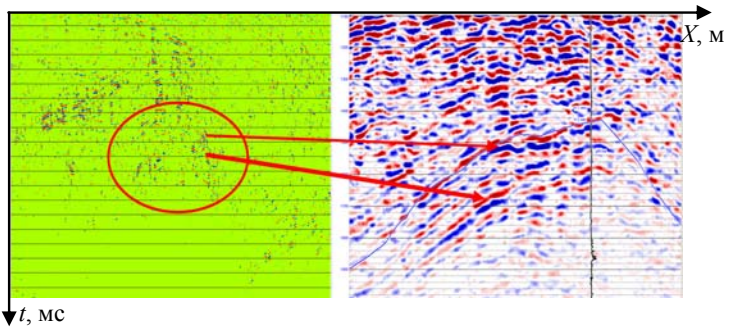


Рис. 47. Часовий розріз флюїд-фактора вздовж профілю № 1 (ліворуч) та часовий розріз флюїд-фактора вздовж профілю № 2 (праворуч)

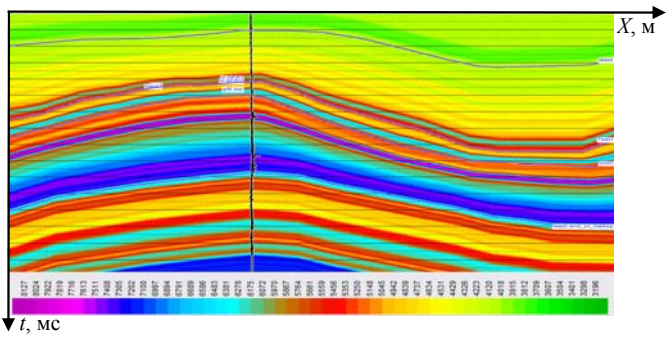


Рис. 48. Початкова товстошарувата модель імпедансу Р-хвиль

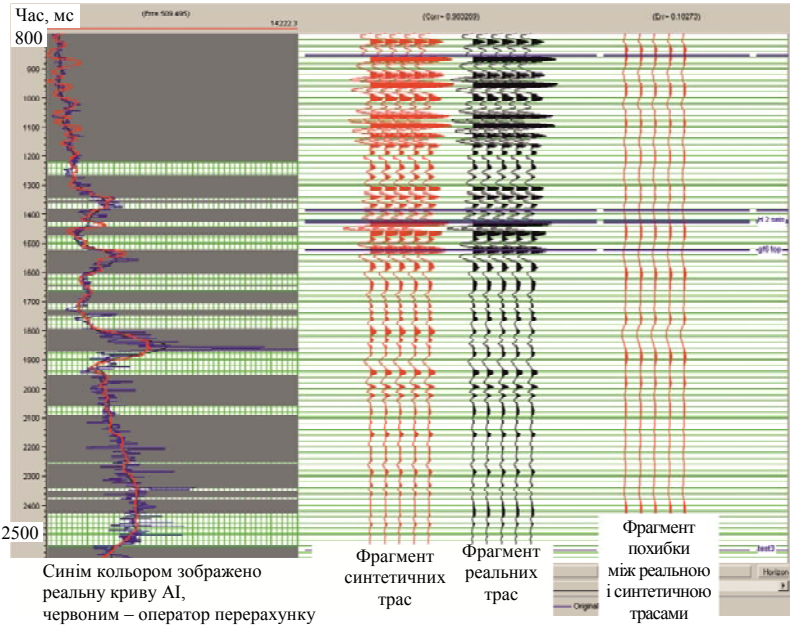


Рис. 49. Вибір оператора інверсії при переході з області сейсмічних амплітуд в область сейсмічних імпедансів

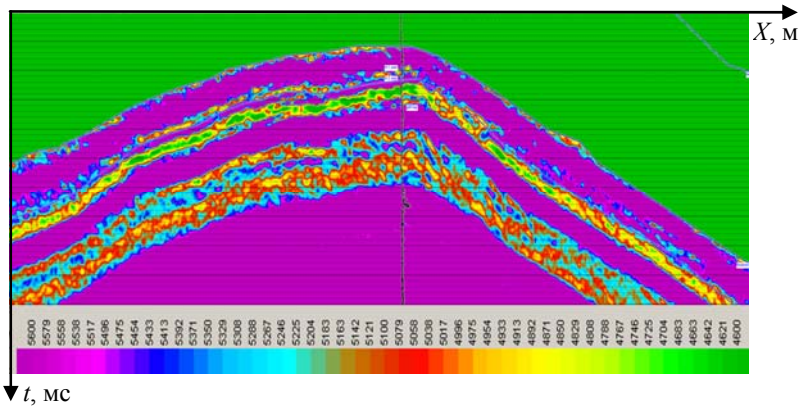


Рис. 50. Часовий розріз акустичного імпедансу вздовж профілю № 2

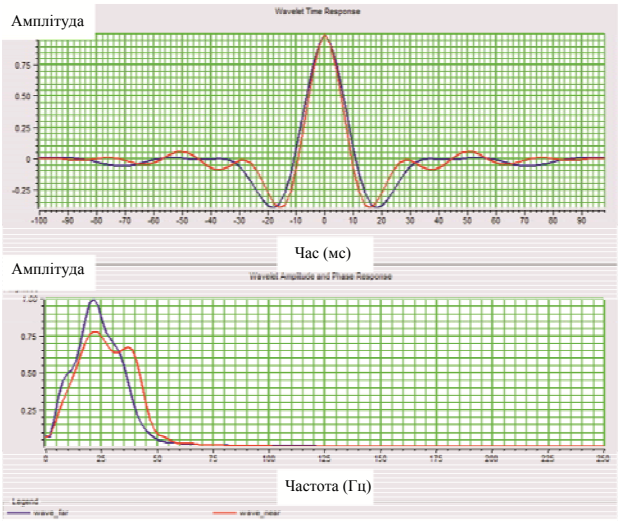


Рис. 51. Амплітудно-частотний спектр елементарних сигналів, отриманих по різних кутових розрізах (червоний – при кутах падіння 7,5°; синій – при 22,5° відповідно)

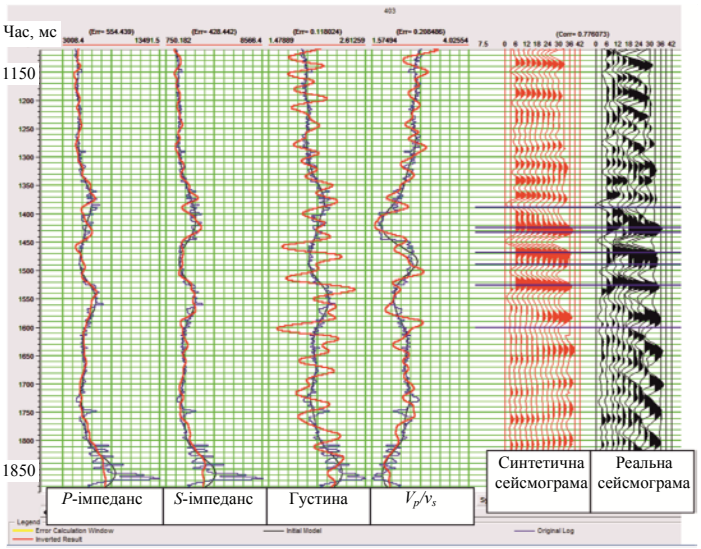


Рис. 52. Оператори інвертування заданого параметра ГДС за свердловиною № 403 у сейсмічний запис профілю № 2 та створення синтетичної сейсмограми

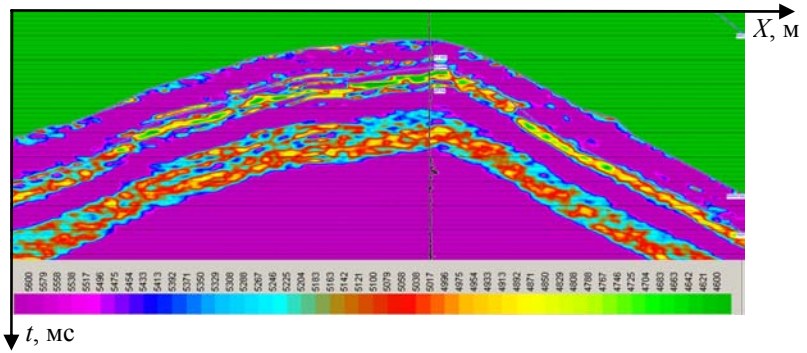


Рис. 53. Часовий розріз пружного P-імпедансу при нормальному падінні хвилі вздовж профілю № 2

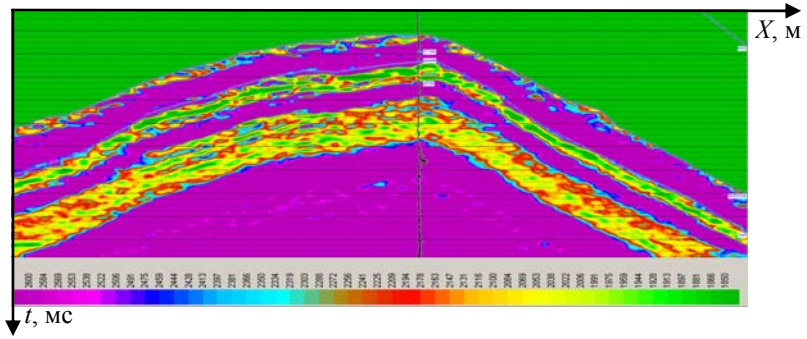


Рис. 54. Часовий розріз пружного S-імпедансу при нормальному падінні хвилі вздовж профілю № 2

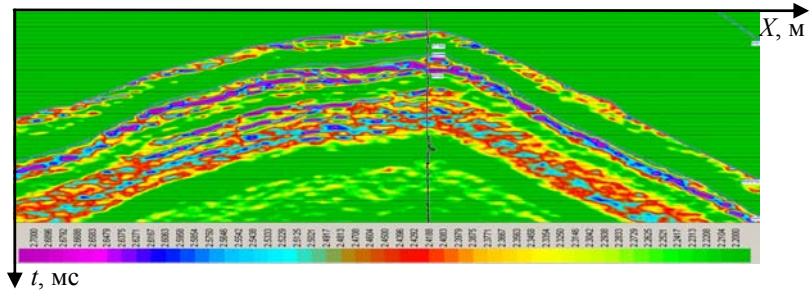


Рис. 55. Часовий розріз співвідношень V_P/V_S при нормальному падінні хвилі вздовж профілю № 2

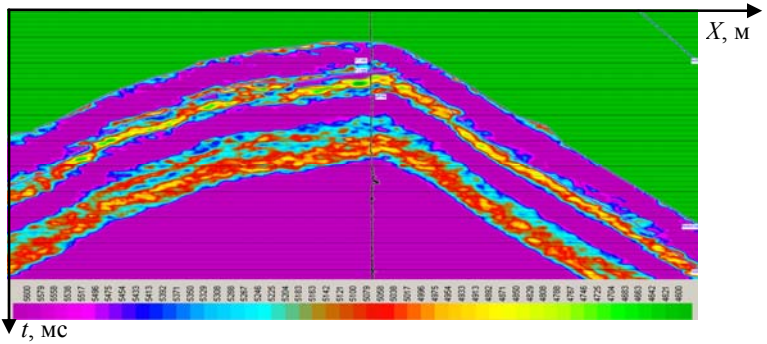


Рис. 56. Часовий розріз пружного P-імпедансу при падінні хвилі під кутом 5° уздовж профілю № 2

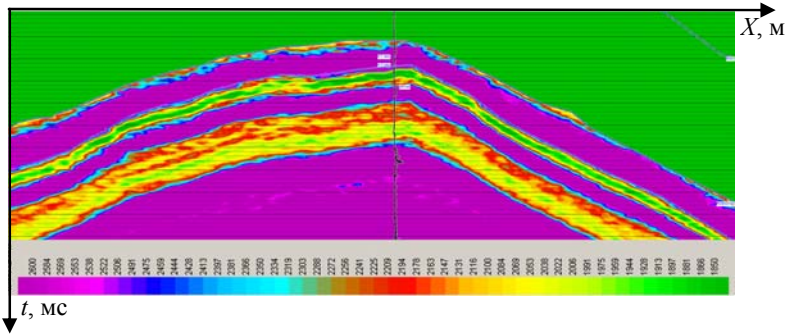


Рис. 57. Часовий розріз пружного S-імпедансу при падінні хвилі під кутом 5° уздовж профілю № 2

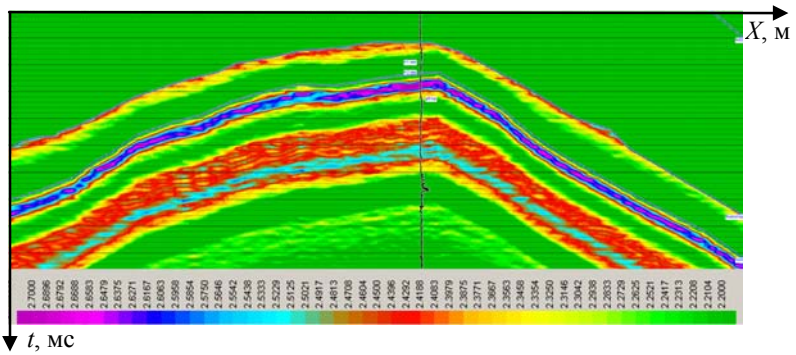


Рис. 58. Часовий розріз співвідношень V_P/V_S при падінні хвилі під кутом 5° уздовж профілю № 2

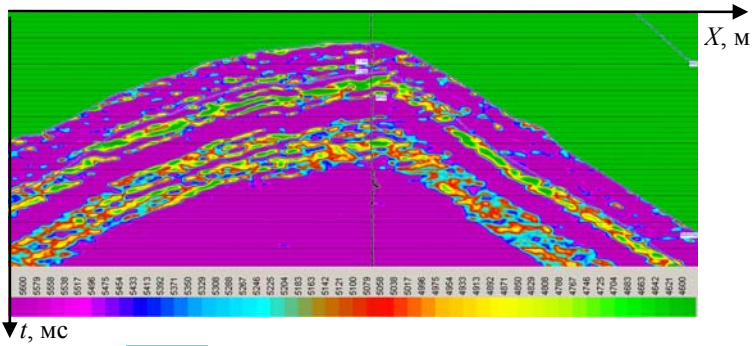


Рис. 59. **Часовий розріз пружного P-імпедансу при падінні хвилі під кутом 25° уздовж профілю № 2**

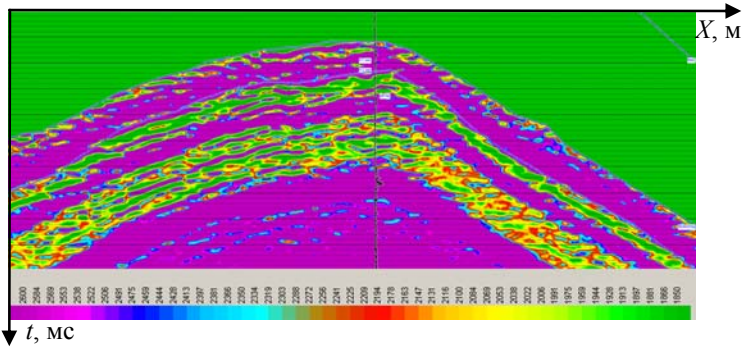


Рис. 60. **Часовий розріз пружного S-імпедансу при падінні хвилі під кутом 25° уздовж профілю № 2**

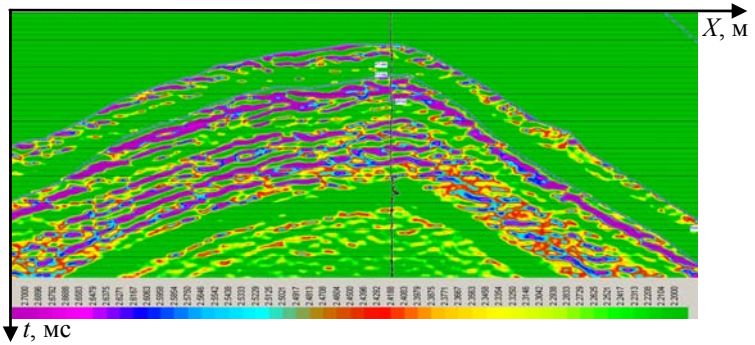


Рис. 61. **Часовий розріз співвідношень V_P/V_S при падінні хвилі під кутом 25° уздовж профілю № 2**

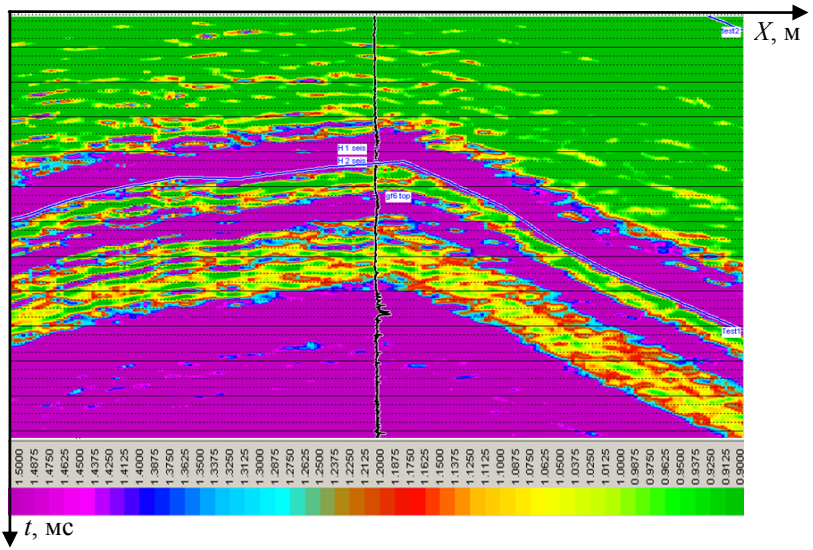


Рис. 62. **Часовий розріз $\mu\rho$ вздовж профілю № 2**

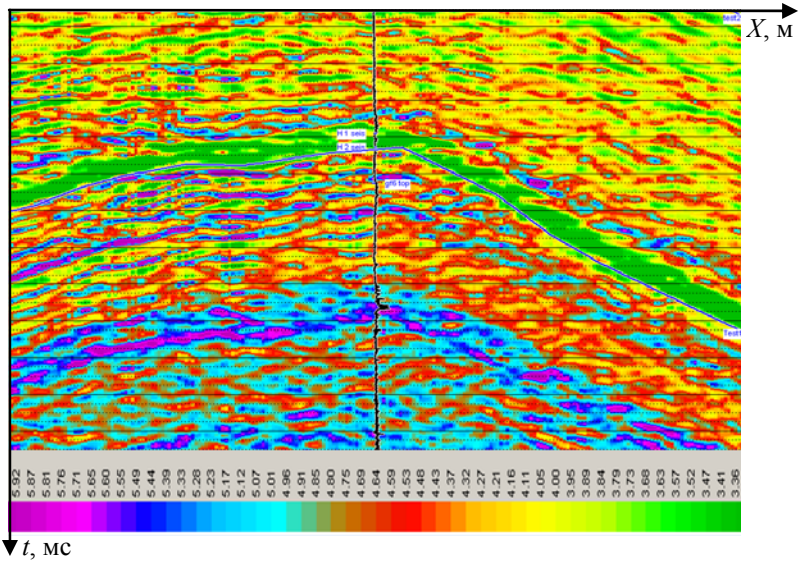


Рис. 63. **Часовий розріз $\lambda\rho$ вздовж профілю № 2**

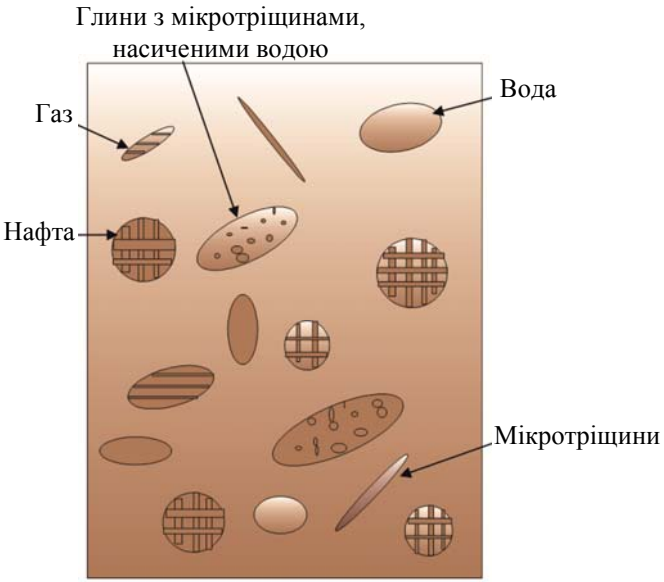


Рис. 64. Матрична модель багатокомпонентної нафтогазоводонасиченої глинистої "породи–колектора" складної структури з різними форматами пустотного простору – гранульні пори, перехідні пори, мікротріщини і глини з водонасиченими мікропустотами

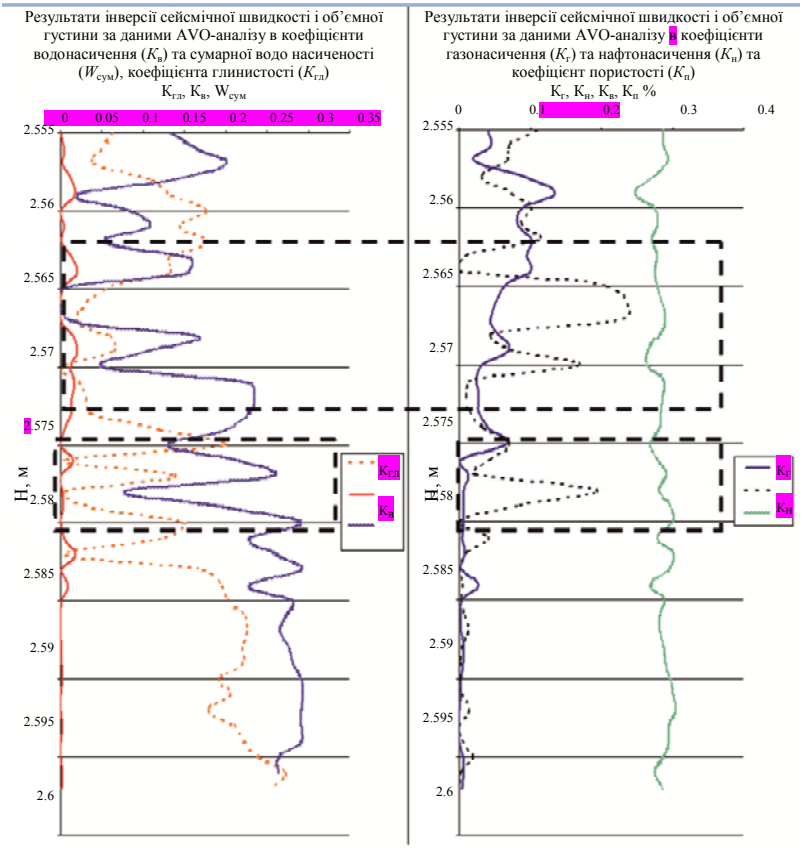


Рис. 65. Результати інверсії сейсмічних швидкостей у петрофізичні параметри (пунктиром виділено продуктивні інтервали)

ВЕРСТАЛЬНИКУ ВИПРАВИТИ ВИДІЛЕНЕ ЧЕРВОНИМ

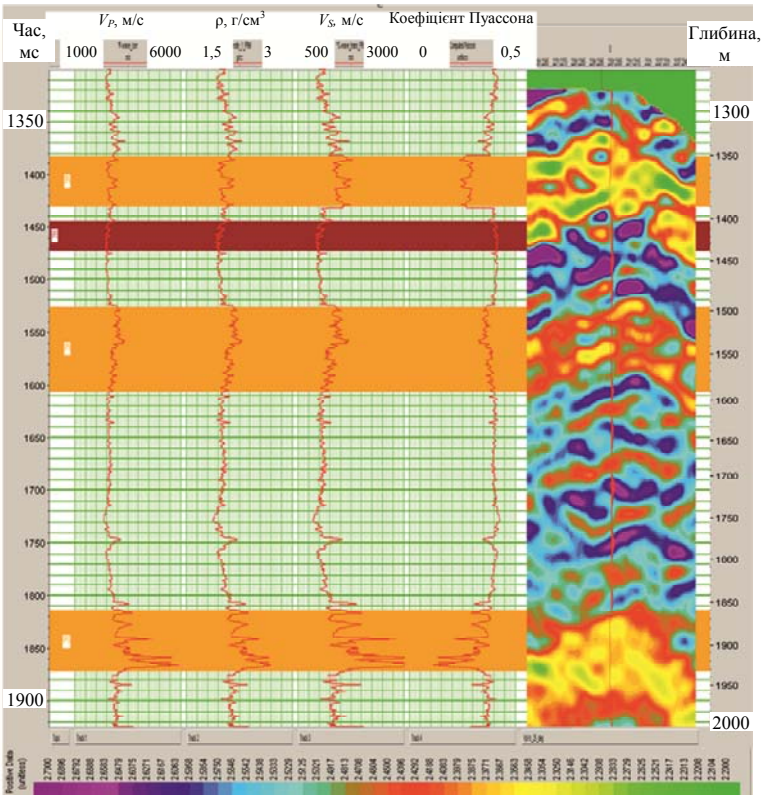
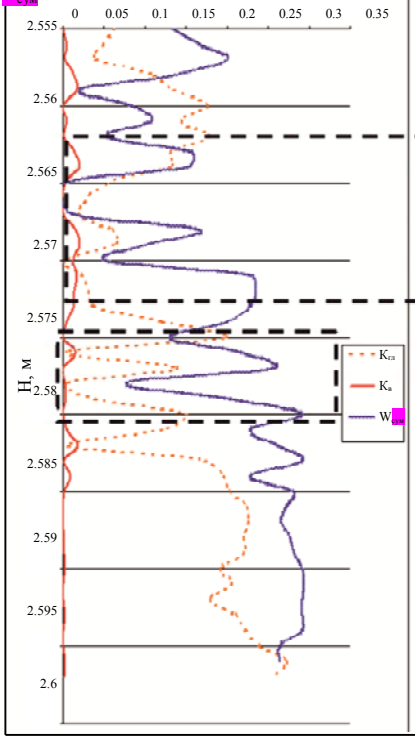
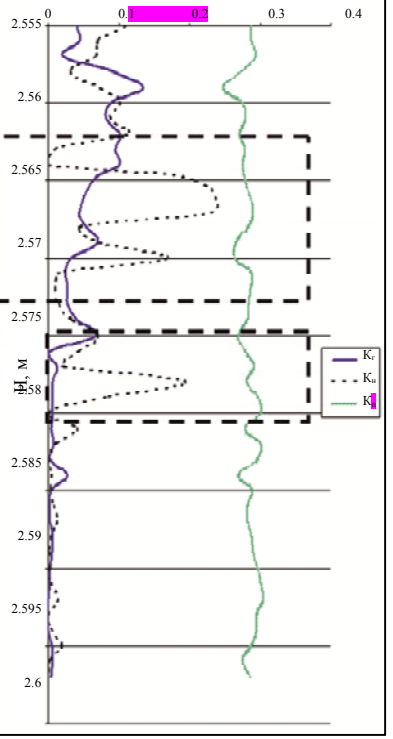


Рис. 66. Результати зіставлення даних пружної інверсії: співвідношення V_P/V_S при падінні хвилі під кутом 25° із даними ГДС по ймовірно перспективних ділянках (виділено кольором)

Результати інверсії сейсмічної швидкості й об'ємної густини за даними AVO-аналізу в коефіцієнти водонасичення $K_в$ та сумарної водонасиченості $W_{сум}$, коефіцієнт глинистості $K_{гл}$



Результати інверсії сейсмічної швидкості й об'ємної густини за даними AVO-аналізу в коефіцієнти газонасичення $K_г$ та нафтонасичення $K_н$, коефіцієнт пористості $K_п$



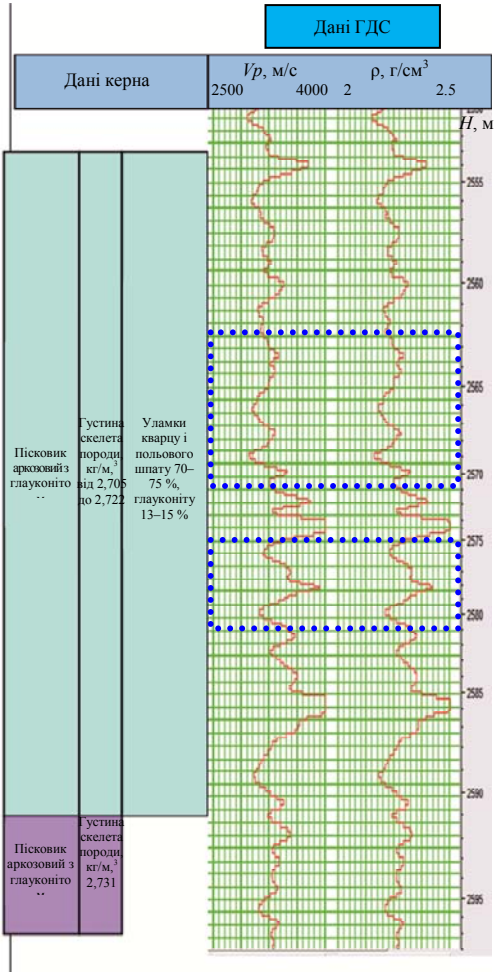


Рис. 67. Результати зіставлення даних інверсії сейсмічних швидкостей і густини (пунктиром виділено продуктивні інтервали)

ВЕРСТАЛЬНИКУ ВИПРАВИТИ ВИДІЛЕНЕ ЧЕРВОНИМ

Навчальне видання

ВИЖВА Сергій Андрійович
ПРОДАЙВОДА Георгій Трохимович
КУЗЬМЕНКО Павло Миколайович

AVO-аналіз та інверсія сейсмічних даних

Навчальний посібник

Редактор Л. В. Магда

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"

Формат 60x84$^{1/16}$. Ум. друк. арк. 13,95. Наклад 150. Зам. № 211-5896.
Вид. № Гл10. Гарнітура Times New Roman. Папір офсетний. Друк офсетний.
Підписано до друку 30.12.11

Видавець і виготовлювач
Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет",
б-р Т. Шевченка, 14, м. Київ, 01601
☎ (38044) 239-32-22; (38044) 239-31-72; тел./факс (38044) 239-31-28
e-mail: vpc@univ.kiev.ua
http: vpc.univ.kiev.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02